

탄성지지를 갖는 셸구조물의 자유진동해석

문 덕 홍*, 0여 동 준**, 김 판 석***

(Free Vibration Analysis of Shell Structures with Elastic Supports)

(Deok-Hong Moon, Dong-Jun Yeo and Pan-Suk Kim)

1. 서 론

셸구조물은 선박, 항공기, 우주선 등의 산업분야에 자주 사용되는 중요한 구조요소로서, 이에 대한 연구도 공학적 필요성에 의해 많은 연구가 진행되어 왔다. Maddox등⁽¹⁾의 Rayleigh-Ritz법, Srinivasan and Bobby⁽²⁾의 적분방정식 기법, Petyt⁽³⁾의 유한요소법, Irie⁽⁴⁾, Henderson⁽⁵⁾, 齊藤⁽⁶⁾의 전달매트릭스법, 그 외 Webster⁽⁷⁾, Petyt and Deb Nath⁽⁸⁾, Blevins⁽⁹⁾, Srinivasan and Krishnan⁽¹⁰⁾ 등에 의해 여러가지 해석방법의 진동해석이 행해져 왔다.

현재 주로 사용되고 있는 매트릭스 구조해석 및 진동해석 방법으로는 유한요소법과 전달매트릭스법을 들 수 있다.

유한요소법은 범용적인 해석 프로그램의 개발은 수월하지 만 대규모의 선형 연립방정식의 해법에 귀착되므로, 기억용량이 큰 대형컴퓨터가 필요하고, 반면 전달매트릭스법은 기억용량이 적은 퍼스널컴퓨터로도 계산수행이 가능하나 고차의 고유진동수를 구할 경우나, 중간에 단단한 경탄성지지가 존재할 경우 등에는 수치계산상의 문제점⁽¹¹⁾이 지적되고 있다. 이에 대한 대책으로, 상태변수를 바꾸어 넣는 Riccati방법, 각 절점의 기지의 상태변수를 제거하는 Frontal법, 전달매트릭스와 강성매트릭스를 결합시키는 방법 등이 보고 되고 있다.

이에 자자들은 퍼스널컴퓨터 이용에 적합한 고속·고정도의 구조해석 및 진동해석 기법으로 전달영향계수법을 제안하여, 원판구조물, 사각판구조물, 원통형 셸구조물 등의 여러가지 형상구조물의 자유진동해석에 적용해서, 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산정도 및 계산속도의 양면에서 매우 우수함을 보고⁽¹²⁾⁻⁽¹³⁾한 바 있다.

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법을 좀 더 일반화시키고 체계화시키기 위하여 탄성지지를 갖는 셸구조물에 적용하여 자유진동 해석 알고리즘을 정식화한 후, 간단한 모델에 대한 수치실험을 통해서 전달영향계수법으로 구한 해를 전달매트릭스법의 결과와 비교·검토하여 본 방법의 유용성을 확인하였다.

2. 지배방정식

Fig.1(a)와 같이 좌표 x, ϕ, z 축을 잡고, 각 방향의 변위를 u, v, w 라 한다. x 축 방향의 길이 l , z 축 방향의 두께 h , 중립면의 반경 R 인 탄성스프링으로 지지된 셸구조물의 자유진동을 해석함에 있어서 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 셸의 두 경계, 즉 $\phi=0, \phi=a$ 는 임의의 경계조건을 가진다. ϕ 축 방향에 있어서 셸의 두께가 변하는 곳 또는 스프링지지기 있는 곳 등을 절선으로 하여 n 개의 요소로 분할하고, 좌측에서부터 1에서 n 번째 요소라 부른다. 또한 j 번째 요소와 $j+1$ 번째 요소와의 경계선을 절선 i 라 부른다.

(2) 지지스프링은 축방향, 원주방향 및 반경방향의 스프링과 원주에 대한 회전엔저항하는 회전스프링으로 구성된다.

