

이동질량-탄성지지무한보의 연성진동해석  
(차륜·레일간의 접촉력 변동의 해석모델)

○柳 允善\* 隣道 佳明\* 須田 義大\*  
大野 進一\* 金 士洙\*\*

Coupled Vibration of Moving Mass-Elastically Supported Beam Considering the Contact Stiffness  
(An Analytical Model of the Contact Force Fluctuation between Wheel and Rail)

Yunseon RYU, Yoshiaki TERUMICHI, Yoshihiro SUDA,  
Shinichi OHNO and Sasoo KIM

Corrugation of railway track can be caused by the various dynamic behavior of traveling wheels and track. In this paper, the coupled vibrations of traveling wheel and railway track are analyzed as the cause of corrugations. To analyze the coupled vibrations, the track supported by the sleepers and the traveling wheel are identified to the elastically supported infinite beam and the spring-mass system which runs at constant speed. The Hertzian contact spring is considered between the infinite beam and spring-mass system. The dynamic responses of elastically supported infinite beam and spring-mass system are calculated. The cause and development of rail corrugation are discussed in the view point of contact force fluctuation affected by the elastic supports and the corrugated surface profile of the track. By the obtained results, the possibilities of resonance are checked between the excitation by the corrugated surface profile and the natural frequency of contact spring-moving mass system. It may be thought to a development of railway corrugation.

Key Words : Coupled Vibration, Hertzian Contact Spring, Corrugation

1. 머릿말

철도에 있어서 레일상에 발생하는 파상마모(波狀  
摩耗)는 일반적으로 레일의 표면에 파장 40-100mm,  
깊이 0.2mm 정도의 압흔이 규칙적으로 발생하는 현상  
으로, Corrugation 이라고도 불리운다. 이러한 파상  
마모는, 철도의 소음과 진동 문제를 일으킬 뿐만  
아니라, 보수 관리에 드는 비용의 증대도 초래한다  
는 관점으로부터도, 가능한한 회피해야할 문제로  
보여진다.

파상마모의 발생 및 성장기구에 대해서는 아직까  
지 명확히 밝혀지지 않았지만, 차륜과 레일 사이  
에 발생하는 진동에 의한 접촉력의 변동과 밀접한  
관계가 있을 것으로 알려져있다. 그러나, 차륜과  
레일로 구성되는 진동계는, 이동하는 집중질량계와  
연속체와의 연성진동인 점과(1), 차륜과 레일의 접  
촉부에 있어서는 마모에 의한 소성변형의 고려가  
필요한 점등 때문에, 해석하기에는 매우 복잡하다.

이러한 종류의 진동해석으로서, 須田(2)는 1985 년  
파상마모의 발생 및 성장에 관하여, 1 자유도계  
에서의 원통접촉에 대한 이론적인 검토와 실험을 한  
바 있다. 또, Grassie(3)등은 1980 년, 레일을 무한  
보로 가정하고, 그 위를 외력이 통과하는 경우에  
대해서 레일의 탄성지지에 의한 접촉력의 변동에  
대한 연구를 발표했다. Clark(4)등은 1992 년, 실측  
에 의해서 그 접촉력의 변동을 확인했고, Duffy(5)  
는 1992 년, 무한보 위를 정현가진력이 통과하는  
경우에 대해서 해석적인 연구를 발표했다.

본 연구는, 파상마모의 발생 및 성장기구를 규  
명하기위해서 기본적인 검토를 한다는 목적으로,  
Hertzian 접촉스프링을 고려한 레일과 차륜으로부터 모  
델화된 계에서 발생하는 상하방향의 연성진동문제를  
취급하고, 차륜과 레일의 접촉부에서 발생하는 접  
촉력의 변동에 대해서 해석한다.

