

최적화기법을 이용한 모드매개변수 추정방법의 개발

이진명*, 오주영**

(Development of a Modal Parameter Estimation Method Using
Optimization Techniques)

(Gun-Myung Lee, Young-Ho Ju)

1. 서론

실험적 모드해석법(experimental modal analysis) 또는 모드시험법(modal testing)은 선형, 시불변 시스템의 모드매개변수(고유진동수, 감쇠비, 모드형)를 실험적으로 구하는 방법이다. 이 방법은 데이터추정과 모드매개변수 추정의 두 단계로 이루어진다. 우선 양질의 데이터를 측정하는 것이 필수적이고, 이들 데이터로부터 모드매개변수를 추정하는 것은 모드시험법의 마지막 목표이다. 모드매개변수의 추정을 위하여 여러가지 방법이 개발되었는데 이들 방법은 각각 독특한 가진신호와 응답신호를 요구한다. 또 이들 방법은 각각 장단점을 가지고 있으므로 사용할 방법을 선택할 때에는 요구조건, 제약조건, 대상시스템의 특성등을 고려하여야 한다⁽¹⁾.

실험데이터로부터 모드매개변수를 추출하는 방법은 주파수영역법과 시간영역법으로 크게 나눌 수 있다. 시간영역법에는 Ibrahim time domain (ITD)방법, polyreference time domain 방법, complex exponential 방법, least squares complex exponential 방법등이 있고, 주파수영역법에는 peak picking 방법, circle fitting, polyreference frequency domain 방법, rational fraction polynomial 방법 등이 있다. 이 이외에도 여러가지 방법이 개발되어 활용되고 있다^(1, 2).

한편 주어진 조건을 만족하며 목적함수를 최소 또는 최대가 되게 하는 변수를 찾는 최적화기법은 최적설계, 최적제어등 공학분야뿐만아니라 경제학, 사회학등의 분야에서도 응용이 되고 있다^(3, 4). 본 논문에서는 이와 같은 최적화기법을 모드매개변수 추정에 적용하여 그 가능성여부, 정확성, 타 방법에 대한 장단점등의 특성을 파악하였다. 이때 사용한 데이터는 주어진 모드매개변수로 부터 합성한 주파수응답함수(FRF)와 실험을 통하여 측정된 FRF이다.

* 경상대학교 기계공학과

** 경상대학교 기계공학과 대학원

2. 최적화기법

최적화문제는 주어진 조건을 만족하며 변수 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 의 함수인 $F(\mathbf{x})$ (목적함수)를 최소화하는 문제이다. 최적화 알고리즘은 다음 식과 같이 반복적으로 변수의 값을 변화시키는 과정으로 이루어져 있다.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + s\mathbf{d}^{(k)}, \quad k=1,2,3,\dots,N \quad (1)$$

여기서 k 는 반복횟수, \mathbf{x} 는 변수들로 이루어진 벡터, \mathbf{d} 는 탐색방향벡터, 그리고 s 는 탐색방향으로의 이동거리를 나타내는 스칼라량이다. 식(1)을 적용하기 위해서는 다음 두 과정이 필요하다. 즉, 탐색방향 \mathbf{d} 과 탐색방향으로 목적함수를 최소화시킬 수 있는 s 를 결정하는 과정이다.

탐색방향을 정하는 방법에는 목적함수의 값이 가장 급격하게 변하는 방향을 택하는 steepest descent method와 과거에 구한 탐색방향에 관한 정보를 이용하는 공역구배법(conjugate gradient method)이 널리 사용되고 있다^(3, 4). 다음 절들에서는 steepest descent method와 공역구배법중의 하나인 Fletcher-Powell method⁽⁵⁾에 관하여 간략하게 소개하였다.

2.1 Steepest Descent Method

목적함수 $F(\mathbf{x})$ 가 주어졌을 때 steepest descent method를 이용하여 그 최소점(최대점)을 찾는 계산순서는 다음과 같다.

1) 초기값 $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ 를 정한다.

2) 탐색방향벡터 $\mathbf{d}^{(k)}$ 를 구한다.

$$\mathbf{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_n^{(k)})^T \quad (2)$$

$$d_i^{(k)} = - \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}$$

3) 1차원 탐색으로 $F(\mathbf{x}^{(k)} + s\mathbf{d}^{(k)})$ 을 최소로 하는 탐색 거리 s 를 구한다.

