

회전하는 두꺼운 외팔보의 모델링 및 진동특성 해석

(Modeling and Vibration Analysis of Rotating Thick Beams)

신상하 (한양대), 유홍희 (한양대)

Sang-Ha Shin (Hanyang University), Hong-Hee Yoo (Hanyang University)

1. 서론

회전하는 외팔보 형태의 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견될 수 있으며 각종 회전체시스템에 사용되는 블레이드들은 대표적인 예제이다. 구조물의 회전운동은 원심방향의 관성력을 발생시켜 시스템 강성변화를 가져오고 이는 고유진동특성의 변화로 연계된다. 따라서 이러한 구조요소를 가진 기계시스템의 적절한 설계를 위해서는 그 동적 특성을 정확하고 효율적으로 파악하는 일이 매우 중요하다.

회전운동을 하는 외팔보의 진동에 관한 연구는 1920년대 초부터 시작되었다. Southwell과 Gough는⁽¹⁾ Rayleigh의 에너지이론에 근거하여 회전 외팔보의 고유진동수를 계산하는 방정식을 최초로 제안하였다. 그 후 Schilhansl은 회전 외팔보의 굽힘진동방정식을 직접 유도하였으며 이를 이용하여 앞서 제시된 Southwell의 방정식을 보완하였다. 1970년대에 들어서서 전산기의 발전으로 수치해석법에 의한 결과들이 계속 발표되고 있으며 참고문헌 (3-5)는 대표적인 문헌들이다. 현재까지 발표되어 온 회전 외팔보 관련 문헌들을 살펴보면 대부분이 세장보에 흔히 적용되는 Euler의 가정에 근거하고 있다. 그러나 실제의 많은 구조물들은 세장비가 작은 값을 가지며 따라서 전단효과를 고려해야 동적 특성을 정확하게 예측할 수 있다. 전단효과를 고려한 Timoshenko의 가정에 근거한 회전 외팔보에 관한 연구결과는 참고문헌 (6-8)에서 찾아볼 수 있는데 이들 연구에서는 유한차분법이나 유한요소법에 근거한 연구가 제한적으로 이루어지고 있다. 이러한 기존 연구에서의 어려움은 Schilhansl 이후의 모든 모델링이 비선형 동적 운동방정식에 근거하고 있는데 따른 수식전개의 난해성에서 유래된다. 참고문헌 (9)에서 제시된 모델링은 기존의 그것과 달리 선형 운동방정식에 기초하고 있다. 따라서 이 모델링은 동일한 해석의 정확도를 보장하면서도 기존의 모델링들이 가지고 있는 수식전개의 난해성에서 벗어나 간결한 수식전개를 참고문헌 (10)에서 보여주었다.

본 논문에서는 참고문헌 (10)에 제시된 진동해석 모델링을 기초로 하여 (단면관성(Rotary Inertia)효과와 전단효과를 추가로 고려한 회전하는 외팔보의 진동해석 모델링을 Timoshenko의 가정에 근거해 제시하고 수치해석을 통해 Euler의 가정에 근거한 해석결과와의 차이를 정량적으로 분석하는 것을 연구의 목표로 한다.

2. 운동 방정식

2.1 모델링을 위한 가정

본 연구에서는 보는 균일하고 등방성이며 단면은 대칭으로 일정하며 따라서 탄성축과 단면의 도심은 일치한다는 가정과 보는 일정 평면내에서 회전운동을 하며 면내방향 굽힘변형만 일어난다는 가정을 사용하였다. 이러한 가정들은 보의 회전운동과 전단 및 단면관성효과에 의한 진동특성 변화에 연구의 초점을 맞추기 위해 기타 효과들이 생략된 운동방정식을 간명히 유도하기 위한 것이다.

