한국소음진동공학회 1995년도 추계학술대회논문집 pp. 233-238

# 주파수 응답함수를 이용한 유한요소모델의 개선

°서상훈*, 지태한*, 박영필**

(Updating of Finite Element Model using Frequency Response Function)

(S.H. Suh, T.H. Jee & Y.P. Park)

## 1. 서론

모든 종류의 구조물과 기계에 있어서 품질과 신뢰성이 요구됨에 따라 구조물의 동적 특성의 정확한 예측이 필요해졌다. 이러한 예측은 그 구조물에 대한 알맞은 수학적 모델-대개의 경우 유한요소모델-에 의해 가능하여진다. 계측장비와 기술의 발달에 힘입어 실험에 의해 측정된 데이타는 실제 구조물을 잘 표현한다고 생각할 수 있다. 그러나 지난 20여년간 유한요소해석기술은 크게 발달했으나 복잡한 실제 구조물의 동적특성을 정확히 예측하는 유한요소모델을 얻는 것은 매우 어렵다. 그러므로 진동실험에서 얻어진 데이타를 사용하여 유한요소모델의 질량행렬과 강성행렬을 개선하는 방법에 대한 관심이 높아지고 있다. 근래들어 많은 개선방안들이 제안되고 있으며 여러가지 구조물에 적용되고 있다.[1]

유한요소모델의 개선방안에는 여러가지가 있으나 현재 많이 사용되는 방법은 두 가지이다. 첫 번째 방법은 역고유감도방법(inverse eigensensitivity method : IESM)이다. 이 방법은 먼저 설계변수를 정하고 고유해(eigensolution)의 설계변수에 대한 감도를 계산하여 현재의 고유해와 목적하는 고유해와의 차이를 줄여서 설계변수를 찾는 방법이다. 두 번째 방법은 응답함수방법(response function method : RFM)이다. 이 방법은 진동실험에서 얻어진 주파수응답함수를 직접 이용하는 방법이다. 실험에서 얻은 데이타로부터 모달 파라미터를 추정하는 과정에는 여러가지 문제점이 있다. 먼저 두개의 모드가 근접한 경우에 정확하게 모달 파라미터를 찾는 것이 어렵다. 또한 감쇠의 영향에 의해서 측정된 모드는 허수성분을 가지나 대부분 사용되는 상관방법(correlation method)에 사용하기 위해서는 복소수 모드를 실수모드로 바꾸어야 한다. 이 과정에서 오차가 개입될 수 있으며 감쇠에 대한 정보가 없어질 수 있다. 그리고 구조물에 비선형성이 존재하는 경우에도 모달 파라미터의 추정이 어려워진다. 그러므로 실험에서 얻어진 주파수 응답함수를 직접 이용하면 모달 파라미터의 추정에서 야기되는 오차를 줄일 수 있다. Lin과 Ewin[2]은 측정된 불완전한 주파수 응답함수 집합을 직접 사용해서 유한요소모델을 개선하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 Visser와 Imregun[3]에 의해 발전되었으며 이외에도 많은 연구가 행해졌다. 한편 복잡한 구조물의 경우에는 결합부의 모델링방법에 따라 전체 구조물의 동적특성이 크게 달라지게 되므로 결합부의 동정을 통해서 유한요소모델의 정확성을 높이는 연구가 행해져 왔다.[4][5] 그리고 결합부도 결국 전체 유한요소모델의 한 부분이므로 모델 개선의 방법으로 결합부의 동정이 가능한가에 대한 연구가 행해지고 있다. Nobari[6]등은 역고유감도방법을 사용하여 유한요소모델의 개선에 의한 결합부의 동정을 시도하였다. 본 논문에서는 응답함수방법을 사용하여 이산계 및 보의 유한요소모델의 개선을 행하였고 이 방법을 응용하여 결합부의 동정을 행한다.

