

연속계의 이산화를 위한 새로운 모델링 기법

⁰ 이 용관,* 김 인수,** 홍 성욱**

A new modeling technique for the distributed parameter system - Digital modeling approach

⁰ Lee, Yong-Kwan,* Kim, In-Soo,** Hong, Seong-Wook**

Abstract

This paper presents a digital modeling technique for the distributed parameter system. The basic idea of the proposed technique is to discretize a continuous system with respect to the spatial coordinate using the approximate methods such as bilinear method and backward difference method. The response of the discretized system is analyzed by Laplace transform and Z transform. The computational result of the proposed technique in a torsional shaft is compared with the exact solution and the result of the finite element method.

Key words : BLM (Bilinear Method), BDM (Backward Difference Method), FEM (Finite Element Method), distributed parameter system (연속계), Laplace 변환, Z-변환, 역 Z-변환

1. 서론

무한자유도를 갖는 연속계의 응답특성은 편미분 방정식으로 기술되며, 단순 경계조건하의 제한된 연속계에 한하여 계의 응답특성이 엄밀해(exact solution)로 표현될 수 있다. 그러나 형상 및 경계조건이 복잡한 대부분의 연속계의 경우에는 엄밀해를 구하는 것이 용이하지 않으며, 이 같은 경우에 근사적 응답특성을 얻기 위하여 이산화 방법을 사용한다. 대표적인 이산화 방법으로 대부분의 연속계에 효율적으로 적용될 수 있는 유한요소법⁽¹⁾과 회전체 진동해석에 자주 이용되는 전달행렬법⁽²⁾ 등이 있다. 주지하다시피, 유한요소법은 연속계를 보간함수를 이용하여 요소별로 나누고 각각의 요소에 대한 응답특성을 부분행렬로 표현하여 이를 수치적으로 해석하는 방법이다.

본 연구에서 제안하는 디지털 모델링 방법은 공간좌표에 대해 BDM(Backward Difference Method)과 BLM(Bilinear Method)⁽³⁾과 같은 이산화 방법을 이용하여 무한자유도의 연속계를 유한자유도로 근사화 하는 방법이다. Tchetchourine⁽⁴⁾은 PFM(Power Fraction Method) 을

이용한 연속계의 이산화 방법 및 이의 해석방법을 제안하였다. 계의 응답해석은 시간좌표에 대해 라플라스 변환을 행하고 이산화된 공간좌표에 대해 z-변환을 수행한 후, 이를 통해 얻어진 계의 전달함수에 역 z-변환을 적용함으로써 이루어 진다. 이에 따라 제안된 방법을 이용하는 경우에는, 유한요소법의 적용시와는 달리, 이산계의 주파수응답 특성이 양해(explicit solution)로 표현될 수 있다. 제안된 방법의 유용성을 확인하기 위하여, 모멘트 작용하에 있는 비틀림 연속계에 대하여 본 방법을 적용하여 계의 응답을 구하고 이를 엄밀해 및 유한요소법의 결과와 비교 분석하기로 한다.

2. 이론적인 배경

2.1 BDM (Backward Difference Method), BLM (Bilinear Method) 의 생성 이론

아날로그 필터에 대한 다음과 같은 방정식을 고려한다.

$$\frac{dy}{dt} = -ay + ax \tag{1}$$

* 금오공과대학교 정밀기계공학과 대학원

** 정희원, 금오공과대학교 정밀기계공학과

여기서 샘플링 주기를 T 라고 할 경우 식(1)로부터 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$y(kT) - y((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \quad (2)$$

식(2)의 우변은 그림 1(A)에서와 같이 근사적으로 수치적 적분이 가능하며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y(kT) - x(kT)] \quad (3)$$

식(3)을 z -변환하고 변환 결과식으로부터 전달 함수를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{a}{1 - \frac{z-1}{z} + a} \quad (4)$$

식(4)는 다음과 같은 관계식에서 식(1)의 전달 함수와 등가임을 알 수 있다.

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (5)$$

여기서 s 와 z 는 각각 라플라스 변수, z 변수를 의미하며, 식(5)는 s 평면에서 z 평면으로 정사(mapping)된 것이며, BDM⁽³⁾ (backward difference method) 이라고 한다.