레일상의 파상마모의 발생 및 성장과정에 대해서,  
그 기구를 규명하기 위해서는, 소성변형이나 차륜  
이 반복해서 레일을 통과하는 것등을 고려하지않으  
면 안된다고 생각하지만, 여기서는 차륜의 관성력  
과 레일의 표면형상에 주목하여, 여기에 기인하는  
접촉력의 변동에 대해서 검토한다.

\* 동경대학교 기계공학과

\*\* 부산대학교 조선해양공학과

## 2. 해석모델과 운동방정식

### 2. 1 해석모델

철로받침목에 지지되어있는 레일을 그림 1 과 같이, 탄성지지원 무한보로 모델링한다. 보는 일정단면으로, 자중에의한 영향을 무시하며, 굽힘강성 EI, 단면적 A, 단위길이당 질량  $\rho A$ , 점성감쇄 계수 C 로서, 일정한 간격으로 각각 강성 k의 탄성지지스프링에 의해 지지되어있다고 본다. 보의 무부하시의 상태에서부터 연직하방향의 처짐을  $u(x, t)$ 로한다. 여기서, x는 보의 축방향좌표, t는 시간이다. 그림 1에서, 이동질량은 일정속도 V로 이동하며, m은 이동질량의 질량,  $k_c$ 는 보와 이동질량 사이에 고려하는 선형 Hertzian 접촉스프링계수,  $y(t)$ 는 이동질량의 변위를 나타내고 있다. 또,  $k_c$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_c = \left(\frac{2}{\eta}\right) (2E^{*2} R_e P_0)^{1/3}$$

여기서,  $E^{*2} = E / (1 - \nu^2)$ , E는 보의 종탄성계수,  $P_0$ 는 접촉부의 정적하중,  $R_e$ 는 접촉부의 유효곡률반경,  $\eta$ 는  $R_e$ 로서 결정되는 무차원 계수,  $\nu$ 는 Poisson 비이다.

### 2. 2 운동방정식

탄성지지의 무한보와 접촉스프링-이동질량계의 연성진동방정식을 무차원화하기 위해서, 시간의 대표값으로, 보의 유효길이(7)에 대한 보의 기본고유주기  $1/\omega_0$ , 길이의 대표값으로, 정적상태에서의 보의 최대처짐량  $\varphi_m$ 으로 정하여,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $u^* = u/\varphi_m$ ,  $y^* = y/\varphi_m$ 로되는 무차원량을 도입한다. 또, 파수  $\sqrt{2\lambda} = (k/EI)^{1/4}$ 를 이용하여,  $\xi = \lambda x$ 로되는 좌표계를 생각하면, 무한보와 이동질량계의 연성진동방정식은, 무차원형식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다. (이하, 무차원량을 표시하는 \*를 생략한다.)

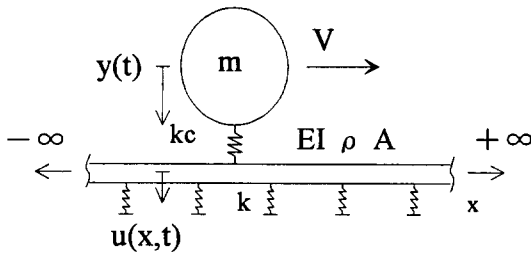


그림 1 해석 모델

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^4 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\beta \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} + K(\xi)u(\xi, \tau) = \delta(\xi - U\tau)p(\tau) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + \alpha^2 y(\tau) = \alpha^2 \{u(U\tau, \tau) + r(U\tau)\} \quad (2)$$

여기서, 식 (1) 과 식 (2) 속의 각 무차원파라미터는 다음과 같다.

$$\omega_c^2 = \frac{k_c}{m}, \alpha^2 = \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2$$

$$\beta = \frac{C}{\omega_0 k}, U = \frac{V}{\omega_0} \lambda, \mu = \frac{m}{\rho A}$$

단,

$$p(\tau) = \left\{1 - \mu \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2}\right\}$$

$$K(\xi) = \sum_{i=1}^n \delta(\xi - \xi_i)$$

$\varepsilon$  : 파상마모의 깊이

$l_e$  : 파상마모의 파장

$r(\xi) = \varepsilon(1 - \cos \frac{2\pi U \xi}{l_e})$  : 보의 표면형상

$\delta$  : Dirac Delta 함수

이다.