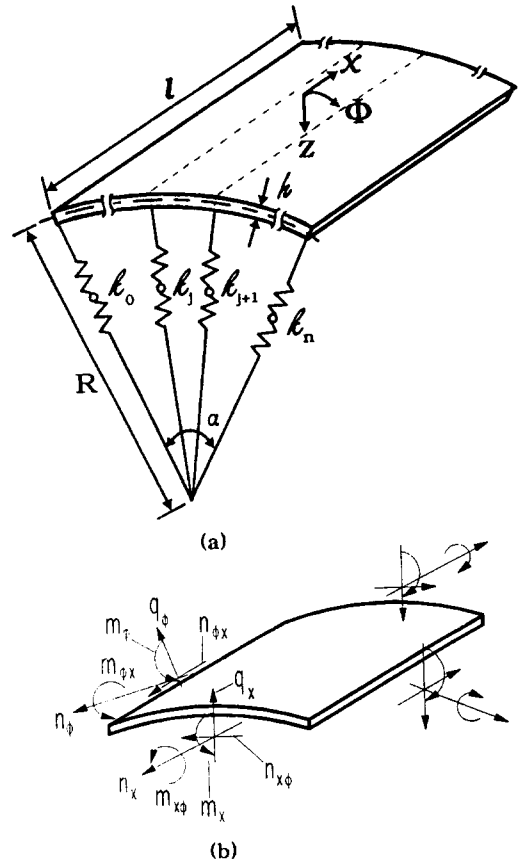


Fig.1 Shell structure with co-ordinate convention

* 부산수산대학교 기관공학과
 ** 여수수산대학교 기관공학과
 *** 부산수산대학교 산업대학원

(3) 임의의 절선 j 에서 x , ϕ 및 z 축 방향의 변위들과 ϕ 축 주위의 각변위는 연속이다.

기호 위에 (—)가 붙지 않는 것은 차원량이고, (—)가 붙은 것은 무차원량이며, \wedge 가 붙은 것은 절선 좌측의 무차원 물리량이며, 위첨자 l 는 매트릭스의 전치를 나타낸다.

임의 요소의 힘과 모멘트의 방향이 Fig. 1. (b)와 같을 때, 자유진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다⁽¹⁴⁾.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial n_{\phi x}}{\partial \phi_j} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial n_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial n_\phi}{\partial \phi_j} - \frac{1}{R} q_\phi - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi_j} + \frac{1}{R} n_\phi - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_{\phi x}}{\partial \phi_j} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial m_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_\phi}{\partial \phi_j} + q_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Kelvin-Kirchhoff 전단력은,

$$s_\phi = q_\phi - \frac{\partial m_{\phi x}}{\partial x} \quad (2)$$

막력의 성분은,

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi_j} - w \right) \right\}, \\ n_\phi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \phi_j} - w \right) \right\}, \\ n_{x\phi} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi_j} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2}{6R} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ n_{\phi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi_j} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

모멘트 성분은,

$$\begin{aligned} m_x &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \phi_j} \right), \\ m_\phi &= D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \phi_j} \right), \\ m_{x\phi} &= m_{\phi x} = (1-\nu) D \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 굽힘강성, E 는 종탄성계수, ν 는 포아송 비이다.

셀요소가 조화운동을 한다고 가정할 때, 변위성분과 힘성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (v, w, \psi) &= [V_j(\phi_j), W_j(\phi_j), \Psi_j(\phi_j)] \\ &\quad \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot e^{i\omega t}, \\ (n_\phi, s_\phi, m_\phi) &= [N_{\phi j}(\phi_j), S_{\phi j}(\phi_j), M_{\phi j}(\phi_j)] \\ &\quad \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot e^{i\omega t}, \\ (u, n_{\phi x}) &= [U_j(\phi_j), N_{\phi x j}(\phi_j)] \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \\ &\quad \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, m 는 축방향의 반파수, ω 는 고유 각진동수이고,

각변위는,

$$\phi = \frac{v}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi_j} \quad (6)$$

해석의 간편함을 위해 도입되는 무차원량들은,

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{R}, \quad \bar{l} = \frac{l}{R}, \quad \bar{U}_j = \frac{U_j}{h}, \quad \bar{V}_j = \frac{V_j}{h}, \\ \bar{W}_j &= \frac{W_j}{h}, \quad \bar{\Psi}_j = \frac{R}{h} \Psi_j, \quad \bar{N}_{\phi x j} = \frac{R^2}{D} N_{\phi x j}, \\ \bar{N}_{\phi j} &= \frac{R^2}{D} N_{\phi j}, \quad \bar{S}_{\phi j} = \frac{R^2}{D} S_{\phi j}, \quad \bar{M}_{\phi j} = \frac{R}{D} M_{\phi j}, \\ \lambda^2 &= \frac{\rho R^2 h^3 \omega^2}{12D} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (5)를 식 (1)~(4)와 (6)에 대입한 후, 식 (7)의 무차원량을 대입하여 매트릭스 미분방정식으로 나타내면,