유사한 방식으로 그림 1(B)와 같이 근사적으로 수치 적분을 수행할 수 있으며, 이때는 식(6)과 같이 표현될 수 있다.

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2} [y(kT) + y((k-1)T)] + \frac{aT}{2} [x(kT) + x((k-1)T)] \quad (6)$$

식(6)에 z -변환을 적용하고 전달 함수를 구해 보면 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G_D(z) = \frac{a}{2z - 1 + a} \quad (7)$$

식(7)은 식(5)와 유사하게 식(1)의 전달 함수와 다음과 같이 관련 지어질 수 있다.

$$s = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \quad (8)$$

식(8)은 BLM(bilinear method)⁽³⁾ 이고, 연속 시간 필터를 안정한 이산 시간 필터로 변환하기 위한 중요한 방법 중의 하나이다.

2.2 공간 좌표에 대한 BDM, BLM

시간 영역에서 미분은 s 영역에서는 s 를 곱하는 관계로 표현되므로, 좌표축으로의 편미분된 변수는 어떤 변수(여기서는 q 변수라고 지칭)를 변환된 변수에 곱하는 비슷한 관계가 있다는 것을 예상할 수 있다. 그리고 식(5)와 식(8)에서 주어진 관계처럼, q 영역에서 z 영역으로 변환될 수 있고, 이를 이용해 시간적 이산화가 아닌 공간적 이산화의 개념으로 z -변환과 역 z -변환을 확대 적용할 수 있다.

다음과 같이 편 미분방정식으로 표현되는 연속계의 운동 방정식을 고려한다.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial t^j} w(x, t) = 0 \quad (9)$$

여기서 R_{ij} 는 x 와 t 에 무관한 상수이고, $w(x, t)$ 는 x 와 t 에 종속된 변수이다. 식(9)를 라플라스 변환한 후, x 에 대한 편 미분 연산자는 새로운 연산자 q 를 도입하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} q^i s^j w(x, s) = 0 \quad (10)$$

여기서 $q = \frac{\partial}{\partial x}$ 이고, s 는 라플라스 변수이며 $w(x, s)$ 는 초기조건을 영(zero)으로 하면 x 와 t 에 대한 미분식에 대해 다음의 조건을 만족한다.

$$L \left[\frac{\partial^n w(x, t)}{\partial x^n} \right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^n w(x, t)}{\partial x^n} dt = \frac{\partial^n w(x, s)}{\partial x^n}$$

$$L \left[\frac{\partial^n w(x, t)}{\partial t^n} \right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^n w(x, t)}{\partial t^n} dt = s^n w(x, s)$$

여기서 L 은 라플라스 연산자(Laplace operator)를 의미한다. q 대신 다음의 관계식을 만족시키는 z 를 도입한다. 즉,

$$q = \frac{1 - z^{-1}}{h} \quad (\text{BDM}) \quad (11)$$

$$q = \frac{2z - 1}{hz + 1} \quad (\text{BLM}) \quad (12)$$

여기서 h 는 이산화 간격을 의미한다. 식(10)은 z -변환된 형태의 식(13)으로 표현될 수 있다.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} q^i(z) s^j W(z, s) = 0 \quad (13)$$

여기서 $W(z, s)$ 는 다음의 관계를 만족한다.

$$W(z, s) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k, s) z^{-k}$$

여기서 $w(k, s)$ 는 k 번째 이산화된 구역에서의 값이다. 식(13)은 라플라스 변환과 z -변환이 조합된 새로운 방정식이다. z -변환은 다음과 같은 조건(shifting theorem)⁽²⁾을 만족한다.

$$\begin{aligned} Z[w(x-n)] &= z^{-n} W(z) \\ Z[w(x+n)] &= z^n \left[W(z) - \sum_{k=0}^{n-1} w(k) z^{-k} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 Z 는 z -변환 연산자(operator)를 나타낸다. 식(14)를 식(13)에 적용하여 다음의 이산화 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=0}^m R_{ij} s^j w(n, s) = 0 \quad (15)$$