여기서,  $\zeta = \xi - U\tau$ 로되는 이동좌표계를 도입하여 식 (1) 과 식 (2)를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{4} \frac{d^4 u(\zeta)}{d\zeta^4} + U^2 \frac{d^2 u(\zeta)}{d\zeta^2} - 2\beta U \frac{du(\zeta)}{d\zeta} + K(\zeta)u(\zeta) = \delta(\zeta)p(\zeta) \quad (3)$$

$$U^2 \frac{d^2 y(\zeta)}{d\zeta^2} + \alpha^2 y(\zeta) = \alpha^2 \{u(0) + r(\zeta)\} \quad (4)$$

이 좌표변환에 의해서,  $\zeta$ 의 원점은 항상 이동질량의 위치로 정해진다. 식 (3) 과 식 (4)는 무한보의 조건

$$\zeta \rightarrow \pm\infty, u(\zeta) = u'(\zeta) = u''(\zeta) = u'''(\zeta) = 0$$

을 고려하여, Fourier 변환하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\left\{ \frac{1}{4} s^4 - U^2 s^2 - i2\beta U s + 1 \right\} W(s) = P(s) \quad (5)$$

$$P(s) = \left\{ 1 - \mu U^2 s^2 Y(s) \right\}$$

$$(-U^2s^2 + \alpha^2)Y(s) = \alpha^2\{W(0) + R(s)\} \quad (6)$$

여기서,  $W(s), P(s), Y(s), R(s)$ 는 각각  $u(\zeta), p(\tau), y(\tau), r(\tau)$ 의 Fourier 변환이다. Fourier 변환의 관계식으로부터 무한보와 접촉스프링-이동질량계의 변위는 각각 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(s)e^{i\zeta s} ds \quad (7)$$

$$y(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(s)e^{i\zeta s} ds \quad (8)$$

3장에서는 이동질량과 보의 연성진동에 관해서, 식 (1) 과 식 (2)로부터 유도된 식 (7) 과 식 (8)의 연립방정식의 해를 수치적으로 구해본다.

### 3. 이동질량과 무한보의 연성진동에 대한 접촉력의 변동

접촉스프링-이동질량계가 탄성지지된 무한보의 위를 주행할 때, 이동질량과 보와의 접촉력은, 파상마모의 발생, 성장에 크게 관여한다고 생각되어진다. 여기에서는, 우선, 보의 표면에 파상마모가 발생한 상태를 가정하고, 이동질량의 상하방향의 관성력에 대해서 언급한다. 다음으로, 이동질량의 변위와 보의 처짐으로부터 구해지는 접촉력의 변동에 대해서 검토한다. 또, 계의 응답은, 파상마모에 의한 강제변위의 진동수와 접촉강성에 의한 고유진동수, 탄성지지된 보의 고유진동수와의 관계에 크게 의존한다고 생각되지만, 여기서는, 우선, 종래에 검토가 충분치 못했던, 이동질량의 관성력의 영향에 대해서 언급하며, 그 계산의 일례를 보인다.