$$\frac{d}{d\phi} \bar{Z}_j = \Lambda_j \bar{Z}_j \quad (8)$$

여기서 \bar{Z}_j 는 임의의 j 요소에 있어서의 상태량벡터이고, Λ_j 는 8×8 의 계수매트릭스이며, 그 요소들은,

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= -\frac{m\pi}{\bar{l}}, \quad \Lambda_{15} = \frac{\bar{h}}{6(1-\nu)}, \quad \Lambda_{21} = \nu \frac{m\pi}{\bar{l}}, \\ \Lambda_{23} &= 1, \quad \Lambda_{26} = \frac{\bar{h}}{12}, \quad \Lambda_{32} = -1, \quad \Lambda_{34} = 1, \\ \Lambda_{43} &= \nu \left(\frac{m\pi}{\bar{l}} \right)^2, \quad \Lambda_{48} = \frac{1}{\bar{h}}, \quad \Lambda_{51} = \frac{12}{\bar{h}} \left((1-\nu^2) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{m\pi}{\bar{l}} \right)^2 - \lambda^2 \right), \quad \Lambda_{56} = -\Lambda_{21}, \quad \Lambda_{62} = -\frac{12}{\bar{h}} \lambda^2, \\ \Lambda_{65} &= -\Lambda_{12}, \quad \Lambda_{67} = \Lambda_{34}, \quad \Lambda_{73} = \left\{ (1-\nu^2) \left(\frac{m\pi}{\bar{l}} \right)^4 \right. \\ &\quad \times \left. \bar{h} - \frac{12}{\bar{h}} \lambda^2 \right\}, \quad \Lambda_{76} = \Lambda_{32}, \quad \Lambda_{78} = -\nu \left(\frac{m\pi}{\bar{l}} \right)^2, \\ \Lambda_{84} &= 2(1-\nu) \left(\frac{m\pi}{\bar{l}} \right)^2 \bar{h}, \quad \Lambda_{87} = \Lambda_{32} \end{aligned} \quad (9)$$

이고, 상기 이외의 계수항은 0이다. 식 (8)을 풀면,

$$\begin{aligned} \bar{Z}_j(\phi) &= F_j(\phi) \bar{Z}_j(0) \\ \frac{d}{d\phi} F_j(\phi) &= \Lambda_j F_j(\phi) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 필드전달매트릭스 $F_j(\phi)$ 는 다음의 멱급수식을 이용하여 계산을 행한다.

$$\begin{aligned} F_j(\phi) &= e^{\Lambda_j \phi} = I + \frac{1}{1!} \Lambda_j \phi + \frac{1}{2!} \Lambda_j^2 \phi^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \Lambda_j^3 \phi^3 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

임의의 j 번째 셀요소 좌-우측의 절선 $j-1$ 과 j 에 있어서의 상태벡터 $\bar{Z}_j = ('d, 'f)_j$ 와 \bar{Z}_{j-1} 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{Z}_j = F_j(\phi) \bar{Z}_{j-1} \quad (12)$$

식 (12)를 변위벡터 $d_j = ('U, 'V, 'W, 'Psi)_j$ 와 힘벡터 $f_j = ('N_{\phi x}, 'N_\phi, 'S_\phi, 'M_\phi)_j$ 에 대한 부분매트릭스로 재정의하면,

$$\begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{j-1} \quad (13)$$

로 되고, A_j, B_j, C_j 및 D_j 는 4×4 의 정방매트릭스이며, 식 (13)을 $\bar{Z}_{j-1} = \begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{j-1}$ 에 대하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{j-1} = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_j \quad (14)$$

식 (13)과 (14)의 우변의 계수매트릭스는 서로 역매트릭스의 관계에 있다.

셀구조물의 임의의 절선 j 에 스프링 지지가 있는 경우, 절선 좌·우측의 상태벡터는,

$$\bar{Z}_j = P_j \hat{Z}_j \quad (15)$$

여기서 P_j 는 절선 j 에서 좌·우측 사이의 전달매트릭스인 포인트 전달매트릭스이다.

식 (15)를 변위벡터 d_j 와 힘벡터 \bar{f}_j 및 \hat{f}_j 에 대한 부분

$$\begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} I & O \\ K & I \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \hat{f} \end{bmatrix}_j \quad (16)$$

여기서 I 는 단위매트릭스, O 는 영(zero)매트릭스이다.

절선 j 의 좌측과 우측에 있어서, 힘의 평형조건으로부터,

$$\hat{f}_j = \bar{f}_j - K_j d_j \quad (17)$$

여기서,

$$K_j = \begin{bmatrix} \bar{k}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_r \end{bmatrix}_j \quad (18)$$

이고, 스프링상수들의 무차원량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_x) &= \frac{hR^2}{D} (k_x, k_\phi, k_x) \\ \bar{k}_r &= \frac{hR}{D} k_r \end{aligned} \quad (19)$$

3. 동적영향계수 매트릭스의 전달

임의의 절선 j 의 좌측과 우측에서 변위벡터 d_j 와 힘벡터 \hat{f}_j, \bar{f}_j 사이의 관계를 다음과 같이 정의 한다.

$$\begin{aligned} d_j &= \hat{T}_j \hat{f}_j, & \hat{T}_j &= {}^t \hat{T}_j \\ d_j &= \bar{T}_j \bar{f}_j, & \bar{T}_j &= {}^t \bar{T}_j \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 \hat{T}_j, \bar{T}_j 는 4×4 의 대칭인 동적영향계수 매트릭스이다.