4) 다음의 탐색점 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 을 구한다.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + s\mathbf{d}^{(k)} \quad (3)$$

5) 탐색거리 s 와 탐색방향벡터의 크기 $|\mathbf{d}^{(k)}|$ 가 주어진 한계치보다 작으면 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 을 최소점으로 하고, 그렇지 않으면 단계 2), 3), 4)를 반복한다.

이 방법을 사용하면 k 점에서의 방향벡터 $\mathbf{d}^{(k)}$ 와 $k+1$ 점에서의 방향벡터 $\mathbf{d}^{(k+1)}$ 은 서로 직교하므로 원형에 가까운 등고선을 갖는 $F(\mathbf{x})$ 에서는 수렴속도가 빠르지만 긴 타원형의 등고선에서는 초기값에 따라 상당히 수렴속도가 느려진다⁴⁾.

2.2 Fletcher-Powell Method

steepest descent method는 탐색방향을 $\mathbf{x}^{(k)}$ 점에서의 구배만을 조사하여 결정하지만 1점이 아니라 많은 점(과거의 정보)을 이용하면 보다 확실한 최소점의 정보가 얻어질 수 있다. steepest descent method에서는 $\mathbf{d}^{(k+1)}$ 과 $\mathbf{d}^{(k)}$ 가 서로 직교하므로 탐색경로가 zigzag로 되어 비효율적인 결점이 있다. 그러나 정규 (positive-definite)의 대칭행렬 H 를 이용하여 $\mathbf{d}^{(k+1)}$ 을 $H\mathbf{d}^{(k)}$ 와 서로 직교하도록 정하면 보다 수렴속도가 빨라지게 된다. 이러한 방법을 공역구배법이라 한다. 여기에는 여러 가지 방법이 있으나 본 논문에서는 Fletcher-Powell방법을 이용하였다.

이 방법의 계산순서는 다음과 같다.

1) 초기값 $\mathbf{x}^{(0)}$ 와 초기 정규대칭행렬 $H^{(0)}$ 를 정한다. $H^{(0)}$ 는 단위행렬로 둔다.

2) 탐색방향 벡터 $\mathbf{d}^{(k)}$ 를 정한다.

$$\mathbf{d}^k = -H^{(k)} \mathbf{g}^{(k)} \quad (4)$$

여기서

$$\mathbf{g}^{(k)} = \text{grad } F(\mathbf{x}^{(k)})$$

3) 1차원 탐색으로 $F(\mathbf{x}^{(k)} + s\mathbf{d}^{(k)})$ 을 최소로 하는 탐색 거리 s 를 구한다.

4) 다음의 탐색점 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 을 구한다.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + s\mathbf{d}^{(k)}$$

5) 다음 점의 정규대칭행렬 $H^{(k+1)}$ 를 구한다.

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + A^{(k)} + B^{(k)}$$

여기서

$$A^{(k)} = \frac{s^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)T}}{\Delta \mathbf{g}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}}$$

$$B^{(k)} = -\frac{H^{(k)} \Delta \mathbf{g}^{(k)} \Delta \mathbf{g}^{(k)T} H^{(k)}}{\Delta \mathbf{g}^{(k)T} H^{(k)} \Delta \mathbf{g}^{(k)}}$$

으로 주어진다.

6) $|\mathbf{g}^{(k+1)}|$ 와 $|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}|$ 가 주어진 한계치보다 작으면 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 을 최소점으로 하고, 그렇지 않으면 단계 2), 3), 4), 5)를 반복한다.

3. 최적화기법의 적용

3.1 목적함수

구조물의 k 점에 작용하는 힘과 j 점에서의 변위사이의 주파수응답함수(Frequency Response Function)는 다음과 같이 나타낼 수 있다¹⁾.

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta_r \cdot \omega_r \cdot \omega} \quad (5)$$

이때 ω_r 과 ζ_r 은 각각 모드 r 의 고유진동수와 감쇠비, rA_{jk} 는 H_{jk} 의 r 번째 모드의 모드상수를 나타낸다.

