한국소음진동공학회 1995년도 춘계학술대회논문집 pp. 334-339

COSINE 급수를 이용한 원통형 셸의 유체 영향계수 해석

°정 우 진*, 전 재 진*, 이 헌 곤*

(An analysis on the fluid-loading coefficient of cylindrical shell using COSINE series)

(Woo-Jin Jung, Jae-Jin Jeon , Hun-Gon Lee)

1. 서 론

수중에서 외압을 받는 구조물의 기본적인 해석모델은 유체로 둘러쌓인 원통형 셸이다. 수중 구조물 주위의 유체는 밀도가 공기에 비해 크기 때문에 수중 구조물의 진동 및 방사소음 특성해석시 유체와 구조물간의 상호작용을 무시할 수 없다. 이에 따라 수중 구조물에서 유체에 의한 영향계수를 보다 정확하게 계산하는 방법이 필요하다. 수중 구조물에서 유체의 영향을 고려하는 방법에는 유한요소법/경계 요소법을 이용하는 수치 해석방법(Numerical method)과 이론적인 해석방법(Analytical method)등 크게 두가지를 이용할 수 있다. 이들 두 방법들은 각각의 장, 단점들이 있으나, 본 연구에서는 이론적인 해석방법을 사용하였다. 지금까지 발표된 이론적인 해석방법을 이용한 유체 영향계수의 해석결과들의 대부분이 원통형 셸의 경계조건을 양단 단순지지(Simply-Support)로 가정하고 원통형 셸의 반경 방향 변위(또는 속도)항을 SINE 급수를 이용하여 해석한 결과들이다[1,2,3,4]. 이와 같은 해석 모델은 양단에서 변위들이 영이 되므로 셸 양단에 끝막이 판이 있거나 다른 경계조건을 갖는 경우에는 적용을 할 수가 없다. 대부분의 수중 구조물들은 양단에 끝막이 판들이 붙이 있으므로 원통형 셸 양단에서 변위항이 영이 되지 않도록 하고 셸 양단과 끝막이 판을 결합시킬 수 있는 방법이 요구된다. 이 경우 셸의 변위(또는 속도)항을 COSINE 급수를 이용하는 것도 하나의 방법이다. 이와 관련하여 A. Harari 등이 COSINE 급수를 이용한 원통형 셸의 진동 및 방사소음 해석결과를 발표하였다[5,6]. 그러나 이들은 COSINE 급수를 이용한 유체 영향계수에 대한 해석은 기본적인 사항을 제외하고는 언급을 하지 않고 있다. 따라서 본 연구에서는 COSINE 급수를 이용한 원통형 셸의 유체 영향계수를 해석하고 이를 SINE 급수를 이용한 경우의 유체 영향계수와 비교, 검토하였다.

2. 이 론

본 연구에서는 주위 음장에 양단의 영향이 없으며, 경계가 고정되지 않은 원통형 셸을 해석하기 위하여 Fig.1 과 같이 셸 양단에 Rigid Baffle 이 있는 유한 길이의 원통형 셸 주위에 유체가 있는 해석모델을 이용하였다.

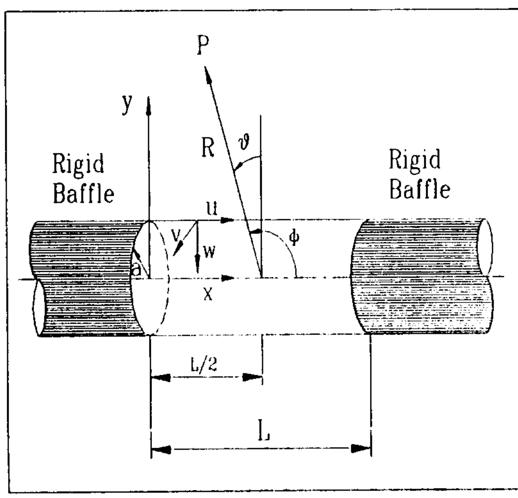

Fig. 1 Cylindrical shell and coordinates in the fluid

* 국 방 과 학 연 구 소 (진 해)