3.1 동적영향계수의 필드 및 포인트 전달

식 (14)와 (20)에서 j 번째 요소에 있어서 동적영향계수의 필드전달식은,

$$X_j \hat{T}_j = Q_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} X_j &= \bar{T}_{j-1} {}^t C_j + {}^t D_j \\ Q_j &= \bar{T}_{j-1} {}^t A_j + {}^t B_j \end{aligned} \quad (22)$$

식 (17)과 (20)에서 동적영향계수의 포인트 전달식은,

$$\hat{X}_j \bar{T}_j = \hat{T}_j \quad (23)$$

여기서,

$$\hat{X}_j = I_j + \hat{T}_j K_j \quad (24)$$

상기의 필드 및 포인트 전달식을 결합시키면, 식 (21)과 (23)으로부터 필드-포인트 전달식은,

$$Y_j \bar{T}_j = Q_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (25)$$

여기서,

$$Y_j = X_j + Q_j K_j \quad (26)$$

3.2 절선주 0에서의 동적영향계수 매트릭스

본 해석기법에 있어서는 계산시점의 경계조건을 처음부터 고려해야 한다. 즉 셀의 좌측의 경계선인 절선 0를 스프링 지지로 간주하여 절선 0 우측에서의 동적영향계수 매트릭스를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{T}_0 = K_0^{-1} \quad (27)$$

여기서, K_0 는 절선 0에서의 포인트 강성매트릭스이다.

그러나, K_0 가 특이매트릭스인 경우, K_0 의 역매트릭스가 구해지지 않으므로, 절선 0와 절선 1사이의 동적영향계수의 전달과정은 K_0 를 그대로 사용한 다음식이 이용된다.

$$X_1 \hat{T}_1 = Q_1 \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} X_1 &= {}^t C_1 + K_0 {}^t D_1 \\ Q_1 &= {}^t A_1 + K_0 {}^t B_1 \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)의 K_0 의 요소인 스프링상수 $\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_x, \bar{k}_r$ 의 값들을 적절히 변화시키므로서 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

4. 진동수방정식 및 거짓근의 해소법

진동수방정식은 셀의 우측단의 경계조건에 따라 두 종류로 대별 할 수 있다.

우선, $K_n = 0$ 인 경우 ($\hat{f}_n = \bar{f}_n = 0$)에는 식 (21)에서 j 에 n 을 대입하면 $X_n \hat{T}_n = Q_n$ 로 되고, 식 (20)에서 $\hat{T}_n = d_n \hat{f}_n^{-1}$ 이므로 이것을 $X_n \hat{T}_n = Q_n$ 에 대입하면,

$$\begin{aligned} X_n d_n &= Q_n \hat{f}_n = 0 \\ X_n d_n &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

로 되고, $d_n \neq 0$ 이므로 진동수방정식은 다음과 같다.

$$X_n = \det(X_n) = 0 \quad (31)$$

다음으로, $K_n \neq 0$ 인 경우에 대해서는 식 (17)과 (20)으로부터,

$$(I + K_n \hat{F}_n) \hat{f}_n = 0 \quad (32)$$

로 되고, \hat{F}_n 의 대칭성과 식 (21)을 이용하면,

$$\hat{F}_n = X_n^{-1} Q_n = Q_n' X_n^{-1} \quad (33)$$

식 (33)을 (32)에 대입하면,

$$\begin{aligned} (I + K_n' Q_n' X_n^{-1}) \hat{f}_n &= 0 \\ (X_n + K_n' Q_n' X_n^{-1} X_n) X_n^{-1} \hat{f}_n &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)에서 $X_n^{-1} X_n = I$ 이고, 식 (26)으로부터 $X_n + K_n' Q_n = Y_n$ 이므로,

$$Y_n' X_n^{-1} \hat{f}_n = 0 \quad (35)$$

여기서, $\hat{f}_n \neq 0$ 이므로, 진동수방정식은,

$$\begin{aligned} \det(Y_n' X_n^{-1}) &= \det(Y_n) / \det(X_n) = 0 \\ Y_n &\equiv \det(Y_n) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

로 되고, 결과적으로 식 (36)은 $K_n = 0$ 인 경우의 식 (30)을 포함하고 있음을 알 수 있다.