측정한 FRF인 $\overline{H}_{jk}(\omega)$ 로 부터 모드매개변수를 추출하기 위하여 윗식으로 나타난 $H_{jk}(\omega)$ 와 $\overline{H}_{jk}(\omega)$ 의 차가 최소가 되도록 하여야 한다. 따라서 이 과정은 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 변수를 찾는 최적화문제로 나타낼 수 있다.

$$F(\omega_r, \zeta_r, rA_{jk}) = \sum_{\omega} \left| \overline{H}_{jk}(\omega) - \sum_{r=1}^N \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\zeta_r \cdot \omega_r \cdot \omega} \right|^2 \quad (6)$$

3.2 1자유도계

1자유도계의 시뮬레이션 데이터에 본 논문에서 제안된 모드매개변수 추출방법을 적용하였다. 사용된 데이터는 힘과 변위사이의 주파수 응답함수로서 0 Hz 부터 60 Hz 까지 0.15 Hz 간격의 400개의 데이터로 이루어져 있다.

식(6)의 목적함수를 최소화하기 위하여 steepest descent method와 Fletcher-Powell method를 사용하였다. 계의 감쇠비를 변화시켜가며 각 경우에 2 세트의 초기값을 사용하여 매개변수를 추정된 결과를 Table 1에 나타내었다. steepest descent method에서는 탐색초기점이 목적함수의 최소점과 멀리 떨어져 있을 경우와 계의 감쇠비가 작을 경우에는 추정된 매개변수의 정확도가 낮음을 알 수 있다. 계의 감쇠비가 작은 경우 정확한 매개변수를 추정하지 못하는 이유는 Fig. 1에서 보이는 바와 같이 목적함수가 좁고 긴 계곡형태를 이루므로 수렴속도가 느려지기 때문이다⁴⁾. 반면 Fletcher-Powell method는 항상 정확한 매개변수를 추정하고 있다. 따라서 앞으로는 Fletcher-Powell method를 사용하여 매개변수를 추정하기로 하겠다.

Table 1. Comparison of the two optimization methods when applied to modal parameter estimation.

exact parameters	method initial value	estimated parameters					
		steepest descent			Fletcher-Powell		
		modal constant	freq. (Hz)	damping	modal constant	freq. (Hz)	damping
0.5 30.0 0.1	2.0 31.0 0.5	0.5481	30.9993	0.1144	0.5000	30.0000	0.1000
	10.0 35.0 1.0	1.3918	35.1000	39.5171	0.5000	30.0000	0.1000
0.5 30.0 0.01	2.0 31.0 0.5	0.6785	30.6966	0.0387	0.5000	30.0000	0.0100
	10.0 35.0 1.0	1.3024	35.1015	37.7786	0.5000	30.0000	0.0100
0.5 30.0 0.001	2.0 31.0 0.5	1.2230	30.9634	0.0592	0.5000	30.0000	0.0010
	10.0 35.0 1.0	2.0263	35.0946	32.0390	0.5000	30.0000	0.0010

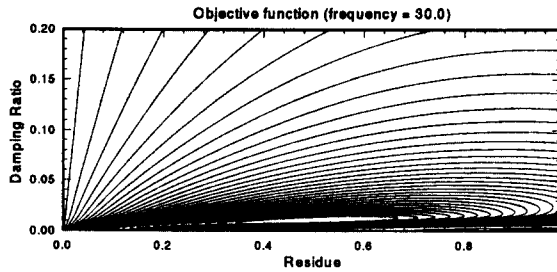


Fig. 1. Objective function of the single degree of freedom system when its damping ratio is small.

최적화 기법을 이용할 때 목적함수의 국부적 최소점 (local minimum)에 도달하는 경우가 있다. 이 경우에는 Fig. 2에서 보이는 것처럼 측정된 FRF와 추정된 모드매개변수로 부터 합성한 FRF가 많은 차이를 보이므로 국부적 최소점인지의 여부를 쉽게 판별할 수 있다. 국부적 최소점에 도달하였을 경우에는 초기점을 변화시키고 최적화 과정을 반복함으로써 최소점을 찾을 수 있다.