식(15)는 식(14)를 통해서 경계조건을 포함한 z -변환의 형태로 다시 표현될 수 있다.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} z^i s^j w(z, s) + z^n \sum_{k=0}^{n-1} w(k) z^{-k} = 0 \quad (16)$$

식(16)을 역 z -변환하게 되면 다음과 같은 주파수 보조 방정식(auxiliary equation)을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=0}^m R_{ij} s^j w(n, s) + \sum_{k=0}^{n-1} w(k) = 0 \quad (17)$$

식(17)은 최종적으로 구해 낸 주파수 보조 방정식이고, 이로부터 여러 가지 경계조건을 도입해서 원하는 주파수 응답해를 구할 수 있다.

3. 적용 예제(비틀림 축)

연속계의 이산화를 위한 간단한 모델로 비틀림을 받는 균일한 축을 고려하였으며, 두 가지 경계조건에 대해 엄밀해와 수식적 유사성을 비교하기로 한다. 균일한 축의 비틀림 운동은 다음의 방정식으로 표현된다.

$$\tilde{J} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \tilde{C} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

여기서, $\tilde{J}, \tilde{b}, \tilde{C}$ 는 각각 단위 길이당 관성 모멘트, 감쇠, 그리고 강성 계수를 나타낸다. 식(18)을 변형하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{J} \ddot{\varphi} + \tilde{b} \dot{\varphi} &= -\frac{\partial M}{\partial x} = -qM \\ M &= -\tilde{C} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\tilde{C} q \varphi \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 s 는 라플라스 변수, q 는 편 미분 변수를 지칭하며 M 은 모멘트를 의미한다. q 대신에 BDM(backward difference method)의 변환치 식(11)을 대입하고, z -변환의 성질을 이용하면 식(19)는 다음과 같이 이산화된 방정식으로 표현됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} J \ddot{\varphi}_n &= M_n - M_{n+1} - b \dot{\varphi}_n \\ M_{n+1} &= C(\varphi_n - \varphi_{n+1}) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 h 는 이산화 간격을 의미하며, 식(20)의 계수는 $J = \tilde{J} * h, b = \tilde{b} * h, C = \tilde{C} / h$ 를 나타낸다. 식(20)은 라플라스 변환과 z -변환의 성질 식(14)를 적용하면 식(21)처럼 $M(z)$ 와 $\Phi(z)$ 에 관한 행렬식으로 다음과 같이 나누어 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}(z) \mathbf{U}(z) = \mathbf{B}(z) \quad (21)$$

여기서, 각 행렬과 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} z & C(z-1) \\ z-1 & (Js^2 + bs) \end{bmatrix}, \mathbf{B}(z) = \begin{bmatrix} z(m(0) + C\varphi(0)) \\ zm(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}(z) = \begin{bmatrix} M(z) & \Phi(z) \end{bmatrix}^T$$

또, $m(0)$ 와 $\varphi(0)$ 는 z -변환에서 나오는 경계 조건에 관한 항이다. 식(21)을 연립해서 풀면 다음과 같은 풀이 얻어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A}_{cr}(1)) \\ \Phi(z) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \det(\mathbf{A}_{cr}(2)) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\mathbf{A}_{cr}(1)$ 과 $\mathbf{A}_{cr}(2)$ 는 각각 \mathbf{A} 행의 첫 열과 둘째 열을 벡터 \mathbf{B} 와 교환한 것이다. 그리고 분모항 $\det(\mathbf{A}) = z^2 - 2z \cosh x + 1$ 과 같이 항상 표현 가능하다.