2.2 운동 방정식의 유도

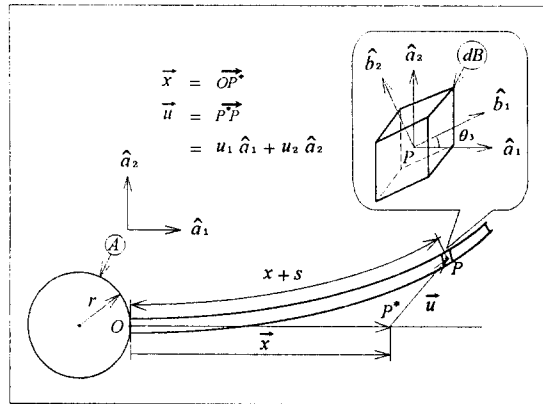


그림 1 강체 축에 고정된 회전 외팔보

그림 1은 반경 r 의 강체 축에 고정되어 회전운동을 하는 외팔보를 보여준다. 그림에는 축 A에 부착된 서로 수직인 단위벡터들이 나타나 있으며, x 는 보의 고정점 O로부터 변형전 탄성축상의 임의질점 P까지의 거리를, \vec{u} 는 그 질점에서의 탄성변위를, s 는 그 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 그림 1 중 확대된 그림은 질점 P를 도심으로 갖는 보의 미소부분을 나타내며 기준틀 A의 좌표계와 변형후 보의 미소부분 dB의 자세관계를 나타낸다.

모드방법을 이용해 상미분 운동방정식을 구하기 위해서 s, u_2, θ_3 는 다음과 같이 근사화된다.

$$s = \sum_{j=1}^N \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^N \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (2)$$

$$\theta_3 = \sum_{j=1}^N \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \quad (3)$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 인장과 굽힘 변위의 모드함수들을, $\phi_{3i}(x)$ 는 탄성축의 기울기의 모드함수, $q_{ai}(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들, 그리고 μ_a 는 그 수를 각각 나타낸다.

변형에 따른 보의 임의 미소부분 dB 의 각속도 $\vec{\omega}^{dB}$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\vec{\omega}^{dB} = \vec{\omega}^A + A \vec{\omega}^{dB} \quad (4)$$

$$= (\omega_3 + \dot{\theta}_3) \hat{a}_3$$

변형에 따른 보의 임의 질점 P 점의 속도 \vec{v}^P 는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + A \vec{v}^P + \vec{\omega}^A \times (\vec{x} + \vec{u}) \quad (5)$$

여기서 \vec{v}^O 는 O 점의 속도, $A \vec{v}^P$ 는 P 점의 강체 A 에 대한 상대속도, $\vec{\omega}^A$ 는 축 A 의 각속도, \vec{x} 는 O 점에서 P 점까지의 벡터, \vec{u} 는 P 점에서 P 점까지의 벡터를 나타내며 이들을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{v}^O = r\omega_3 \hat{a}_2 \quad (6)$$

$$A \vec{v}^P = \dot{u}_1 \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (7)$$

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \hat{a}_3 \quad (8)$$

$$\vec{x} = x \hat{a}_1 \quad (9)$$

$$\vec{u} = u_1 \hat{a}_1 + u_2 \hat{a}_2 \quad (10)$$

식 (6)과 (8)에서 ω_3 는 축 A 의 일정 회전속력을 의미한다.

미소 탄성체 dB 의 각속도 $\vec{\alpha}^{dB}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{\alpha}^{dB} = (\dot{\omega}_3 + \ddot{\theta}_3) \hat{a}_3 \quad (11)$$

P 점의 가속도 \vec{a}^P 는 속도 \vec{v}^P 를 이용한 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\vec{a}^P = \frac{A d \vec{v}^P}{dt} + \vec{\omega}^A \times \vec{v}^P \quad (12)$$

식 (12)의 우변의 첫째항의 A 는 그 기준틀에 대한 벡터의 미분을 의미한다.

u_1 은 s 와 u_2 로 나타낼 수 있으며 (참고문헌 (9) 참조) 이를 이용하여 \vec{v}^P 를 구한 후 \dot{q}_i 를 일반속력으로 하여 편속도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial q_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial q_{2i}} = \left(- \int_0^x \phi'_{2i} \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi'_{2j} q_{2j} d\sigma \right) \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^N \vec{v}^P}{\partial q_{3i}} = 0 \quad (15)$$

또, $\vec{\omega}^{dB}$ 의 \dot{q}_{ai} 에 대한 미분 값을 구하면 다음과 같이 편각속도가 구해지게 된다.