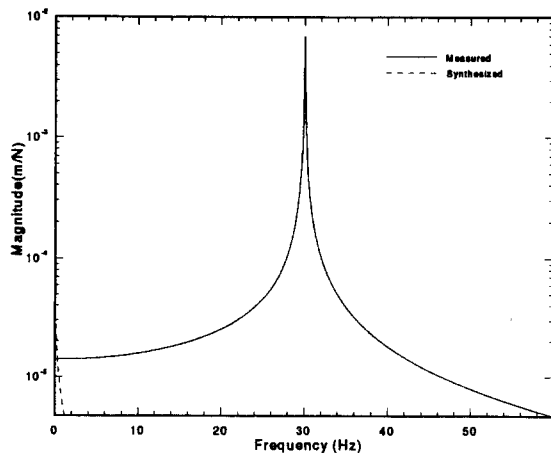


Fig. 2. Comparison of the measured and synthesized FRFs at a local minimum point.

3.3 2자유도계

본 모드매개변수 추정방법을 2자유도계에 적용하기 위하여 두 모드가 충분히 떨어져 있는 경우와 서로 인접한 경우를 다루었다. 두 모드의 모드상수가 각각 0.1, 0.2, 고유진동수가 20 Hz, 120 Hz, 감쇠비가 0.1 %, 5 %인 경우 Table 2 에 보인 것처럼 Fletcher-Powell method를 사용하여 정확한 모드매개변수를 추정하였다. 기존의 모드매개변수 추정방법 중의 하나인 complex exponential method⁽⁶⁾를 사용한 결과를 Table 2에 함께 나타내었다. complex exponential method를 사용하였을 때에도 비교적 정확한 모드매개변수가 추정되었으나 이 때 사용된 모드수가 5이므로 실제모드뿐만 아니라 가모드(computational mode)도 추정되고, 이를 분리하는 작업이 필요하다.

두 모드의 고유진동수가 각각 20 Hz, 20.5 Hz로서 두 모드가 밀집해 있는 경우를 고찰하였다. Table 3에 보인 것처럼 Fletcher-Powell method는 두 모드 매개변수의 초기치로 부터 매개변수를 정확하게 추정하였다. 반면 complex exponential method는 FRF데이터의 주파수간격이 0.16 Hz일 경우 모드수 12를 사용하였을 때 두 모드를 분리할 수 있었다. 주파수간격을 0.08 Hz로 줄였을 경우에도 두 모드의 매개변수를 정확하게 추정하기 위하여 모드수 12가 필요하였다. Fig. 3은 두 모드가 밀집해 있는 시스템의 FRF를 보이고 있다. 이상의 고찰로부터 본 논문에서 제안된 모드매개변수 추정법이 밀집한 모드를 분해하는 능력이 우수함을 알 수 있다.

Table 2. Comparison of the two modal parameter estimation methods when modes are well separated.

method resolution	parameters	Fletcher Powell	complex exponential
0.4 Hz	modal constant	0.1000 0.2000	0.1000 0.1999
	frequency (Hz)	20.000 120.000	20.000 119.871
	damping (%)	0.1000 5.0000	0.1001 5.1465
0.8 Hz	modal constant	0.1000 0.2000	0.1000 0.1959
	frequency (Hz)	20.000 120.000	20.000 119.997
	damping (%)	0.1000 5.0000	0.1000 4.9498

Table 3. Comparison of the two modal parameter estimation methods when modes are well separated.

method resolution	parameters	Fletcher Powell		complex exponential	
0.08 Hz	modal constant	0.1000	0.2000	0.1000	0.1994
	frequency (Hz)	20.000	20.500	20.000	20.501
	damping (%)	0.1000	5.0000	0.1000	4.9805
0.16 Hz	modal constant	0.1000	0.2000	0.1013	0.1966
	frequency (Hz)	20.000	20.500	20.000	20.494
	damping (%)	0.1000	5.0000	0.1012	5.0198

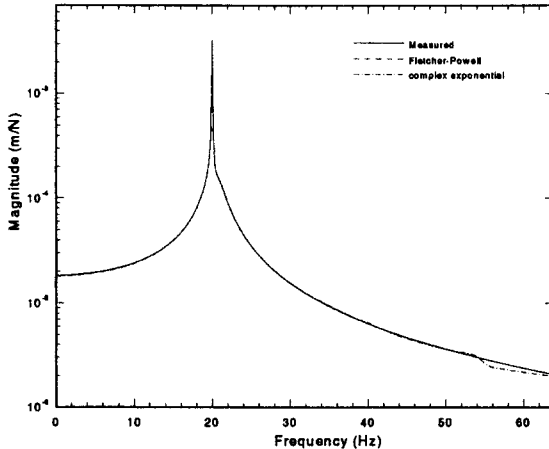


Fig. 3. Measured and synthesized FRFs for the system with two closely spaced modes.