따라서, 식(22)의 연립해는 다음과 같다.

$$M(z) = \frac{m(0)z(z - \cosh x) + \{m(0) - 2C\varphi(0)\}(1 - \cosh x)z}{z^2 - 2z \cosh x + 1}$$

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(0)z \left(z - \cosh x + \cosh x - \left(1 + \frac{m(0)}{C\varphi(0)} \right) \right)}{z^2 - 2z \cosh x + 1} \quad (23)$$

여기서

$$\cosh x = 1 + \frac{Js^2 + bs}{2C}$$

로서, 역 z-변환을 용이하게 하기 위해서 정의한 정의의 식이다. 식(23)를 역 z-변환 하게 되면, 식(24)가 얻어진다.

$$M(n) = m(0) \cosh xn + \{m(0) - 2C\varphi(0)\}(1 - \cosh x) \frac{\sinh xn}{\sinh x}$$

$$\varphi(n) = \varphi(0) \left[\cosh xn + (\cosh x - 1) \frac{\sinh xn}{\sinh x} \right] - m(0) \frac{\sinh xn}{C \sinh x} \quad (24)$$

식(24)는 후에 경계조건을 통해 주파수 응답 방정식을 유도할 수 있는 식이다.

같은 방식으로 BLM의 관계 식(12)를 식(19)에 대입하고 유사한 과정을 거치게 되면, z-변환된 식(25)를 얻을 수 있다.

$$M(z) = \frac{2C\varphi(0)z(1 - \cosh x) + \frac{m(0)z(z+1)}{2}(1 - \cosh x) - \frac{m(0)}{\sigma}z(z-1)}{z^2 - 2z \cosh x + 1}$$

$$\Phi(z) = \frac{z(z+1) \left[\frac{1}{2}(1 - \cosh x)\varphi(0) + \frac{hm(0)}{2C\sigma} \right] - \left[\frac{\varphi(0)}{\sigma} + \frac{hm(0)}{2C\sigma} \right]z(z-1)}{z^2 - 2z \cosh x + 1} \quad (25)$$

여기서,

$$\gamma = \frac{h^2(Js^2 + bs)}{4C} + 1$$

$$\sigma = \frac{h^2(Js^2 + bs)}{4C} - 1$$

$$\cosh x = -\frac{\gamma}{\sigma}$$

를 의미한다. 식(24)와 유사한 역 z-변환된 식(26)을 찾아보면, 다음과 같다.

$$M(n) = \left[\frac{m(0)}{2}(1 - \cosh x) - \frac{m(0)}{\sigma} \right] \cosh xn$$

$$+ \left[\frac{m(0)}{2}(1 - \cosh x) - \frac{m(0)}{\sigma} \right] \cosh x + \left[\frac{2C\varphi(0)}{h} + \frac{m(0)}{2} \right] (1 - \cosh x) + \frac{m(0)}{\sigma} \frac{\sinh xn}{\sinh x}$$

$$\varphi(n) = \left[\frac{1}{2}(1 - \cosh x) - \frac{1}{\sigma} \right] \varphi(0) \cosh xn$$

$$+ \left[(1 - \cosh x) \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cosh x) + \frac{1}{\sigma} \right\} \varphi(0) + \frac{hm(0)}{C\sigma} \right] \frac{\sinh xn}{\sinh x} \quad (26)$$

식(24)와 식(26)은 경계조건을 포함하는 주파수 응답 보조 방정식이다. 식(24)와 식(26)에 두 가지 경계조건을 고려해서 BDM과 BLM의 주파수 응답 방정식을 구해 보면 다음과 같다.

Free-Free 조건 :

그림 2(A)와 같은 한쪽 끝단에는 집중 질량체가 달려 있고, 다른 쪽 끝에는 모멘트가 가해지고 있는 축을 고려한다. 식(24)와 식(26)의 모멘트 관계식에서 n 대신 N을 대입하고 m(0) 대신에 I₀s²φ(0)를 대입하면 한쪽 끝에서 모멘트가 작용하고 있으므로 M(N) = M₀ cos ωt의 관계를 이용, 식(24)와 식(26)으로부터 다음과 같은 주파수 응답 방정식을 구할 수 있다.

BDM:

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{1}{I_0 s^2 \cosh xN + (I_0 s^2 - 2C)(1 - \cosh x) \frac{\sinh xN}{\sinh x}} \right| \quad (27)$$

BLM :

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{1}{9\cosh xN(I_0 s^2) + \left[9\cosh x(I_0 s^2) + \frac{2C}{h}(1 - \cosh x) + 9\left(\frac{1}{\sigma} \right)(I_0 s^2) + \frac{1}{\sigma}(I_0 s^2) \right] \frac{\sinh xN}{\sinh x}} \right| \quad (28)$$

여기서 9 = (1 - cosh x) / 2 - 1 / σ 이다. 그리고 같은 경계 조건에 대한 엄밀해의 결과는 다음과 같다.

