

# 지지부에 비틀림 하중을 받는 얇은 빔의 혼돈역학에 관한 실험적 연구

°권 태 호\*, 주 재 만\*, 박 철 회\*\*

An Experimental Study on Chaotic Vibrations of a Thin Beam under Torsional Excitation

°Tae-Ho Kwon\*, Jae-Man Joo\*, Chol-Hui Pak\*\*

## 1. 서론

빔의 정적, 동적 특성에 관한 연구는 이론적으로나 실험적으로 폭 넓게 진행되어져 왔으며 많은 성과가 있었다. 그러나 비선형 성분을 고려하여 해석한 경우는 상대적으로 그 수가 적다.

Haight and King[1]은 횡방향 조화가진을 받는 얇은 막대에 대해서 Plane Response Curve에서 불안정 영역을 규명하였으며 Crespo da Silva는 가진 주파수의 어떤 대역에서 안정한 평면운동이 없거나 또는 비평면 응답이 존재함을 찾아냈으며[2] 내부공진 및 조화공진에 대해 연구하였다[3,4]. Pai and Nayfeh[5]는 횡방향 지지부 가진을 받는 외팔보에서 1대1 내부공진과 1차 공진에 대해 비평면 운동이 발생하고 나아가 혼돈운동이 발생함을 규명하였다. 또한 Shaw[6]는 축방향으로 회전하는 빔의 안정성에 관하여 연구하였으나 비틀림 관성을 고려하지 않았다. Cusumano[7]는 얇은 빔(Elastica)이 지지부에 횡방향 하중을 받는 경우 비틀림 운동 및 혼돈운동이 발생함을 실험적으로 규명하였다. 이에 대해 조화균형법(HBM) 등을 이용한 이론적인 해석이 Cusumano의 실험결과와 일치함을 확인할 수 있었다.[8,9]

본 논문에서는 실험적 연구를 통해 Elastica의 지지

부에 비틀림 하중이 작용되는 경우 굽힘운동과 비틀림 운동이 모두 존재하며 하나의 가진 주파수에 대해서 가진력을 증가시켰을 때 가진력의 어떤 범위 이상에서는 두 운동 모두 혼돈 운동으로 발전함을 보였다.

## 2. 실험 장치

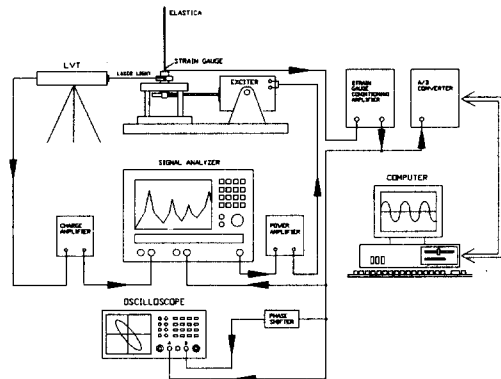


그림 1. 실험 장치

Elastica의 운동을 분석하기 위한 실험 장치는 그림 1과 같다. 주파수분석기(Signal Analyzer)와 가진기에 의해서 주파수, 진폭 일정의 가진을 Elastica에 가할 수 있다. 지지부의 회전량을 레이저 속도측정기(LVT)에 의해서 측정할 수 있고 이를 통해서 가진력으로 환산한다. 또 충격(impulse) 가진이나 랜덤(random) 가진에 의해서 Elastica의 고유진동수를 측정한다. 가진 시

\* 인하대학교 대학원 기계공학과  
\*\* 인하대학교 기계공학과, 정회원

에 스트레인 게이지(strain gauge)에 의해서 발생하는 신호는 앰프(Conditioning Amplifier)를 거쳐 주파수 분석기에서 확인할 수 있고, 또 A/D 변환기(Converter)를 통해 디지털(Digital) 신호로 바꾼 다음 컴퓨터로 받아들여 굽힘(bending) 신호와 비틀림(torsion) 신호로 분리한다. 이를 가지고 시간 파형(time trace), 주파수 분석(FFT), 포앙카레 사상도(Poincaré Map) 등을 구성한다. 앰프(Conditioning Amplifier)에서 나온 신호를 위상지연기(phase shifter)를 통과시켜 원 신호와 함께 오실로스코프(Oscilloscope)로 위상도(phase Diagram)를 구성한다.