3.4 외팔보

본 연구에 사용된 매개변수 추정법을 평가하기 위하여 간단한 외팔보를 택하여 실험을 수행하였다. 가진 신호로는 정현파를 사용하였고, 시험주파수는 10~220 Hz, 주파수간격은 1 Hz이다. 가진력은 압전형 force transducer로써 측정하고, 응답은 가속계를 사용하여 측정하였다. 가진력신호와 응답신호를 신호분석기 (Tektronix 11403)에 연결하여 두 신호의 진폭비와 위상차를 측정함으로써 주파수응답함수를 측정하였다. 위와 같은 방법으로 측정된 외팔보의 inertance(가속도/힘)를 receptance(변위/힘)로 환산하고, 이로부터 Fletcher-Powell method를 사용하여 추정된 모드매개변수를 Table 4에 나타내었다. 추정된 모드매개변수로부터 합성한 FRF와 측정된 FRF를 Fig. 4에서 비교하였다. 이 그림으로부터 최적화기법을 이용한 모드매개변수 추정방법이 실험데이터에 대하여도 만족할 만한 결과를 주는 것을 알 수 있다.

Table 4. Estimated modal parameters from experimental results.

Mode	initial parameters			estimated parameters		
	frequency (Hz)	damping (%)	modal constant	frequency (Hz)	damping (%)	modal constant
1	35.0	100.0	10.0	32.1405	1.0256	4.0063
2	120.0	100.0	1.0	123.9697	0.6374	1.4748

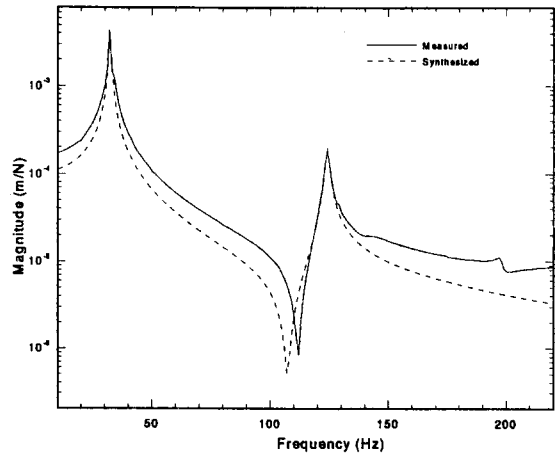


Fig. 4. Comparison of the measured and synthesized FRFs of the cantilever beam.

4. 결론

본 논문에서는 최적화기법을 이용하여 모드매개변수를 추정하는 방법을 개발하였다. 최적화기법중 steepest descent method와 Fletcher-Powell method를 1자유도계의 시뮬레이션 데이터에 사용하여 Fletcher-Powell method가 초기값이나 계의 감쇠비에 관계없이 항상 정확한 모드매개변수를 추정함을 밝혀 내었다. 2자유도계의 시뮬레이션 데이터에 적용하였을 때도 본 방법은 정확한 모드매개변수를 추정하였다. 본 방법은 기존의 모드해석방법처럼 실제모드수보다 많은 모드수를 가정할 필요가 없고, 밀집한 모드를 분리하는 능력도 우수하였다. 본 방법을 실험 데이터에 적용하였을 때에도 만족할 만한 결과를 나타내었다.

참고문헌

1. Ewins D. J., 1984, Modal Testing: Theory and Practice, J. Wiley, London.
2. Allemang R. J., 1993, "Trends in Modal Identification," Korea-U.S. Vibration Engineering Seminar, pp.1-26.
3. Arora J. S., 1989, Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, Inc.
4. AMC PAMPHLET, 1973, ENGINEERING DESIGN HANDBOOK
5. James L. Kuester and Joe H. Mize, 1973, Optimization technique with Fortran, McGraw-Hill, Inc.
6. 이진명, 1992, "PC용 모드해석프로그램의 개발," 경성대학교 생산기술연구소 논문집, 제8집, pp.127-131.