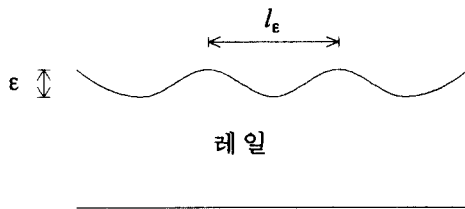


그림 2 파상마모의 형상

### 3. 1 파상마모가 질량의 관성력에 미치는 영향

파상마모를 그림 2처럼, 정현적인 표면형상으로 가정하고, 이러한 파상마모가 받침목의 두개분에 해당되는 철로의 길이에 발생되어 있다고 가정한다. 이러한 표면형상을 고려한 경우의 이동질량의 관성력의 과도응답을 그림 3에 보인다. 횡축은 표면형상을 고려한 지지스프링 두개분의 보의 길이를 통과하는 사이의 시간이다. 이때 주어진 파라미터의 값은  $\omega_c = 40, \alpha = 40, \beta = 0.08, \mu = 10, U = 0.12$ 이며, 이들은 실제의 열차와 레일의 예와 거의 일치한다.

그림중에서, 가장 높은 진동수는, 파상마모에 의한 강제변위의 진동수 성분으로 보여진다. 2주기정도만 보이는 낮은 진동수 성분은, 지지스프링을 통과하면서 생기는 외력이다. 또한, 이들의 중간정도의 진동수 성분이 그림중에서 5주기정도 확인될 수 있는데, 이는 이동질량과 접촉강성으로부터 된 계의 고유진동수이다. 이 결과에 의하면, 이동질량의 관성력의 진동수 성분은, 파상마모를 통과하는 경우에 받게되는 강제변위의 진동수 성분이 지배적이지만, 강제변위의 진동수가 접촉강성에 의한 고유진동수에 비해서 4배정도 높은 것을 고려하면, 고유진동수 성분도 무시해서는 안될 것으로 보여진다.

### 3. 2 파상마모를 고려한 경우의 접촉력의 변동

그림 4는, 그림 3에서 보인 경우의 이동질량의 변위  $y(\tau)$ , 보의 처짐  $u(\xi, \tau)$ , 및 접촉력  $F(\tau)$ 의 변동을 보인 것이다. 횡축에 표시된 눈금은, 탄성지지된 위치, 즉, 받침목의 위치에 대응하는 점이다. 여기서, 접촉력  $F(\tau)$ 는,  $F(\tau) = \alpha^2\{u(U\tau, \tau) - y(\tau)\}$ 로 나타내어진다. 즉, 질

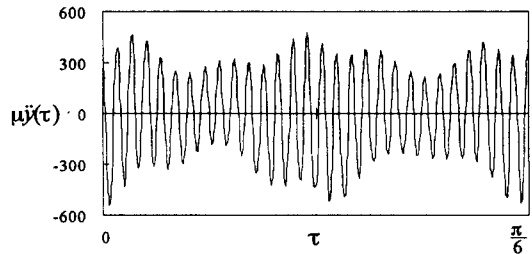


그림 3 파상마모의 형상을 고려한 경우의 이동질량의 관성력의 변동 ( $U=0.12, l_e=0.2$ )

량의 변위와 보의 처짐으로부터 정해지는, 접촉 스프링의 복원력으로서 표시될 수 있다. 그림 4에 보인 질량의 변위  $y(\tau)$ 는, 접촉강성에 의한 고유진동과 파상마모에 의한 강제진동의 영향이 진동수, 진폭 모두에 같은 정도로 포함되어있다. 한편, 보의 처짐  $u(\xi, \tau)$ 에서는, 이들의 진동수 성분은 무시될 수 있으며, 지지부의 스프링으로부터 받게되는 반력에 의한 받침목통과주파수만 확인되었다.