진동수방정식 (36)에 이분법을 적용해서 고유진동수를 구할 경우, 동적영향계수의 전달과정에서 발생할 수 있는 거짓근(반대칭극)도 참근(고유진동수)으로 구해버리게 된다.

그르므로, 진동수방정식 (31), (36)대신에 다음식을 사용하르므로, 모든 경계조건 및 중간조건을 스프링상수의 값만을 변화시켜 제어할 수 있으며, 동시에 거짓근도 해소할 수 있게 된다.

$$\text{sgn}(G_n) = \text{sgn}(X_1) \cdot \text{sgn}(X_1) \prod_{j=2}^n \text{sgn}(Y_j) \quad (37)$$

5. 고유모드의 계산

고유모드의 계산은 고유진동수를 구한 후, 셀의 우측에서 좌측으로 실행된다. 절선 n 에서의 상태변수가 $K_n = 0$ 인 경우, 고유진동수가 구해진 시점에서는 식 (30)이 성립하기 때문에, 식 (30)으로부터 $d_n (\neq 0)$ 가 구해진다. 또한 $K_n \neq 0$ 인 경우는, 식 (35)로부터 \hat{f}_n 를 구할 수 있고, $d_n = Q_n' X_n^{-1} \hat{f}_n$ 에 의해 d_n 를 구한다.

절선 $n-1$ 에서 1까지의 상태변수들은 식 (14), (17) 및 (20)에 의해 순차적으로 계산하면 된다.

6. 수치계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 탄성지지를 갖는 셸구조물의 계산모델에 대하여 수치실험을 행하고, 전달영향계수법(TICM)에 의한 계산 결과들을 전달행렬법(TMM)에 의한 결과와 비교하여 알고리즘의 타당성을 확인하였다. 셸구조물은 두께가 2 mm, 중립면의 반경이 500 mm이며, 종탄성계수는 2.0×10^{11} N/m², 밀도는 7860 Kg/m³, 프와송 비는 0.3으로 하였다.

사용된 계산기는 32비트 퍼스널컴퓨터와 슈퍼컴퓨터(Crayc90)이고, 사용언어는 fortran이며, 변수는 퍼스널컴퓨터에 의해서는 배정도, 슈퍼컴퓨터에 의해서는 4배정도 변수

로 계산하였다. 상대오차는 10^{-9} 이하에서 수행하는 것으로 하였다.

Table 1, 2는 양단이 탄성지지원 모델에 대해서 퍼스널컴퓨터에 의한 TICM과 TMM의 무차원 고유진동수를 슈퍼컴퓨터에 의한 결과(SUPER)와 비교하여 나타낸 것이다. 셀은 $\bar{k}_x = 4$, $\bar{k}_y = 5$ 이고, $\alpha = 120^\circ$, 180° 이며, 스프링상수 값은 Table 1은 $\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 10$ 및 $\bar{k}_r = 0$ 이고, Table 2는

$\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 10^3$ 및 $\bar{k}_r = 0$ 이다. Table 1, 2에서, TICM과 TMM은 전달영향계수법과 전달매트릭스법으로 배정도의 변수를 써서 퍼스널컴퓨터로 계산한 결과이고, SUPER는 전달영향계수법과 전달매트릭스법에 의해 4배정도의 변수를 써서 슈퍼컴퓨터로 계산하였을 경우, 두 기법의 계산결과 값들이 일치한 것을 나타낸다. Table 1에서 TICM과 SUPER는 완전히 일치하고 있으나, TMM은 축방향의 반파수 $\alpha = 120^\circ$ 일 경우는 1차에서 8차까지는 정해가 구하여 지지만, 9차 이상의 고차에서는 정해가 구하여 지지 않다가 14차 이상이 되면 전혀 해를 구할 수 없게 된다. $\alpha = 180^\circ$ 일 경우는 7차까지는 정해가 구하여 지고, 8차에서 12차까지는 정해가 구하여 지지 않다가 14차 이상에서는 해를 전혀 구할 수 없게 된다. 이것은 서론에서 지적했듯이 고차진동수수록 갈수록 또는 진동수 값이 커질수록 TMM의 단점인 계산정도가 나빠지기 때문이라 생각된다. 여기서 정해라 함은 슈퍼컴퓨터에서 4배정도 변수를 사용해서 수치계산을 행하였을 때, 구하는 진동수 범위안에서 전달영향계수법과 전달매트릭스법의 계산결과가 유효자리수 내에서 일치했고, 퍼스널컴퓨터 상에서 배정도 변수를 써서 계산한 TICM의 결과와도 완전히 일치했으므로, 이를 본 연구에서는 정해로 간주하였다.