## 2. 이론

먼저 식(1)이 성립하는 것을 알 수 있다.

$$[[A]+[B]]^{-1}=[A]^{-1}-[[A]+[B]]^{-1}[B][A]^{-1} \quad (1)$$

여기서 [A]와 ([A+B])는 특이행렬이 아니다. 만약 [A]를 유한요소모델의 동강성행렬 $[Z_a(\omega)]$로, ([A+B])를 실험

* 연세대학교 대학원
** 연세대학교 기계공학과

모델의 동강성행렬인 $[Z_x(\omega)]$라 하면 식(1)은

$$[Z_x(\omega)]^{-1}=[Z_a(\omega)]^{-1}-[Z_x(\omega)]^{-1}([Z_x(\omega)]-[Z_a(\omega)])[Z_a(\omega)]^{-1} \quad (2)$$

가 되고 식(2)를 컴플라이언스 G를 이용하여 다시 쓰면

$$[\triangle G(\omega)]=[G_x(\omega)]-[G_a(\omega)]=-[G_x(\omega)][\triangle Z(\omega)][G_a(\omega)] \quad (3)$$

여기서 $[\triangle Z(\omega)]=[Z_x(\omega)]-[Z_a(\omega)]$이다. 만약 i번째 열을 모두 측정하였다고 가정하면 식(3)의 i번째 행에서

$$\{G_a(\omega)\}^T_i-\{G_x(\omega)\}^T_i=\{G_x(\omega)\}^T_i[\triangle Z(\omega)][G_a(\omega)] \quad (4)$$

을 얻는다. 식 (4)을 전치하면 식 (5)을 얻을 수 있다. 이때 $[\triangle Z(\omega)]$는 $[\triangle M(\omega)]$와 $[\triangle K(\omega)]$의 항으로 풀어 쓸 수 있다.

$$\{G_a(\omega)\}_i-\{G_x(\omega)\}_i = [G_a(\omega)](-\omega^2[\triangle M(\omega)]+[\triangle K(\omega)])\{G_x(\omega)\}_i \quad (5)$$

식(5)의 우변을 구조변수의 변화량으로 이루어진 벡터인 {P}에 대해 정리를 하면

$$\{B(\omega)\}=[C(\omega)]\{P\} \quad (6)$$

여기서

$$[C(\omega)]=\begin{bmatrix} \{C_1(\omega)\}^T \\ \{C_2(\omega)\}^T \\ \vdots \\ \{C_M(\omega)\}^T \end{bmatrix}, \quad \{P\}=\begin{pmatrix} \triangle m_1 \\ \vdots \\ \triangle m_L \\ \triangle k_1 \\ \vdots \\ \triangle k_M \end{pmatrix},$$

$$\{B(\omega)\}=\begin{pmatrix} b_1(\omega) \\ b_2(\omega) \\ \vdots \\ b_N(\omega) \end{pmatrix}, \quad b_j(\omega)=\{C_j\}^T\{P\}$$

로 주어진다.

이때 여러개의 주파수에서 취한 컴플라이언스값을 사용한다면 위의 문제는 과결정문제(over determined problem)가 된다. 이 경우에는 특이값분해(singular value decomposition)를 사용한 의역행렬(pseudo inverse matrix)을 이용하여 계산할 수 있다. 만약 하나의 열의 컴플라이언스를 모두 측정하였다면 (6)식에서 반복계산 없이 {P}를 직접 구할 수 있다. 그러나 실제의 경우에는 구조물의 내부에 절점이 존재하는 경우나 회전자유도의 경우와 같이 모든 절점에서 모든 자유도에 대해 컴플라이언스를 측정하는 것이 불가능하다. 그러므로 측정하지 못한 절점의 자유도에 해당하는 컴플라이언스 대신 유한요소모델에서 구한 해당 컴플라이언스를 사용하여 반복계산에 의해 {P}값을 구한다.

## 3. 모의실험I

그림.1과 같은 4개의 질량과 8개의 스프링으로 이루어진 8자유도의 이산계에 대해서 모의실험을 행하였다.

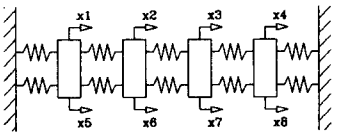


그림.1 8자유도계

유한요소모델의 질량행렬, 강성행렬은 표.1, 2와 같다.