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{1}{I_0 s^2 \cos kl - GI_p k \sin kl} \right| \quad (29)$$

Free-Fixed 조건 :

그림 2(B)에서와 같이 한쪽 단이 고정되어 있고 다른 쪽에 집중 질량체가 달려 있으며, 같은 곳에 모멘트가 작용될 때, 식(24)와 식(26)의 경계조건은 다음과 같다. 즉, n 대신에 N을 대입하고, m(0) 대신에

$-I_0 s^2 \varphi(0) + M_0 \cos \omega t$ 을 대입하고 위의 방식과 비슷하게 모멘트와 변위와의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

BDM :

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{\frac{\sinh xV}{C \sinh x}}{\left[\cosh xV + (\cosh x - 1) \frac{\sinh xV}{\sinh x} \right] + I_0 s^2 \frac{\sinh xV}{C \sinh x}} \right| \quad (30)$$

BLM :

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{\frac{h \sinh xV}{C \sinh x}}{9 \cosh xV + \left[(1 - \cosh x) \left(9 + \cosh x + \frac{2}{\sigma} \right) \frac{\sinh xV}{\sinh x} - I_0 s^2 \frac{h \sinh xV}{C \sinh x} \right]} \right| \quad (31)$$

\mathfrak{R} 은 위와 동일하다. 엄밀해에 대한 주어진 경계조건의 해는 다음과 같다.

$$\left| \frac{\varphi(0)}{M_0} \right| = \left| \frac{\sin kl}{I_0 s^2 \sin kl + G I_p k \cos kl} \right| \quad (32)$$

여기서, $k^2 = (\tilde{J}\omega^2 + i\tilde{b}\omega) / \tilde{C}$ 이다.

4. 수치 예제 및 토의

그림 2의 두 가지 경계 조건에 대해서 Table 1에 주어진 데이터로 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. Figs. 3, 4는 Fig. 2(A), (B)의 계에 요소의 갯수를 각각 5개, 10개 했을 때의 주파수 응답을 나타낸 것이며, Fig. 5는 BDM과 BLM의 각 요소를 증가시키기에 따라 BDM과 BLM의 해가 엄밀해에 얼마의 오차를 가지고 접근해 가고 있는지를 보여 주는 상대 오차에 대한 그림이다. 세 개의 그림에서 비교할 수 있듯이 BDM과 BLM은 많지 않은 요소의 선택만으로도 쉽게 엄밀해에 접근해 가고 있음을 보여 주고 있고 같은 요소를 취할 경우 유한요소모델해와 유사하게 상대 오차가 단조적으로 감소하고 있음을 알 수 있다. 그러나 제안된 방법은 요소의 갯수를 증가 시켜도 유한요소모델과는 달리 계산 시간과 메모리상의 추가적인 부담이 없으므로 요소의 갯수를 많이 취할수록 좋다. 그리고 무한히 많은 요소를 선택할 경우 사실상 엄밀해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 공간 좌표에 대한 이산화 방법을 이용하여 무한자유도의 연속계를 유한자유도로 근사화하고, 일련의 수식 과정을 통해 이산화된 연속계를 해석하는 방법을 제안하였다. 모멘트 작용하의 비틀림축에 대해 제안된 방법을 적용하여 본 결과, 다음의 결론을 얻었다.

(1) 이산화된 연속계의 주파수 응답 특성이 수식적으로 표현된다.

(2) 제안된 방법은 항상 수렴이 보장되며 이산요소수와 관계없이 계의 응답 특성을 얻기 위한 연산 시간은 일정하므로, 요소의 갯수를 많이 취할수록 좋다.

(3) 제안된 방법을 이용하면 실질적으로 엄밀해를 얻을 수 있다.