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial q_{1i}} = \frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial q_{2i}} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}^{dB}}{\partial q_{3i}} = \phi_{3i} \hat{a}_3 \quad (17)$$

이상에서 구한 식들을 이용하여 다음 식으로부터 단면 관성효과를 고려한 일반관성력을 구할 수 있다.

$$F_i^* = - \int_0^L \rho \vec{a}^P \cdot \vec{v}_i^P dx - \int_0^L \vec{\omega}_i^{dB} \cdot (\vec{\alpha}^{dB} \cdot \mathbf{I} + \vec{\omega}^{dB} \times \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}^{dB}) dx \quad (18)$$

여기서 L 은 보의 길이, ρdx 는 dB 의 질량, $\mathbf{I} dx$ 는 dB 의 관성 Dyadic, \vec{v}_i^P 와 $\vec{\omega}_i^{dB}$ 는 각각 i 번째 편속도와 편각속도를 나타낸다. 그런데 평면운동시 \mathbf{I} 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{I} = \rho \frac{I_3}{A} \hat{a}_3 \hat{a}_3 \quad (19)$$

여기서 I_3 는 \hat{a}_3 축에 대한 면적 모멘트, A 는 보의 단면적을 나타낸다.

외력이 작용하지 않을 때 일반작용력은 다음 식과 같다.

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (20)$$

여기서 U 는 보의 탄성에너지로 전단효과를 고려하면 다음 식과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_3 \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kGA \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \theta_3 \right)^2 dx \quad (21)$$

여기서 E 는 탄성 계수, G 는 전단 계수, k 는 보의 단면 형상 계수를 나타낸다. 이상의 결과를 이용하여 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\sum_{i=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1i} dx \ddot{q}_{1i} - 2\omega_3 \sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{2i} dx \dot{q}_{2i} - \omega_3^2 \sum_{i=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1i} dx q_{1i} - \dot{\omega}_3 \sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{2i} dx q_{2i} + \sum_{i=1}^{\mu_1} \int_0^L EA \phi'_{1i} \phi'_{1i} dx q_{1i} \quad (22)$$

$$= \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx + r\omega_3^2 \int_0^L \rho \phi_{1i} dx$$

$$\sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2i} dx \ddot{q}_{2i} + 2\omega_3 \sum_{i=1}^{\mu_1} \int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{1i} q_{1i} dx$$

$$+ \dot{\omega}_3 \sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{1i} dx q_{1i} - \omega_3^2 \sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2i} dx q_{2i}$$

$$+ \frac{1}{2} \omega_3^2 \sum_{i=1}^{\mu_2} \int_0^L \rho (L^2 - x^2) \phi'_{2i} \phi'_{2i} dx q_{2i} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
& + r\omega_3^2 \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L \rho (L-x) \phi'_{2i} \phi'_{2i} dx q_{2i} \\
& + \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L k GA \phi'_{2i} \phi'_{2i} dx q_{2i} - \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L k GA \phi'_{2i} \phi_{3i} dx q_{3i} \\
& = -r\omega_3 \int_0^L \rho \phi_{2i} dx - \omega_3 \int_0^L \rho x \phi_{2i} dx \\
& \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L \rho I_3 \phi_{3i} \phi_{3i} dx q_{3i} - \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L k GA \phi_{3i} \phi'_{2i} dx q_{2i} \\
& + \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L k GA \phi_{3i} \phi_{3i} dx q_{3i} + \sum_{i=1}^{\mu_3} \int_0^L EI_3 \phi'_{3i} \phi'_{3i} dx q_{3i} \\
& = -\omega_3 \int_0^L \rho I_3 \phi_{3i} dx \quad (24)
\end{aligned}$$