Table 2의 지지 스프링상수 값이 좀더 큰 값인 $\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 10^3$ 의 경우도 TICM과 SUPER는 완전히 일치하고 있으나, $\alpha = 120^\circ$ 일 경우 TMM은 1, 3, 7차는 정해가 구하여 지지만, 그 외의 차수에서는 정해가 구하여지지 않다가 14차 이상에서는 해를 전혀 구할 수 없게 된다. $\alpha = 180^\circ$ 일 경우 TMM은 1차부터 정해가 구하여 지지 않

Table 1 Non-dimensional natural frequencies(λ) for shell with elastic supports ($\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 10, \bar{k}_r = 0$)

No.	TICM		TMM		SUPER	
	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
1	0.06704440	0.04265199	0.06704440	0.04265199	0.06704440	0.04265199
2	0.07377851	0.04701050	0.07377851	0.04701050	0.07377851	0.04701050
3	0.10958045	0.06198478	0.10958045	0.06198478	0.10958045	0.06198478
4	0.13321777	0.07541229	0.13321777	0.07541229	0.13321777	0.07541229
5	0.13712240	0.07329971	0.13712240	0.07329971	0.13712240	0.07329971
6	0.15647193	0.08387259	0.15647193	0.08387259	0.15647193	0.08387259
7	0.16585873	0.09486431	0.16585873	0.09486431	0.16585873	0.09486431
8	0.21076510	0.11432810	0.21076510	0.11432810	0.21076510	0.11432810
9	0.24245535	0.13537068	0.24245535	0.13537068	0.24245535	0.13537068
10	0.27808335	0.14532000	0.27808335	0.14532000	0.27808335	0.14532000
11	0.30680125	0.15834866	0.30680125	0.15834866	0.30680125	0.15834866
12	0.32357307	0.17370144	0.32357307	0.17370144	0.32357307	0.17370144
13	0.38252444	0.20027967	*****	*****	0.38252444	0.20027967
14	0.43082774	0.21865329	*****	*****	0.43082774	0.21865329

Table 2 Non-dimensional natural frequencies(λ) for shell with elastic supports ($\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k}_z = 10^3, \bar{k}_r = 0$)

No.	TICM		TMM		SUPER	
	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 120^\circ$	$\alpha = 180^\circ$
1	0.07664615	0.07862823	0.07664615	0.07863325	0.07664615	0.07862823
2	0.09032277	0.08094322	0.09032288	0.08095376	0.09032277	0.08094322
3	0.12101122	0.08399737	0.12101121	0.08401563	0.12101122	0.08399737
4	0.16588572	0.09325280	0.16585558	0.09350000	0.16588572	0.09325280
5	0.16850506	0.09809336	0.16850543	0.09819609	0.16850506	0.09809336
6	0.19201993	0.10954145	0.19201985	0.10944513	0.19201993	0.10954145
7	0.19574520	0.13120015	0.19574630	0.13095733	0.19574520	0.13120015
8	0.21464873	0.16772552	0.21464813	0.13191790	0.21464873	0.16772552
9	0.36657665	0.16812874	0.36656619	0.13250099	0.36657665	0.16812874
10	0.36728150	0.17632712	0.36729310	0.13400000	0.36728150	0.17632712
11	0.37585794	0.19812916	0.37587866	0.13438510	0.37585794	0.19812916
12	0.37672622	0.25034515	0.37672632	0.14099792	0.37672622	0.25034515
13	0.39065924	0.29237052	*****	*****	0.39065924	0.29237052
14	0.55341748	0.29441933	*****	*****	0.55341748	0.29441933

고 13차 이상에서는 해를 전혀 구할 수 없게 된다. 이것은 TMM은 중간지지된 스프링상수 값들이 커짐에 따라 고유진동수가 아직 포화상태에 있지 않음에도 불구하고, 전달매트릭스 요소내에는 스프링상수 값들에 의해 요소간의 값들의 차가 극단적으로 커지므로 전술의 고차 진동에서의 같이 전달매트릭스의 사칙연산 과정에서 생기는 오차라 생각된다.

Fig. 2는 양단단순지지와 양단고정의 경우에 축방향의 파의 수 m 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다.

TICM의 경우, 양단 단순지지의 경계조건은 양쪽 경계에서의 스프링상수 값을 \bar{k}_x 와 \bar{k}_x 값을 ∞ 로 대치함으로써 대용시켰다. 실제의 계산에 있어서, ∞ 의 값은 고유진동수가 포화할 정도의 큰 값인 10^{20} 을 수치상의 무한대로 간주하였다. 또한, 고정단의 경계조건 취급은 좌우양단의 무차원 스프링상수 \bar{k}_x , \bar{k}_ϕ , \bar{k}_x 및 \bar{k}_x 값을 ∞ 로 대치하므로서 처리할 수 있다.