### 3. 지지 장치 및 Elastica의 제원

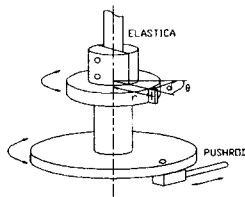


그림 2. 지지 장치

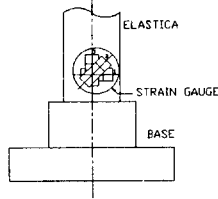


그림3. Strain Gauge의 부착 모습

지지부에 비틀림 하중을 받는 Elastica의 거동을 고찰하기 위한 지지 장치는 그림 2 와 같다. 회전 원판과 pushrod는 pin joint 가 되도록 하여 가진기의 직선 변위가 지지부 회전 원판의 회전각 변위로 변환되도록 하였다. 가진기가 횡방향으로 가진 됨에 따라 원판은 비틀림 운동을 하게 되며 이에 따라 Elastica는 지지부에 비틀림 하중을 받게 된다. 실제로 지지부가 회전하는 각도는 레이저 속도측정기(LVT)로 그림 2의 d를 측정하고  $\theta = \tan^{-1}(d/r)$ 에 의해서 계산할 수 있다. ( $r = 20.45 \text{ mm}$ ), 또 변위로부터 가해진 힘을 환산하기 위해  $F = (2\pi Q)^2 U$  를 사용하였다. U 는 레이저 속도 측정기(LVT)로 부터 얻은 변위량이며 전압 단위이다. 그림 4는 Elastica의 지지 장치와 가진기와의 연결 모습이다.

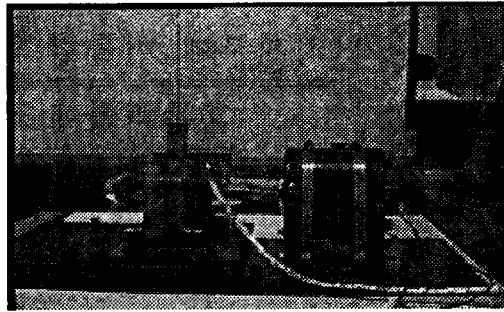


그림 4. 지지 장치와 가진기의 연결 모습

Elastica는 재질이 강철이며 그 기계적 성질 및 제원은 표 1과 같다. 굽힘 및 비틀림 방향 변위를 측정하기 위하여 KYOWA사의 rectangular rosette 형의 스트레인 게이지를 Elastica의 고정부에 가까운 부위에 그림 3과 같이 부착하였다.

표 1. Elastica의 기계적 성질 및 제원

영 렬, E (Pa)	$1.84 \times 10^{11}$
포아송비, $\nu$	0.333
밀 도, $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	8010
길 이, L (mm)	286
폭 , w (mm)	12.7
두 께, t (mm)	0.187
질 량, m (kg)	0.0054

### 4. Elastica의 비평면(Out-of-Plane) 운동

Elastica의 비평면(Out-of-Plane) 운동은 굽힘(bending) 모드와 비틀림(torsion) 모드의 연성운동으로 나타난다. 그림 5와 같은 초기변위에서 Elastica는 그림 6과 같은 비평면 운동의 자유진동을 보인다. 이 때 그림 7의 시간파형에서 보는 바와 같이 Elastica의 운동은 한쪽으로 편향되어 나타나는 굽힘운동과 큰 비틀림운동이 서로 강하게 연계되어 나타난다..