위 방정식들을 무차원화하여 일반적 해석결과를 얻기 위해 무차원 변수들을 다음과 같이 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (25)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (26)$$

$$y_i \equiv \frac{q_i}{L} \quad (27)$$

$$\delta \equiv \frac{r}{L} \quad (28)$$

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{AL^2}{I_3}} \quad (29)$$

$$\omega \equiv \omega_3 T \quad (30)$$

여기서,

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI_3}} \quad (31)$$

식 (25-31)을 이용하면 식 (22-24)는 다음과 같이 무차원화된 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned}
& M_{11} \ddot{y}_{1j} - 2\omega M_{12} \dot{y}_{2j} - \omega^2 M_{11} y_{1j} - \dot{\omega} M_{12} y_{2j} \\
& + \alpha^2 K_1^S y_{1j} = \omega^2 N_1 + \delta \omega^2 P_1 \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{22} \ddot{y}_{2j} + 2\omega M_{21} \dot{y}_{1j} + \dot{\omega} M_{21} y_{1j} - \omega^2 M_{22} y_{2j} \\
& + \delta \omega^2 K_{22}^G y_{2j} + \omega^2 K_{22}^G y_{2j} + \frac{kGa^2}{E} K_2^S y_{2j} \quad (33) \\
& - \frac{kGa^2}{E} K_{23}^S y_{3j} = -\dot{\omega} N_2 - \delta \dot{\omega} P_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{33} \ddot{y}_{3j} - \frac{kGa^4}{E} K_{32}^S y_{2j} + \frac{kGa^4}{E} M_{33} y_{3j} \quad (34) \\
& + \alpha^2 K_3^S y_{3j} = -\dot{\omega} P_3
\end{aligned}$$

여기서

$$M_{ab} = \int_0^1 \phi_{ai} \phi_{bj} d\xi$$

$$K_a^S = \int_0^1 \phi_{ai, \xi} \phi_{ai, \xi} d\xi$$

$$K_{ab}^S = \int_0^1 \phi_{ai, \xi} \phi_{bj} d\xi \quad (35)$$

$$K_{ab}^G = \int_0^1 (1-\xi) \phi_{ai, \xi} \phi_{bj, \xi} d\xi$$

$$K_{ab}^{G2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \phi_{ai, \xi} \phi_{bj, \xi} d\xi$$

$$P_a = \int_0^1 \phi_{ai} d\xi, \quad N_a = \int_0^1 \xi \phi_{ai} d\xi$$

여기서 서로 대응하는 x 와 ξ 에 대해 $\phi_{ai}(x)$ 의 값은 $\phi_{ai}(\xi)$ 의 값과 동일하다.

2.3 진동 방정식

인장방향 운동과 굽힘방향 운동간의 연성에 의한 효과가 무시할 수 있다는 가정을 사용하여 자유진동 해석을 위해 면내방향의 운동방정식인 식 (33)과 (34)를 이용하면, 면내방향의 제차방정식의 형태로 하나의 행렬 방정식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$M \ddot{y} + K y = 0 \quad (36)$$

여기서

$$M = \begin{bmatrix} M_{22} & 0 \\ 0 & M_{33} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{2j} \\ y_{3j} \end{bmatrix}, \quad \ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{2j} \\ \ddot{y}_{3j} \end{bmatrix} \quad (39)$$

또, K Matrix의 Elements는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \delta \omega^2 K_{22}^G + \omega^2 K_{22}^G \\
&+ \frac{kGa^2}{E} K_2^S - \omega^2 M_{22} \quad (40)
\end{aligned}$$

$$K_{23} = -\frac{kGa^2}{E} K_{23}^S \quad (41)$$

$$K_{32} = -\frac{kGa^4}{E} K_{32}^S \quad (42)$$

$$K_{33} = \alpha^2 K_3^S + \frac{kGa^4}{E} M_{33} \quad (43)$$

모드해석을 위해 열벡터 y 를 다음과 같이 나타낸다.

$$y = e^{i\lambda r} \eta \quad (44)$$

여기서 λ 는 고유진동수이고 η 는 모드형상을 나타내는 열벡터이다. 식 (44)를 식 (36)에 대입 정리하면 다음과 같다.

$$-\lambda^2 M \eta + K \eta = 0 \quad (45)$$

식 (45)에서 K 는 비대칭 행렬이다. 따라서 모드해석은 비대칭 행렬의 고유치 해석을 할 수 있는 복소모드해석방법을 적용해야한다.