Fig. 3은 축방향의 길이 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 3에서 길이비 \bar{l} 의 증가에 따라 무차원 고유진동수는 감소하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4는 셸이 $\bar{l}=2$, $J=6$, $n=8$ 및 $\alpha=120^\circ$ 이고, $\bar{k}_r=0$ 일 때, 스프링 강성 \bar{k}_x , \bar{k}_ϕ , \bar{k}_x 의 변화에 따른 3차의 무차원 고유진동수의 값의 변화를 나타낸 것이다. 스프링 강성의 증가에 따라 무차원 고유진동수는 증가하며 그 증가율은 스프링 강성값의 증가나 축방향의 모드수 m 값의 증가에 비례하지는 않는다.

Fig. 5은 일단 고정인 셸에서 $\bar{l}=2$, $\alpha=120^\circ$ 이고, 지지 스프링 강성 \bar{k}_x , \bar{k}_ϕ , \bar{k}_x 및 \bar{k}_x 의 값이 10일 경우, 등간격

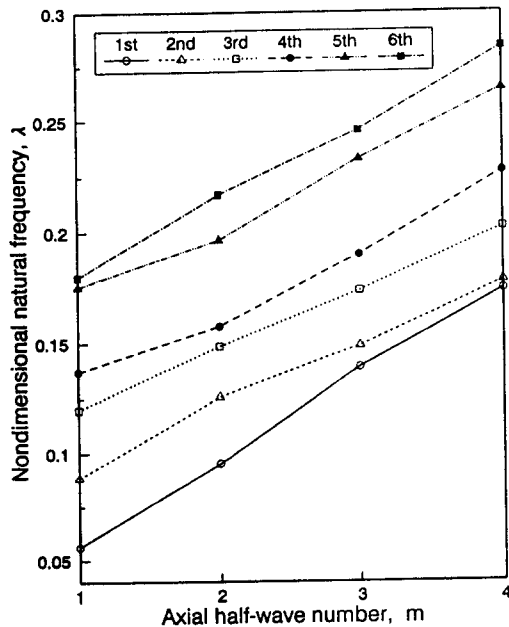


Fig.2 Nondimensional natural frequencies versus axial half-wave number for simply-supported boundary

으로 지지된 스프링의 수 J 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 값을 나타낸 것이다. 지지 스프링의 수 J 의 증가에 따라 $m=1$ 일 경우는 거의 비례하여 증가하나, $m=2$ 이상에서는 J 값이 어떤 일정한 값 이상에서만 J 값에 따라 무차원 고유진동수가 비례한다.

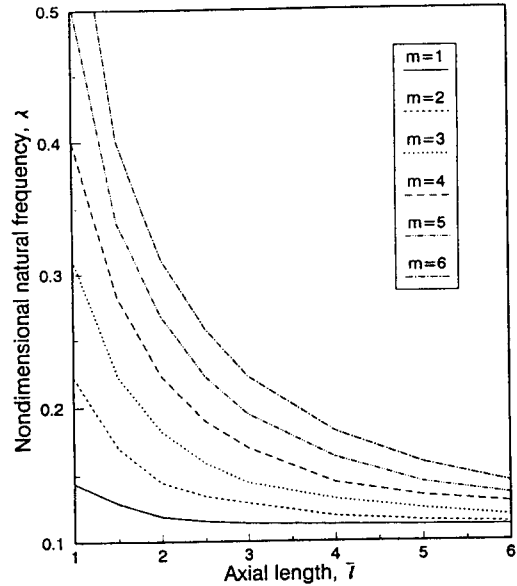


Fig.3 Nondimensional natural frequencies versus the length ratio

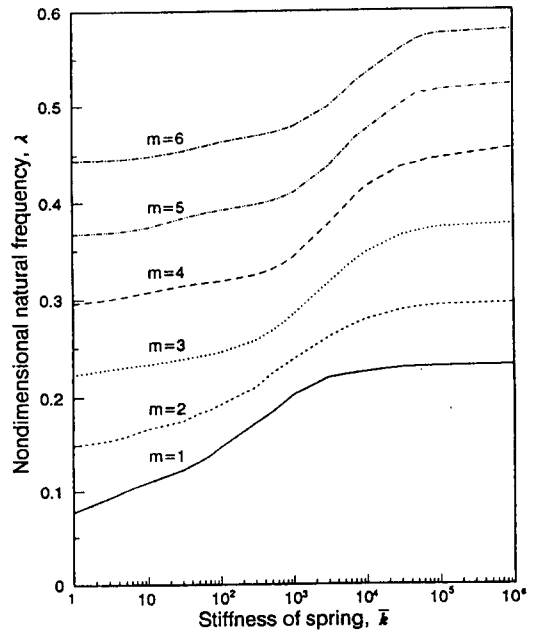


Fig.4 Relationship between nondimensional natural frequencies and stiffness parameter of springs