그림 5. 초기변위상태

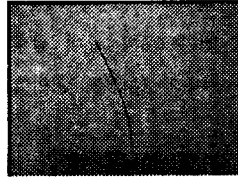


그림 6. nonlinear 모드

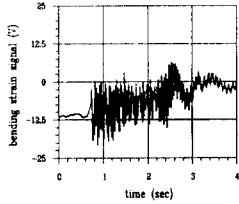
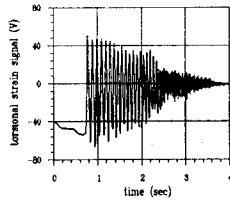


그림 7. Nonlinear 모드 시의 시간 파형



### 5. 수학적 모델링(Modeling)

Cusumano 가 모델링한 Elastica 에 대한 2자유도 운동 방정식에 지지부에 비틀림 하중을 받는 경우를 고려하여 system 을 다시 모델링 하여 보면[10] 이때의 운동 에너지와 위치에너지는 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m(\dot{q}_2^2 + (\dot{q}_2 + \dot{\theta}^*)^2 q_2^2) + \frac{J}{2} (\dot{q}_1 + \dot{\theta}^*)^2 \\
 V &= \frac{1}{2} (k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

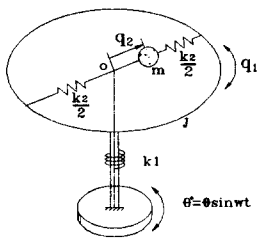


그림 8. 2자유도 모델링.

그림 8에서 m은 굽힘 관성, J는 회전 관성, q1은 비틀

림 변위, q2은 굽힘 변위, k1은 비틀림 스프링 상수, k2는 굽힘 스프링 상수를 각각 나타낸다.

위의 운동에너지와 위치에너지를 가지고 무차원화된 운동방정식을 구해 보면 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned}
 (1 + \mu y^2) \ddot{x} + 2\mu y \dot{y} \dot{x} + p^2 x + (1 + \mu y^2) \ddot{\theta} + 2\mu y \dot{y} \dot{\theta} &= 0 \\
 \ddot{y} + y - \mu (\dot{x} + \dot{\theta})^2 y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

where,  $\mu = \frac{m l^2}{J}$ ,  $l = \text{characteristic length}$   
 $x = \frac{q_1}{\sqrt{\mu}}$ ,  $y = \frac{q_2}{l}$ ,  $\theta = \frac{\theta^*}{\sqrt{\mu}}$ ,  $\tau = \Omega t$ ,  $p^2 = \frac{k_1/J}{k_2/l m}$

### 6. Elastica의 선형고유진동수

굽힘(bending) 방향의 고유진동수는 Euler Beam 이론에 근거하여 계산하고 비틀림(torsion) 방향의 고유진동수는 뒤틀림(warping) 현상을 보정해주는 비틀림 상수를 고려하여 계산할 수 있다. 식 (3)은 경계조건을 고려한 무차원 변수를 나타내고 식 (4)는 비틀림 방향의 고유진동수이다.

$\frac{t}{w}$	w/t	1	2	4	8	$\infty$
	c	0.281	0.286	0.299	0.312	1/3

비틀림 상수(Torsional Constant)  $C = \frac{c w^3 t^3}{w^2 + t^2}$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots
 \tag{3}$$

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi r} \left( \frac{CG}{\mu I_p} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots
 \tag{4}$$

또 실제 Elastica의 고유진동수는 레이저 속도측정기(LVT)를 이용하여 충격(impulse) 가진 시의 Autospectrum 을 구하면 얻을 수 있다. 표 2에서 보는 바와 같이 굽힘 1차 모드에서 비교적 큰 오차가 발생한다. 이것은 이론식은 중력에 의한 자체하중을 고려하지 않고 계산하였기 때문에 실제값 보다 더 높게 나타나기 때문이다. 그러나 굽힘 1차모드로 가진 시의 비평

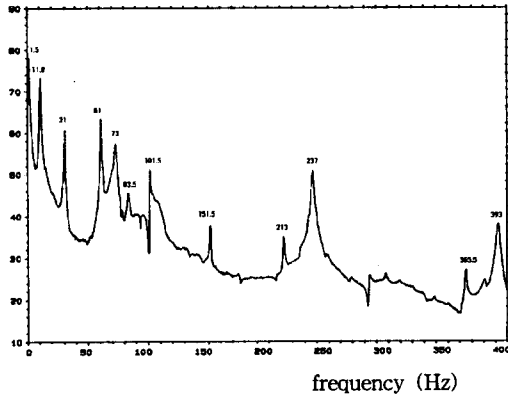


그림 9. Experimental system's frequency response

면운동의 관찰은 가진기의 용량상의 문제점 때문에 어려움이 있으므로 관심 영역에 두지 않기로 한다.