표.1 8자유도계의 질량행렬(kg)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0883 | 0 | 0 | 0 | 0.9166 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1.0883 | 0 | 0 | 0 | 0.9166 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1.0883 | 0 | 0 | 0 | 0.9166 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1.0883 | 0 | 0 | 0 | 0.9166 |
| 0.9166 | 0 | 0 | 0 | 1.0883 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0.9166 | 0 | 0 | 0 | 1.0883 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0.9166 | 0 | 0 | 0 | 1.0883 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.9166 | 0 | 0 | 0 | 1.0883 |

표.2 8자유도계의 강성행렬(N/m)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.0E+5 | -2.0E+5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -2.0E+5 | 4.0E+5 | -2.0E+5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -2.0E+5 | 4.0E+5 | -2.0E+5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -2.0E+5 | 4.0E+5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 4.0E+5 | -2.0E+5 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -2.0E+5 | 4.0E+5 | -2.0E+5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2.0E+5 | 4.0E+5 | -2.0E+5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2.0E+5 | 4.0E+5 |

이때 실험모델은 유한요소모델과 질량행렬만 차이가 있다고 가정했다. 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스는 그림.2와 같다.

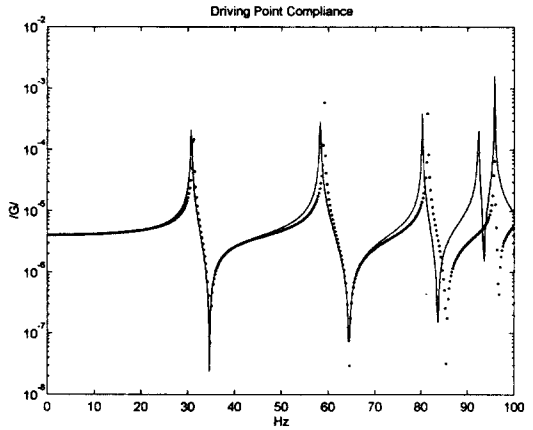


그림.2 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{11}$)

실험에서는 모든 자유도에 대해 측정하는 것이 불가능하다. 이러한 사실을 고려하여 8개의 자유도 중에서 4개의 자유도만이 측정되었다고 가정하였다. 데이타를 취하는 주파수는 반공진점과 공진점을 제외한 영역에서 임의로 선택하였다. 반공진점에서는 잡음의 영향을 많이 받게 되고 공진점에서는 누설(leakage)등의 영향으로 편향된 결과를 주게 된다.

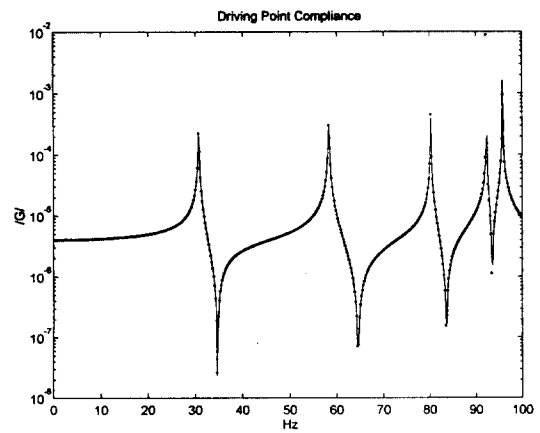


그림.3 개선된 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{11}$)

그림.3에서 3차례 반복계산후에 개선된 유한요소모델의 컴플라이언스를 보인다. 유한요소모델과 실험모델의 컴플라이언스가 거의 차이가 없는 것을 확인할 수 있다.

잡음의 영향을 보기 위하여 실험모델에서 얻은 컴플라이언스에 대해 정규분포(normal distribution)를 가지는 잡음을 더하여 계산을 행하였다. 잡음레벨(noise level) E는

$$E^2 = \frac{\sigma_n^2}{|G(\omega)|^2_{\max}} \tag{7}$$

로 주어진다.

여기서 $\sigma_n^2$은 분산(variance), $|G(\omega)|_{\max}$는 관심 주파수 대역에서 컴플라이언스의 절대값의 최대값을 말한다.

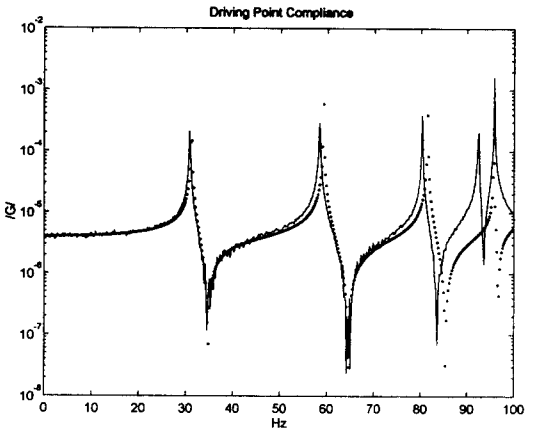


그림.4 잡음이 있는 경우에 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{11}$)
(Noise Level 1%)