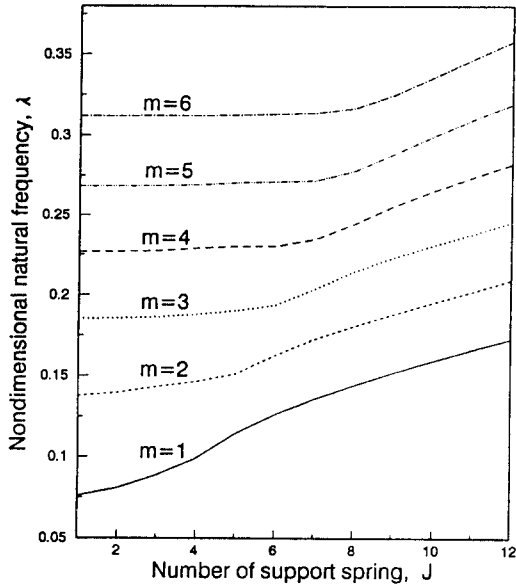


Fig.5 Nondimensional natural frequencies versus the number of support springs of a clamped-free shell

7. 결론

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법을 사용하여 임의의 경계조건을 갖는 탄성지지 셸구조물의 자유진동해석에 적용해서, 고유진동수와 고유모드를 구하는 알고리즘을 정식화하고 간단한 계산모델에 대하여 수치실험을 행하여, 그 결과들을 전달매트릭스법의 결과와 비교 검토하여 유용성을 확인하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 본 해석 기법은 전달매트릭스법으로는 구하기 곤란한 고차의 진동수에 대해서도 계산정도가 양호하였다.

(2) 본 해석 기법은 셸구조물의 중간에 단단한 탄성지지가 존재하더라도 유연성을 가지고 적용할 수 있었다.

(3) 본 해석 기법은 중간 지지조건과 경계조건을 동일한 해석 알고리즘에 축방향, 원주방향, 반경방향 및 회전방향의 스프링상수 값만을 적절하게 변화시키므로서 대처할 수 있었다.

(4) 진동수방정식의 해를 구하는 방법으로 이분법을 이용할 경우 동적영향계수의 전달과정에서 발생할수 있는 거짓 근도 쉽게 해소할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Maddox, N.R., Plumblee, H.E. and King, W.W., 1970, "Frequency Analysis of a Cylindrically Curved panel with Clamped and Elastic Boundaries", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.12, No.2, pp.225~249.
- (2) Srinivasan, R.S. and Bobby, W., 1976, "Vibration of Cylindrical Shell Panels", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.46, No.1, pp.43~49.
- (3) Petyt, M., 1971, "Vibration of Curved Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.15, No.3, pp.381~395.
- (4) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., 1984, "Free Vibration of a Thin-Walled Beam-Shell of Arc Cross-Section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.94, No.4, pp.563~572.
- (5) Henderson, J.P. and McDaniel T.J., 1971, "The Analysis of Curved Multi-Span Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.18, No.2, pp.203~219.
- (6) 齊藤秀雄, 山口秀谷, 1980, "軸方向に平行に粘弾性ばりを取付られた圓筒かくの振動", *日本機械學會論文集(C編)*, 第46巻, 第406號, pp.617~626.
- (7) Webster, J.J., 1968, "Free Vibrations of Rectangular Curved Panels", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, No., pp.571~582.
- (8) Petyt, M. and Deb Nath, J.M., 1971, "Vibration Analysis of Singly Curved Rectangular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.13, No.4, pp.485~497.
- (9) Blevins, R.D., 1981, "Natural Frequencies of Shallow Cylindrically Curved Panels", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.75, No., pp.145~149.
- (10) Srinivasan, R.S. and Krishnan, P.A., 1987, "Vibration of Cylindrical Shell Panels", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.114, No.4, pp.583~587.
- (11) Pestel, E.C. and Leckie, F.A., 1963, "Matrix Method in Elastomechanics", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- (12) 文 徳弘, 呂 東俊, 1993, "傳達影響係數法에 의한 사각판구조물의 自由振動解析", *大韓機械學會 論文集*, 第17巻, 第3號, pp.559~567.
- (13) 文 徳弘, 呂 東俊, 1994, "傳達影響係數法에 의한 탄성지지를 갖는 원통형 셸구조물의 自由振動解析", *韓國聲音振動工械學會誌*, 第4巻, 第4號, pp.469~478.
- (14) Goldenveizer, A.L., 1961, "Theory of Elastic Thin Shells", Pergamon Press, Oxford.