표 2. 선형고유진동수 비교

mode	이론(Hz)	실험(Hz)	오 차 (%)
f <sub>B1</sub>	1.77	1.5	15.25
f <sub>B2</sub>	11.09	11	0.81
f <sub>B3</sub>	31.06	31	0.19
f <sub>B4</sub>	60.86	61	0.23
f <sub>T1</sub>	72.6	73	0.55
f <sub>B5</sub>	100.6	101.5	0.89

f<sub>Bi</sub> : 굽힘(bending) 방향 고유진동수 (i = 1, 2, 3, ...)  
 f<sub>T</sub> : 비틀림(torsion) 방향 1차 고유진동수

## 7. 실험결과 및 검토

### (1) 시간 파형 (Time Trace)

가진 주파수가 31.5 Hz (굽힘 3차 고유진동수 근방) 일 때 가진력의 크기를 증가시키며 Elastica의 운동을 관찰하여 보면 가진력의 크기가 작을 때는 Elastica의 굽힘 운동이 그림 10의 (a)와 같이 굽힘 3차 모우드형의 비교적 주기적(periodic)인 운동을 한다. 가진력의 크기를 증가시키면 그림 10의 (b)와 같이 낮은 주파수의 새로운 굽힘 1차운동이 추가로 발생하게 된다. 즉 굽힘 3차모드와 굽힘 1차 모드가 동시에 나타나게 된

다. 가진력의 크기가 더욱 증가하면 Elastica의 운동은 그림 10의 (c)와 같이 굽힘 및 비틀림이 모두 복잡한 혼돈 운동의 양상을 갖게 된다.

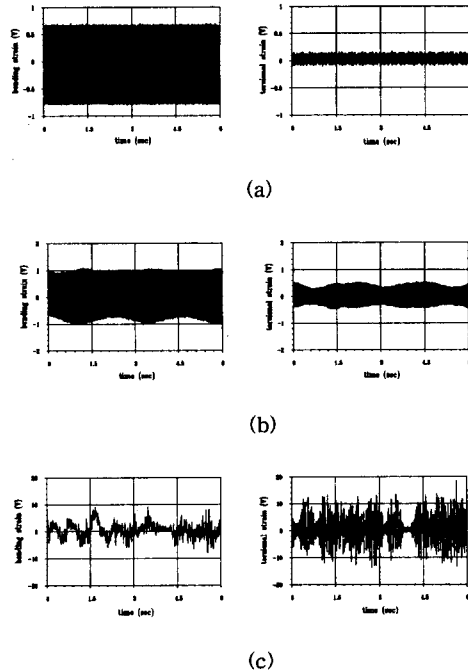


그림 10. 가진력을 증가시키며 본 굽힘 운동과 비틀림 운동의 시간 파형 (a)  $F = 12065(V/s^2)$  (b)  $F = 30241(V/s^2)$  (c)  $F = 32474(V/s^2)$

### (2) 주파수 분석 결과 (FFT)

가진력의 크기가 작을 때는 빔의 굽힘 응답 또한 그림 11의 (a)에서 보는 바와 같이 선형이론에서와 같이 가진주파수 성분과 동일한 평면 운동만이 존재한다.