잡음을 혼입시켜서 계산한 결과 잡음의 영향으로 데이타를 주파수점의 개수를 2개에서 10개로 늘려야 4회만에 수렴하는 것을 알 수 있었다. 잡음의 영향은 반복계산의 안전성과 수렴성에 영향을 끼친다. 잡음의 크기가 커지게 되면 반복계산이 횟수가 늘어나며 잡음이 어느정도를 넘으면 발산하는 것을 알 수 있었다. 잡음이 혼입된 경우에 컴플라이언스를 취하는 주파수점에 따른 영향은 잡음의 영향이 적은 공진봉 부근의 데이타를 취하는 것이 가장 좋은 결과를 주는 것을 알 수

있었다. 그러나 공진점에서 데이타를 취하면 계산과정이 불안정해진다. 또한 반공진점에서 데이타를 취하는 경우에는 계산결과가 발산하였다. 적절한 주파수를 선택하여 데이타를 취하면 잡음이 혼입된 경우에도 안정된 결과를 주는 것을 알 수 있었다. 실제 실험 데이타를 취하는 경우에는 실험에서 혼입되는 오차의 영향을 무시할 수 없다. 그러므로 취하는 데이타의 개수를 많게 하여야 반복계산시에 안정도가 보장될 것이다.

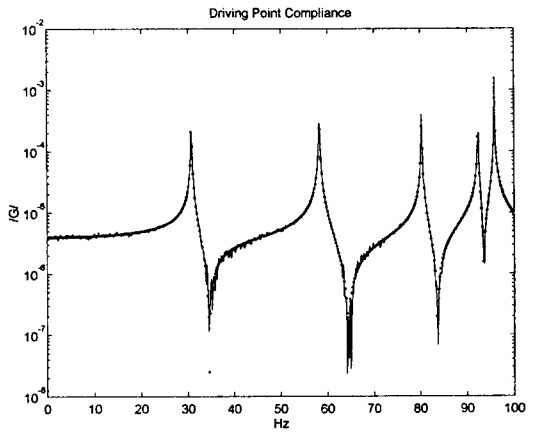


그림.5 잡음이 있는 경우에 개선된 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{11}$)
(Noise Level 1%)

## 4. 모의실험II

위에서 상술한 방법을 실제 구조물에 가까운 모델에 적용시켜 보았다. 대상모델은 그림.6과 같은 두 보가 결합된 모델이다. 두개의 보는 한 절점에서 결합요소에 의해 결합되어 있다. 하나의 보는 가로 12mm, 세로 12mm, 길이 500mm이다. 유한요소모델링에서는 절점당 6자유도의 3차원 보요소를 사용하였다. 보요소의 개수는 총 8개이며 모델의 총자유도는 60개이다.

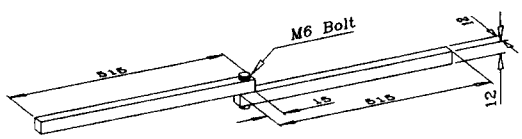


그림.6 보 구조물

실험모델은 유한요소모델과 결합요소의 강성값만을 제외한 나머지는 모두 유한요소모델과 일치한다고 가정하였다. 실험모델의 결합요소의 강성값은 유한요소모델의 50%의 값을 사용하였다. 이는 강결합으로 모델링된 유한요소모델에 비해서 낮은 강성을 가지는 결합부의 특성을 고려한 것이다. 또한 실험에서는 모든 자유도에 대해 측정하는 것이 불가능하다는 것을 고려하여 60개의 자유도중에서 10개의 자유도만이 측정되었다고 가정하였다. 측정되었다고 가정한 자유도는 z방향의 병진자유도이다.