3. 수치해석

수치해석을 위해 굽힘방향 변위의 가상모드들로는 고정된 외팔보의 굽힘진동모드들을 사용하였고 β_3 의 가상모드들은 굽힘방향 변위의 가상모드들을 공간좌표 x 로 한 번 미분한 함수들을 사용하였다. 외팔보의 단면은 사각 단면으로 가정하여 단면형상계수 k 의 값은 1.1769로 (참고문헌 (13) 참조) 하였다.

Fig. 2는 $\alpha = 20$, $\omega = 10$ 그리고 $\delta = 1$ 일 때 해석에 사용된 모드 수 증가에 따른 고유진동수들의 수렴을 보여주고 있다. 그림에서 각 모드수가 10개 일 때 3개의 고유진동수들이 거의 일정한 값에 수렴한 것을 알 수 있다. 각 모드수가 9개 일 때와 10개 일 때를 비교하여 서로 최대 0.16% 정도의 차이가 있음을 수치적으로 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 이 정도의 차이를 해의 충분한 수렴으로 간주하고, 이후의 결과를 얻기 위해 각각 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 3은 세장비 α 가 20이고 (두껍고 짧은 보에 해당함) 축반경비 δ 가 1일 때 회전각속도의 증가에 따른 가장 낮은 3개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 그림에서 실선과 점선은 Timoshenko의 가정과 Euler의 가정에 근거한 모델에 의한 해석결과를 각각 나타낸다. 두 경우 모두 회전각속도의 증가에 따라 고유진동수의 증가를 보여주는데, Euler 해석모델이 Timoshenko 해석모델보다 큰 값을 예측하게 하는 것을 보여주고 있으며 1차모드에서는 두 모델에 의한 결과의 차이가 별로 크지 않으나 2차 이상의 모드에서는 상당한 차이를 갖게되는 것을 보여준다.

Fig. 4는 무차원 회전각속도 ω 는 10이고 축반경비 δ 는 1일 때 세장비의 변화에 따른 가장 낮은 3개의 굽힘방향 고유진동수의 변화를 Timoshenko해석모델과 Euler해석모델을 비교하여 보여주고 있다. 여기서 관찰할 수 있듯이 세장비가 커질수록 단면관성효과와 전단효과에 의한 두 모델간의 차이가 점점 줄어드는 것을 관찰할 수 있다.