그 크기를 점차 증가시키에 따라 앞의 시간 파형에서 보는 바와 같이 낮은 주파수의 운동이 발생하며 이것은 FFT상에서 0.63 Hz의 새로운 피크(peak)가 발생하고 또 가진주파수를 중심으로 0.63 Hz의 사이드 밴드(side band)로 나타나며 전체적인 양상이 유사주기운동(quasiperiodic motion)임을 알 수 있다. 그 크기를 더욱 증가시키면 빔은 큰 변위를 갖는 불규칙한 비평

면 운동을 하게 되며 이것은 무한개의 주기를 갖는 혼돈운동(chaotic motion)으로, 그림 11의 (c) 에서와 같이 에너지가 전 주파수 대역에 걸쳐서 분포하는 광대역 스펙트럼 (broad band spectrum)의 양상으로 나타나게 된다.

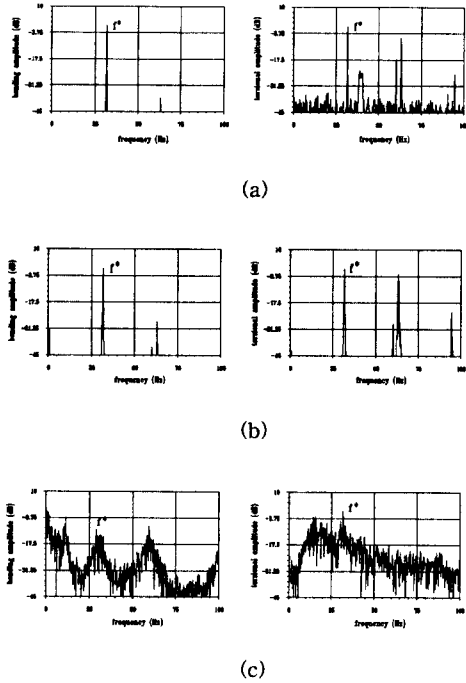


그림 11. 가진력을 증가시키며 본 굽힘 운동과 비틀림 운동의 주파수 분석도.  $f^*$ : 가진 주파수.  
 (a)  $F = 12065(V/s^2)$  (b)  $F = 30241(V/s^2)$   
 (c)  $F = 32474(V/s^2)$

### (3) 포앙카레 사상도 ( Poincaré Map )

포앙카레 사상도는 A/D 변환기를 이용하여 얻은 디지털(Digital) 신호의 시간 파형에서 피크(peak) 점만을 취하여  $n$  과  $n+1$  번째 점을 연속적으로 표시함으로써 얻는다. 즉 리턴 맵(return map) 으로 나타내었다. 초기에 굽힘 신호는 그림 12의 (a)에서 보는 바와 같이 비교적 주기적인 운동이 나타나고 있다.

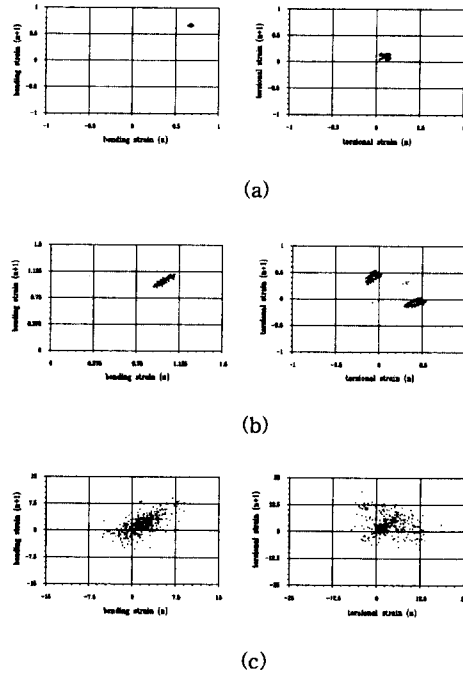


그림 12. 가진력을 증가시키며 본 굽힘 운동과 비틀림 운동의 포앙카레 사상도 (a)  $F = 12065(V/s^2)$  (b)  $F = 30241(V/s^2)$  (c)  $F = 32474(V/s^2)$