원통형 셀 주위의 유체 음압은 Helmholtz 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \qquad (1)$$

이때 k 는 주위 유체의 파수(Wavenumber)이다. (1)식에서 시간에 대한 음압 p 의 변화량을 $e^{i\omega t}$ 이라고 하고, p 에 대한 Fourier 변환된 압력을 $\tilde{p}$ 라 하면

$$\tilde{p}(r,\theta,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r,\theta,x)\, e^{i\beta x} dx \qquad (2)$$

(1)식에 대한 Fourier 변환 및 (2) 식을 이용하여 Fourier 변환된 압력 $\tilde{p}$ 를 구하면 아래와 같다.

$$\tilde{p}(r,\theta,\beta) = \sum_{0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}((k^2-\beta^2)^{(1/2)} r)\cos(n\theta) \qquad (3)$$

이때 $H_n^{(2)}((k^2-\beta^2)^{(1/2)} r)$ 는 제 2종 Hankel 함수를 의미한다. 또한 A_n 은 미지계수값으로 반경방향으로의 셀의 변위와 음압간의 경계조건을 적용하여 구할 수 있다. 한편 Fig. 1 과 같은 모델에서 radiation condition 은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tilde{p}(r,\theta,\beta)}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\rho\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{W}_n(\beta)\cos(n\theta) \qquad (4)$$

이때 $\widetilde{W}_n(\beta)$는 Fourier 변환된 셀의 반경방향 변위이며, n 은 원주방향으로의 모우드 수(Mode number)가 된다. (3)식과 (4)식을 이용하고 역 Fourier 변환(Inverse Fourier Transform)을 거쳐 음압을 구하면,

$$\begin{aligned} p(r,\theta,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(r,\theta,\beta)\, e^{-i\beta x} d\beta \\ &= -\frac{\rho\omega^2}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{W}_n(\beta)\frac{H_n^{(2)}(\mu r)}{\mu H_n^{\prime(2)}(\mu a)} \\ &\qquad \times e^{-i\beta x} d\beta\Big]\cos(n\theta) \end{aligned} \qquad (5)$$

여기서 $H_n^{\prime(2)}(\mu a)$ 는 Hankel함수의 인자(argument)에 대한 미분을 의미하며, $\mu = (k^2-\beta^2)^{(1/2)}$ 이다. 그런데 길이가 L 인 원통형 셀의 변위를 (6)식과 같이 COSINE 급수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$W_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} W_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \qquad (6)$$

이때 m 은 길이방향으로의 원통형 셀의 모우드 수(Mode number)이다. (6)식을 (5)식에 대입하고, 원통형 셀의 변위와 속도사이에 $\Omega_{mn} = (i\omega)W_{mn}$ 의 관계가 있으므로 이를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(r,\theta,x) = \frac{i\omega\rho}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{mn}\Big[\int_0^{\infty} \Psi_m(x,\beta) \\ \times \frac{H_n^{(2)}(\mu r)}{\mu H_n^{\prime(2)}(\mu a)} d\beta\Big]\cos(n\theta) \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_m(x,\beta) = \frac{\beta}{\beta^2-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}\,[(-1)^m \sin(\beta(L-x)) \\ + \sin\beta x] \end{aligned} \qquad (8)$$

(7)식에서 적분구간은 β 의 값에 따라서 [0 , k] 와 [k , ∞] 으로 나눌 수 있다. 이때 $k < \beta < \infty$ 구간에서는 $\mu^* = (\beta^2 - k^2)^{(1/2)}$ 를 이용하여 제 2종 Hankel 함수의 인자를 나타내면 $-i\mu^*$ 로 되며 이는 허수이다. 그런데 허수 인자를 갖는 Hankel 함수는 실수 인자를 갖는 Modified Bessel 함수 K_n 으로 표현할 수 있다[7]. 이를 이용하여 (7)식을 정리하면,

$$\begin{aligned} p(r,\theta,x) = \frac{i\omega\rho}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{mn}\Big[\int_0^{k} \Psi_m(x,\beta) \\ \times \frac{H_n^{(2)}(\mu r)}{\mu H_n^{\prime(2)}(\mu a)} d\beta + \int_k^{\infty}\Psi_m(x,\beta) \\ \times \frac{K_n(\mu^* r)}{\mu^* K_n^{\prime}(\mu^* a)} d\beta\Big]\cos(n\theta) \end{aligned}$$