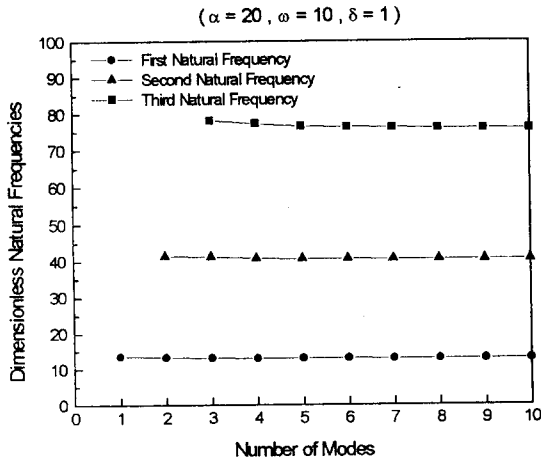


Fig. 2 Convergence of Natural Frequencies

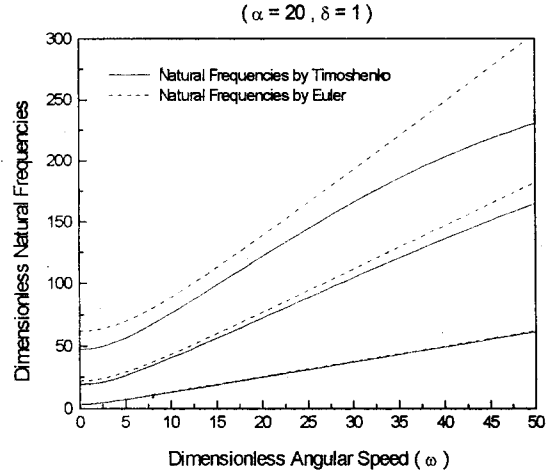


Fig. 3 Dimensionless Natural Frequencies vs Dimensionless Angular Speed

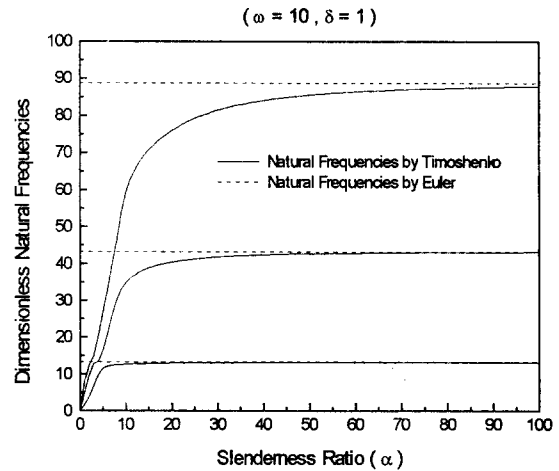


Fig. 4 Comparison of Natural Frequencies between the Thick Beam and the Thin Beam

Fig. 4는 무차원 회전각속도 ω 는 10이고 축반경비 δ 는 1일 때 세장비의 변화에 따른 가장 낮은 3개의 굽힘방향 고유진동수의 변화를 Timoshenko해석모델과 Euler해석모델을 비교하여 보여주고 있다. 여기서 관찰할 수 있듯이 세장비가 커질수록 단면관성효과와 전단효과에 의한 두 모델간의 차이가 점점 줄어드는 것을 관찰할 수 있다. α 가 70 일 때 (보의 길이가 두께의 약 20배에 해당하는 경우) 두 결과는 3차모드의 경우도 서로 약 2% 이내의 차이를 주는 것을 확인할 수 있었다. 이 결과에서 Timoshenko해석모델이 α 가 0으로 갈 때 고유진동수를 0으로 예측하는 것은 단순히 α 가 0으로 가면 무차원 고유진동수를 정의하는데 사용되는 T 가 0이 되기 때문이다.

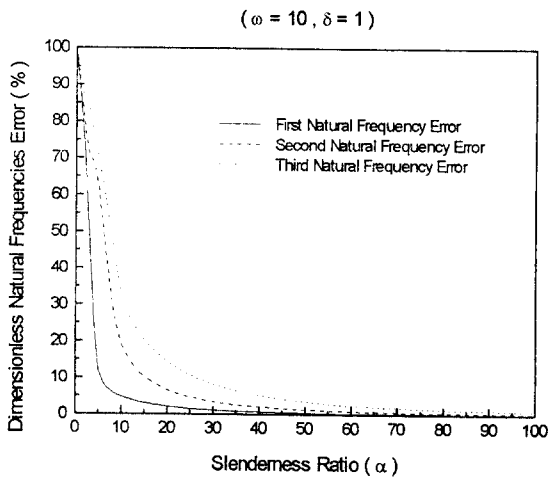


Fig. 5 Percentage Error of the Dimensionless Natural Frequencies between the Thick Beam and the Thin Beam