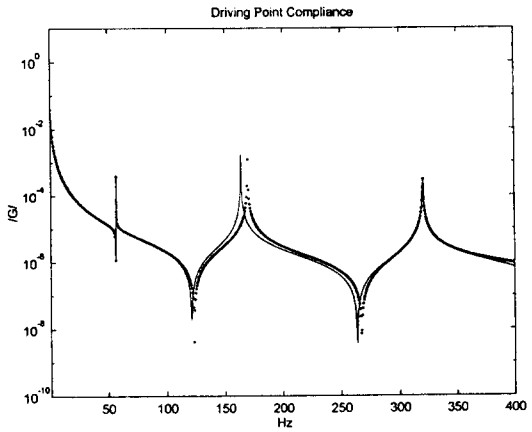


그림.7 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{1z\text{-}1z}$)

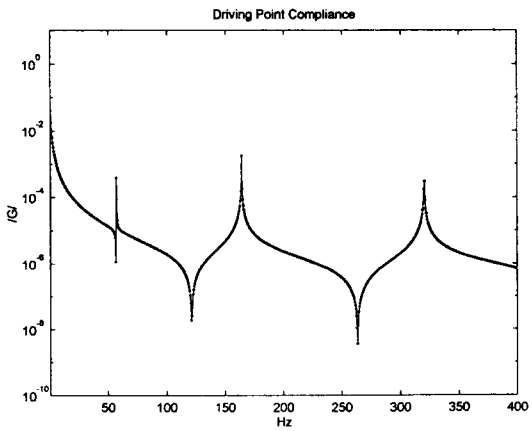


그림.8 개선된 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{1z\text{-}1z}$)

## 5. 실험I

실제 보에 대하여 충격실험을 행하여 얻은 주파수 응답함수를 사용하여 유한요소모델의 개선을 행하였다. 보는 가로 10mm, 세로 10mm, 길이 1000mm이다.

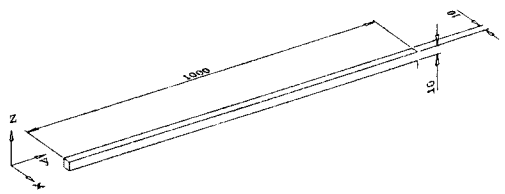


그림.9 보

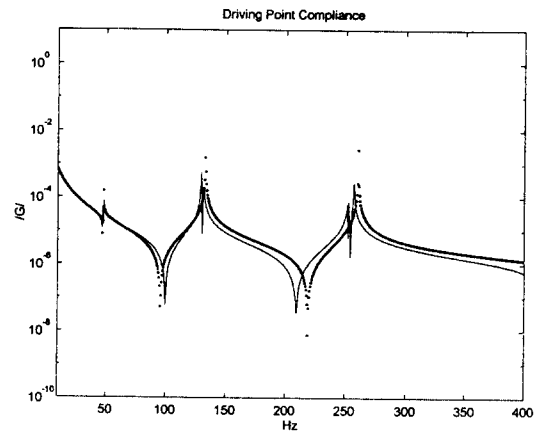


그림.10 유한요소모델과 실험의 구동점 컴플라이언스($G_{4z-4z}$)

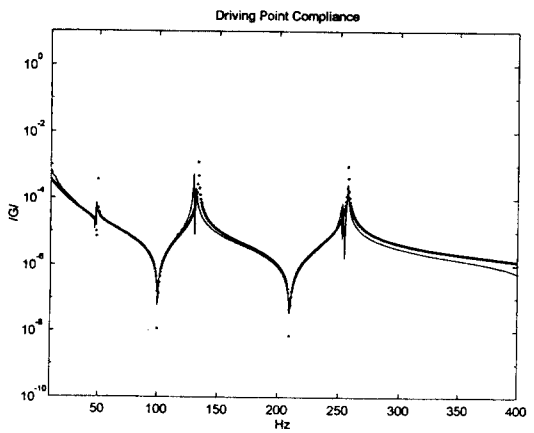


그림.11 개선된 유한요소모델과 실험의 구동점 컴플라이언스($G_{4z-4z}$)

절점의 불일치에서 오는 문제를 피하기 위하여 요소의 분할은 유한요소모델과 같도록 하였다. 5개의 절점을 차례로 충격망치를 사용하여 가진하여 주파수 응답함수를 얻었다. 주파수 범위는 0~400Hz, 0.5Hz간격으로 총 800개의 데이타를 취하였다. 그림.10은 개선전의 유한요소모델의 컴플라이언스와 실험의 컴플라이언스이다. 2차와 3차 공진봉부근에서 두 곡선이 차이가 난다. 그림.11은 유한요소모델의 개선후의 두 곡선이다. 실험의 컴플라이언스에 근접한 컴플라이언스를 얻었다.