또는,

$$p(r,\theta,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{m=0}^{\infty} T_{mn}(-\Omega_{mn})\Big]\cos(n\theta) \qquad (9)$$

이때 속도앞에 "-"를 붙인 이유는 음압이 원통형 셀에서 밖으로 나가는 유체입자에 의한 양을 의미하는 것으로, 본 연구에서는 + 반경방향을 안쪽으로 향하는 방향으로 하였기 때문이다. 따라서 (9)식을 이용하여 원주방향 n 차 모우드, 길이방향 r 차 모우드의 음압성분인 p_m 을 구하면

$$p_m = \left(\frac{2}{\epsilon_r L}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\int_0^{L} T_{mn}(a,x)\cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\Big]\Omega_{mn}$$

(단, $r=0$ 일때 $\epsilon_r=2$, $r\neq0$ 일때 $\epsilon_r=1$)

또는, $$p_m = \sum_{m=0}^{\infty} Z_{mn}(-\Omega_{mn}) \qquad (10)$$

(10)식에서 Z_{mn} 은 원통형 셸 표면속도 Ω_{mn} 과 원통형 셸 표면에서의 음압 p_m 사이의 관계를 나타내는 값으로 유체 영향 계수(Fluid loading coefficient) 라고 한다. 이때 Z_{mn} 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z_{mn} = \rho c(R_{mn} + i\alpha M_{mn}) \qquad (11)$$

이때 α 는 ka 로 무차원 값이다. 식(11)에서 R_{mn} 은 Resistance를 나타내며, M_{mn} 은 질량 Reactance 를 나타낸다. 이들 R_{mn} , M_{mn} 계산시 Hankel 함수의 인자 μa, $\mu^* a$ 대신 무차원 수인 η, η^* 를 이용하고, 변수 βa 는 무차원 수 ξ 를 이용하면 다음과 같다.

$$R_{mn} = \left(\frac{1}{\epsilon_q}\right)\left(\frac{4}{\pi^2}\alpha\right)\left(\frac{a}{L}\right)\int_0^{\alpha}\frac{\Phi_m(\xi)\,d\xi}{\eta^2|H_n^{'(2)}(\eta)|^2}$$

$$M_{mn} = \left(\frac{1}{\epsilon_q}\right)\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{a}{L}\right)\Bigg[\int_0^{\alpha}\Phi_m \times \frac{J_n(\eta)J_n^{'(2)}(\eta)+Y_n(\eta)Y_n^{'(2)}(\eta)}{\eta|H_n^{'(2)}(\eta)|^2}\,d\xi + \int_{\alpha}^{\infty}\Phi_m(\xi)\frac{K_n(\eta^*)}{\eta^* K_n^{'}(\eta^*)}\,d\xi\Bigg]$$

$$\Phi_m(\xi) = \frac{\xi^2}{(\xi^2-K_m^2)(\xi^2-K_r^2)}[1+(-1)^{m+r}] \times [1-(-1)^m\cos(L\xi/a)]$$

단, $$K_m = \left(\frac{m\pi a}{L}\right),\ K_r = \left(\frac{r\pi a}{L}\right) \qquad (12)$$