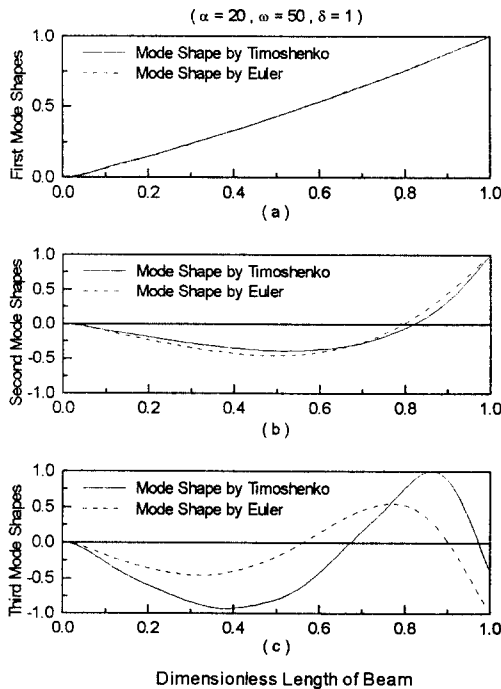


Fig. 6 Variations of first three Mode Shapes

Fig. 5는 Timoshenko 해석모델과 Euler 해석모델에 의해 예측된 고유진동수값 간의 오차를 나타낸다. 여기서 $\alpha=70$ 인 경우와 (보의 길이와 단면의 두께의 비가 약 20 대 1) $\alpha=20$ 인 경우를 (길이와 두께비가 약 5 대 1) 비교해 보면, α 가 70인 경우는 3차 모드에서 1.9% 정도의 차이가 있음을 확인할 수 있었고 α 가 20인 경우는 14.4%의 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 이것은

세장비가 커지면 전단효과를 무시해도 해석결과에 큰 차이가 없어 전단효과를 고려하지 않아도 되나 세장비가 작은 경우에는 전단효과를 고려해야 한다는 일반적인 가설이 회전하는 보의 경우에도 성립한다는 사실을 의미한다.

Fig. 6은 세장비 α 는 20, 축간경비 δ 는 1, ω 는 50일 때 두 해석모델에 의해 구해진 모드형상 차이를 보여주고 있다. 이 결과는 두 해석모델에 의한 결과가 고유진동수와 마찬가지로 저차모드에서는 별 차이를 주지 않으나 고차모드에서는 상당한 차이가 발생하는 것을 보여준다. 특별히 3차 모드의 경우 최대 진폭이 보의 끝이 아닌 약 1/3 안쪽으로 이동된 점에서 존재하는 것이 확인되었다.

3. 결론

본 논문은 단면관성 효과와 전단효과를 고려한 회전하는 두께고 짧은 외팔보의 진동해석모델링을 제시하였으며 수치해석을 통해 다음과 같은 결론을 얻었다. 세장비가 큰 경우 (α 는 70 이상) Timoshenko 해석모델과 Euler 해석모델에 의한 고유진동수 예측은 거의 차이가 없다. 그러나 세장비가 작은 경우 Euler 해석모델은 Timoshenko 해석모델에 비해 큰 무차원 고유진동수 값을 예측하며 특히 고차모드에서 두 모델은 큰 해석결과의 차이를 보여주었다. 따라서 보의 세장비가 작은 경우, 보가 회전할 때도 일반적인 해석경우와 마찬가지로 Timoshenko 해석모델을 사용해야 된다는 자연스러운 결론을 얻을 수 있었다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28-30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175-185.
- (4) Hoa, S., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass" *J. Sound and Vibration*, 67, pp. 369-381.
- (5) Wright, A., Smith C., Thresher, R., and Wang, J., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *J. of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 197-202.
- (6) Krupka, R. M. and Baumanis, A. M., 1969, "Bending-Bending Mode of a Rotating Tapered-Twisted Turbomachine Blade Including Rotatory Inertia and Shear Deformation" *J. of Engineering for Industry*, 91, pp. 1017-1024.
- (7) Stafford, R. O. and Giurgiutiu, 1975, "Semi-Analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams" *Int. J. of Mechanical Sciences*, Vol. 17, pp. 719-727.
- (8) Abbas, B. A., 1985, "Dynamic Analysis of thick rotating blades with flexible roots" *The Aeronautical Journal*, 89, pp. 10-16.

- (9) 유홍희, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수틀 이용한 선형 동적 모델링," 한국항공우주학회지, 제 19권, 제 3호, pp. 32-39.
- (10) 유홍희, 1991, "회전 외팔보의 굽힘진동 해석," 대한기계학회지 학술논문, 제 16권, 제5호, pp. 891-898.
- (11) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y.
- (12) Timoshenko, P. N., Vibration Problems in Engineering, McGraw-Hill Book Co., New York.
- (13) Pilkey, W. D., Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices, John Wiley & Sons Inc., New York.