비틀림 신호는 굽힘 신호 보다는 복잡한 양상으로 나타나며 작은 변위의 다양한 변화를 포함하고 있음을 알 수 있다. 가진력이 점차 증가함에 따라 그림 12의 (b)에서 보는 바와 같이 굽힘 신호는 가진주파수와 같은 응답신호 외에 굽힘1차 모드가 포함된 운동으로 변화하며 이것은 포앙카레 사상도에서 하나의 점이 보다 넓은 또 다른 변화를 보이는 것으로 나타난다. 이것은 유사주기 운동(quasiperiodic motion)에서의 포앙카레 사상도와 동일하다. 비틀림 신호에서 이러한 변화는 더욱 뚜렷이 볼 수 있다. 가진력이 보다 더 증가된 경우 굽힘 운동과 비틀림 운동은 그림 12의 (c)에서 보는 바와 같이 포앙카레 사상도에서 넓은 영역에 걸쳐 골고루 분포하게 되는데 이것은 시간 파형에서의 피크(peak) 점들이 불규칙하게 분포하고 있음을 나타내며 혼돈운동으로 돌입했음을 말하고 있다. (c).

## 8. 결 론

지지부에 비틀림 하중을 받는 Elastica는 비틀림 운동을 하며, 그 가진 주파수가 굽힘모드 근처일 때는 해당하는 굽힘 모드의 운동까지도 동시에 존재하게 된다. 이때 가진력의 크기가 작을 때는 주기적인 운동이 된다. 가진력의 크기가 증가함에 따라 굽힘 운동은 굽힘 1차 모드와 연성된 유사주기운동이 발생하며, 어떤 범위 이상이 되면 굽힘 운동과 비틀림 운동이 결합된 진폭이 매우 크고 불규칙적인 비평면 운동(out of plane motion)이 발생하게 되며 이 때의 운동은 혼돈운동이다.

Elastica가 굽힘 3차 고유진동수 근방의 주파수로 비틀림 하중을 받을 때의 정확한 이론적 해석을 위해서는 굽힘 3차모드까지는 반영할 수 있는 식이 모델링되어야 할 것으로 보인다. 이것은 복잡한 비평면운동을 할 때 굽힘 3차 모드까지 관찰된다는 사실에 근거한다.

## 참고문헌

- (1) E. C. Haight and W. W. King, "Stability of Non-Linear Oscillations of an Elastic Rod" J. Acoustic. Soc. Am. 52, 1972, pp. 899-911
- (2) M. R. M. Crespo da Silva, "On the Whirling of a Based-Excited Cantilever Beam", J. Acoust. Soc. Am.67, 1980, pp. 704-707
- (3) M. R. M. Crespo da Silva and C. L. Zaretzky, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Interactions in Beams Including the Effect of Torsional Dynamics, I. Primary Resonance", Nonlinear Dynamics 5, 1994, pp. 3-23
- (4) M. R. M. Crespo da Silva and C. L. Zaretzky, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Interactions in Beams Including the Effect of Torsional Dynamics, II. Combination Resonance", Nonlinear Dynamics 5, 1994, pp. 161-180
- (5) Perngjin F. Pai and Ali H. Nayfeh, "Non-Linear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitations", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.25, No.5, 1990, pp. 455-474
- (6) S. W. Shaw, "Chaotic Dynamics of a Slender Beam Rotating About Its Longitudinal Axis", Journal of Sound and Vibration, 124(2), 1988, pp. 329-343
- (7) J. P. Cusumano and F. C. Moon, "Chaotic Non-Planar Vibrations of the Thin Elastica", Journal of Sound and Vibration, 179(2), 1995, pp. 185-208.
- (8) C. H. Pak, R. H. Rand, and F. C. Moon, "Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes", Nonlinear Dynamics 3, 1992, pp. 347-364.
- (9) 이영섭, "분기모우드를 활용한 얇은빔의 혼돈역학에 관한 연구", 1995, 인하대학교 석사학위논문.
- (10) 최 석, "비틀림 하중을 받는 얇은 막대의 비선형 거동에 관한 연구", 항공 우주 공학회 추계학술대회, 1995