6. 참고 문헌

1. Meirovitch, L., "Computational methods in structural dynamics", Sijthoff & Noordhoff, 1980
2. Meirovitch, L., "Analytical Method in Vibrations", Macmillan, New York, 1967
3. Ogata, K., "Discrete-Time Control Systems", Prentice Hall, 1987
4. Tchetchourine, S. L., Liu Z.Z., "Digital-Analog Models for Dynamic Control Systems", St Petersburg, Computerized Publishing System, Russia, 1994.
5. Rao, S, S "Mechanical Vibrations", Addison-Wesley, 1990.

Table 1 Simulation Data for a shaft

Shaft	
Length	1.8 m
Diameter	1 cm
Density	8000 kg / m ³
Shear modulus	80 GN / m ²
Disk	
Mass	1.345 kg
Diameter	0.147 m
Thickness	1 cm
Polar moment of inertia	0.00363 kg.m ²
Density	8000 kg / m ³

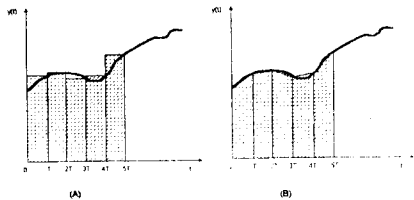


Fig. 1 Area approximation by backward difference (A) and bilinear (B) methods

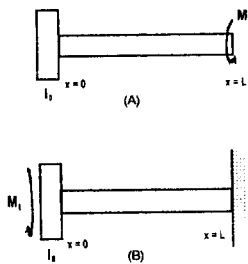


Fig. 2 Schematic diagram of free-free (A) and free-fixed (B) shafts.

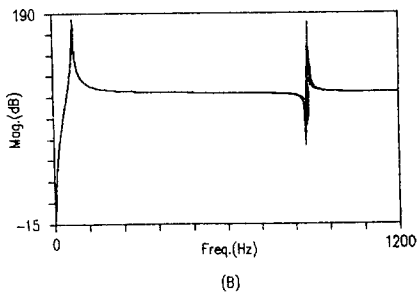
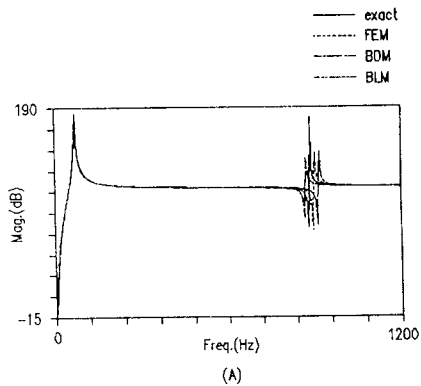


Fig. 4 Simulation results of a free-fixed shaft

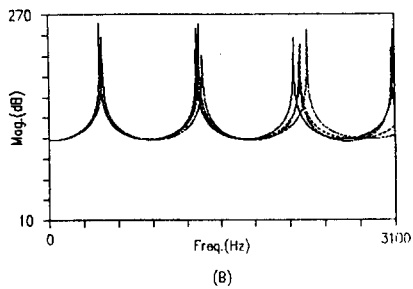
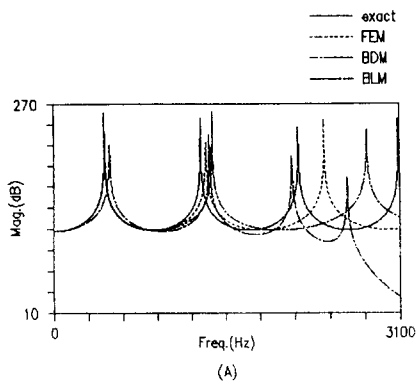


Fig. 3 Simulation results of a free-free shaft

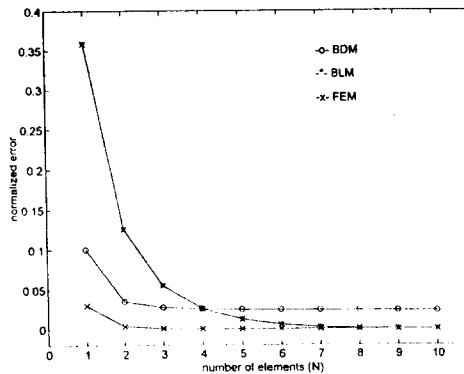


Fig. 5 Normalized errors according to number of elements.