이들로부터 구해진 접촉력  $F(\tau)$ 에서는, 진동수와 진폭은 접촉강성에 의한 이동질량의 고유진동

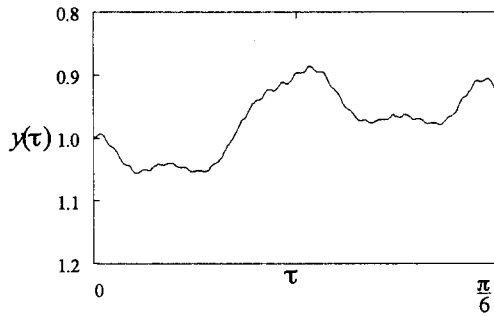


그림 4. 1 이동질량의 진동

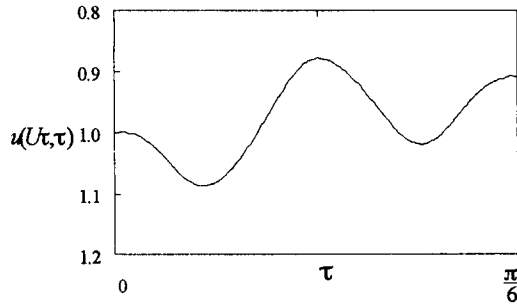


그림 4. 2 보의 진동

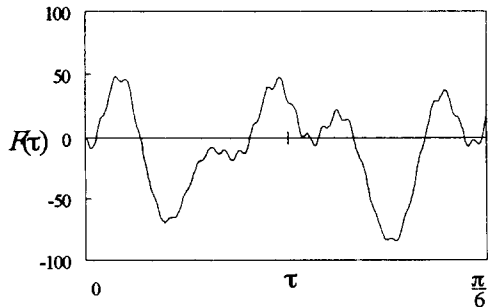


그림 4. 3 접촉력의 변동

그림 4 파상마모를 고려한 경우의 접촉스프링-이동질량과 보의 진동과 접촉력의 변동 ( $U=0.12, l_e=0.2$ )

성분이 주로 지배적이 되지만, 한편, 파상마모에 의한 강제진동에 대해서도 고려해야 할 필요성이 확인되었다. 파상마모에 주목하면, 접촉력의 진동수와 크기가 파상마모의 성장에 대해서 큰 요인으로 생각되기 때문에, 이동질량의 상하방향의 관성력을 엄밀히 파악해야 할 필요성이 지적된다.

#### 4. 맺음말

철도에서 발생하는 파상마모의 언급을 위해서는, 보다 엄밀히 접촉력을 구하기 위한 계의 모델화가 필요하다고 생각된다. 또, 이를 위해서, 보위의 파상마모 및 이동질량의 관성력을 고려하여, 접촉스프링-이동질량계와 탄성지지된 무한보와의 연성진동 문제를 해석하였다.

해석의 결과에 의하면, 이동질량의 고유진동과 파상마모에 의한 강제진동과는, 접촉력 변동의 진동수 및 진폭에 대해서 같은 정도의 영향을 끼친다. 즉, 파상마모의 발생, 성장의 기구에 관한 관점에서 보면, 이동질량의 상하방향 관성력을 고려한 계의 해석이 필요하다고 보여진다. 향후는, 이동질량이 반복해서 통과하는 경우나, 소성변형을 고려함으로써, 파상마모의 성장에 관한 언급을 전개할 예정이다.

#### 参考文献

1. 吉村彰芳, 他 1 名, 移動荷重による軌道の振動の解析, 鉄道総研報告書, 8-9,(1994),31.
2. 須田義大, 他 2 名, コルゲーションの成長・減衰機構の研究, 日本機械学会論文集 54-499, C(1985),544.
3. S.L. Grassie, R.W. Gregory, D. Harrison, K.L. Johnson, The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation, Journal of Mechanical Engineering Science, vol.24 No.2, (1982),77.
4. R.A. Clark, P.A. Dean, J.A. Elkins, S.G. Newton, An Investigation into the Dynamic Effects of Railway Vehicles Running on Corrugated Rails, Journal of Mechanical Engineering Science, vol.24 No.2, (1982),65.
5. Dean G. Duffy, The Response of an Infinite railroad Track to a Moving, Vibrating Mass, Transaction of American Society of Mechanical Engineering, vol.57, (1990),66.
6. R.J. Roark, W.C. Young, Formulas for Stress and Strain, 5th Ed., McGraw-Hill,(1975),517.
7. L. Fryba, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noordhoff,(1975),206.