## 6. 실험II (결합부 동정에의 적용)

그림.6처럼 두개의 보가 볼트로 체결된 보구조물에 대하여 실제로 충격실험을 행하여 얻은 주파수 응답함수를 사용하여 결합부의 동정을 행하였다. 볼트결합부를 1개의 2자유도 - z방향 병진자유도와 y방향 회전자유도 - 결합요소로 모델링하였다. 결합요소의 초기값은 강결합되어 있다고 생각해서 보요소의 강성값을 사용하였다.

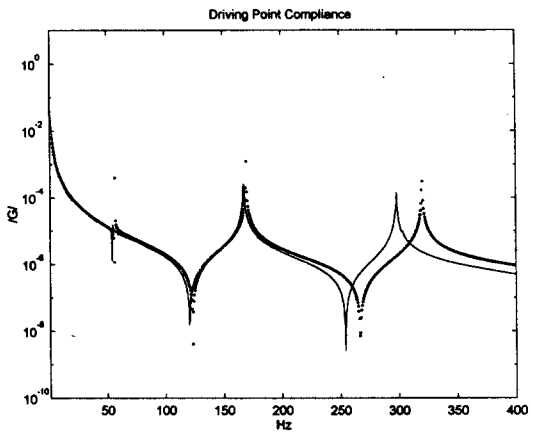


그림.12 유한요소모델과 실험의 구동점 컴플라이언스($G_{8z-8z}$)

표.3. 개선된 결합요소의 강성값

| | 초기값 | 수렴값 | 변화율 |
|---|---|---|---|
| 병진 z자유도 | 7.0544e5 | 4.4245e5 | -38% |
| 회전 y자유도 | 3.6742e3 | 1.5719e3 | -58% |

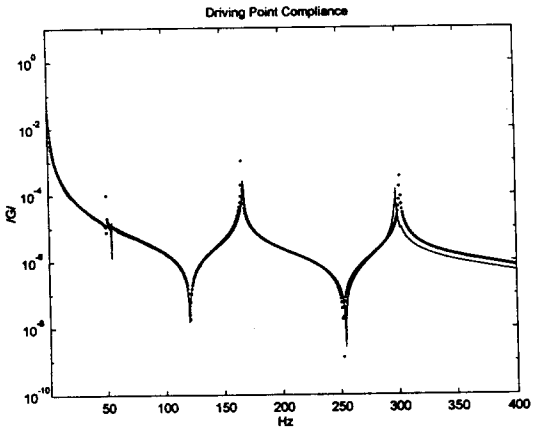


그림.13 개선된 유한요소모델과 실험모델의 구동점 컴플라이언스($G_{8z\text{-}8z}$)

그림.12에서 나타난 유한요소모델과 실험의 컴플라이언스의 차이가 결합부에 대한 모델개선을 통하여 그림.13처럼 감소한다.

## 7. 결론

주파수 응답함수를 직접 이용하는 응답함수 방법을 이용하여 8자유도계, 보, 그리고 보구조물의 모의실험과 실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 잡음이 혼입된 경우도 데이타를 취하는 주파수점의 개수를 늘려줌으로써 정확한 결과를 얻는 것이 가능하다.

둘째, 실제 보에 대해서 유한요소모델의 개선을 행하여 실험과 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

세째, 볼트로 체결된 보구조물에 대해 유한요소모델의 개선을 통한 결합부의 동정을 통해 실험과 더 잘 일치하는 유한요소모델을 얻을 수 있다.

## 8. 참고문헌

[1] Mottershead,J.E., Friswell,M.I., 1993, "Model Updating in Structural Dynamics : A Survey", J. of Sound and Vibration, pp347~375

[2] Lin,R.M., and Ewins.D.J., 1990, "Model Updating Using FRF Data", ISMA 15, pp141~163

[3] Visser,W.J., and Imregun,M., 1991, "A Technique to Update Finite Elements Models Using Frequency Response Function", IMAC 9, pp462~468

[4] Tsai,J.S. and Chou,Y.F., 1988, "The Identification of Dynamic Characteristics of a Single Bolt Joint", Journal of Sound and Vibration Vol.125, pp487~502

[5] Wang,J.H. and Liou,C.M., 1991, "Experimental Identification of Mechanical Joint Parameters", ASME Journal of Vibration and Acoustics Vol.113, pp28-36

[6] Nobari,A.S., Robb,D.A. and Ewins,D.J., 1993, "Model Updating and Joint Identification Methods, Restrictions and Overlap", the Int. J. of Modal Analysis, pp93~105