식(12)를 참고문헌 [1]에서 제시한 SINE 급수를 이용하여 구한 유체 영향계수와 비교하여 보면, SINE 급수를 이용하는 경우 함수 $\Phi_m(\xi)$ 의 분자항에서 $K_m \times K_r$ 이 되나, 본 연구에서와 같이 COSINE 급수를 이용하는 경우는 $\xi \times \xi$ 가 되는 차이점이 있음을 알 수 있다. 또한 $\Phi_m(\xi)$ 로부터 m+r=짝수 인 경우에만 유체 영향계수의 값이 존재한다는 사실과 Z_{rmn} 값과 Z_{mrn} 값이 서로 같게 되는 상반성질(Reciprocity)을 갖는 것도 알 수 있다. 식(12)에 대한 해석적인 해를 구하기는 어려우므로 수치 적분 방법을 이용하여야 한다. 이를 위하여 참고문헌[1]에서 제시한 변수변환법을 적용하였다. 즉 다음과 같은 매개변수를 이용하면

$$\xi = \begin{cases} \alpha\sin\theta & 0\le\xi\le\alpha \\ (\alpha^2+\lambda^2\sin^2\theta)^{(1/2)} & \alpha\le\xi\le(\alpha^2+\lambda^2)^{(1/2)} \\ (\alpha^2+\lambda^2\sec^2\theta)^{(1/2)} & (\alpha^2+\lambda^2)^{(1/2)}\le\xi\le\infty \end{cases}$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \qquad (13)$$

이때 λ 를 확대 계수(Scale Parameter)라고 한다. (13)식을 (12)식에 대입하고 정리하면 R_{mn} 부분과 관련된 함수 1개와 M_{mn} 부분과 관련된 함수 3개등 총 4개의 함수 형태로 표시된다. 이들을 각각 $F^i_{mn}(\theta;\alpha)$, i=1,⋯,4 라고 하면 R_{mn} , M_{mn} 는 다음과 같다.

$$R_{mn} = \left(\frac{a}{L}\right)\int_0^{\pi/2}F^1_{rmn}(\theta;\alpha)d\theta$$

$$M_{mn} = \left(\frac{a}{L}\right)\int_0^{\pi/2}\left\{\sum_{i=2}^{4}F^i_{rmn}(\theta;\alpha)\right\}d\theta \qquad (14)$$

식(14)을 푸는 수치해법은 여러 가지가 있으나 본 연구에서는 Fourth-order Runge-Kutta 방법을 이용하였다. 이때 필요한 초기조건 값들은 아래와 같다.

$$F^1_{rmn}(0;0) = F^2_{rmn}(0;0) = F^3_{rmn}(0;0) = F^4_{rmn}(0;0) = 0$$

$$F^1_{rmn}(0;\alpha) = F^2_{rmn}(0;\alpha) = F^3_{rmn}(0;\alpha) = F^4_{rmn}(0;\alpha) = 0$$

$$F^1_{rmn}(\theta;0) = 0$$

$$F^2_{rmn}(\theta;0) = 0$$

$$F^3_{rmn}(\theta;0) = \left(\frac{1}{\epsilon_q}\right)\left(-\frac{2}{\pi}\right)\Phi_{rm}(\lambda\sin\theta) \times \frac{K_n(\lambda\sin\theta)\cos\theta}{\sin\theta K_n^{'}(\lambda\sin\theta)}$$

$$F^4_{rmn}(\theta;0) = \left(\frac{1}{\epsilon_q}\right)\left(-\frac{2}{\pi}\right)\Phi_{rm}(\lambda\sec\theta) \times \frac{K_n(\lambda\sec\theta)\tan\theta}{K_n^{'}(\lambda\sec\theta)} \qquad (15)$$

3. 수치 계산 결과 및 검토

본 연구에서 이용한 해석방법의 타당성을 살펴보기 위하여 SINE 급수를 이용한 해석결과들[1,2,3]과 비교하였다. Fig.2 는 COSINE 급수를 이용하여 자기모드(Direct mode)에 대한 해석결과를 Resistance와 Reactance항으로 나타낸 그림이며, Fig.3 은 SINE 급수를 이용하여 B.E.Sandman 이 제시한 해석 결과[1]를 나타낸 그림이다. Fig.4 는 COSINE 급수를 이용하여 Direct mode에 대한 해석 결과를 Resistance와 React-ance항에 무차원 파수(Non-dimensional wave number)를 곱한 값으로 나타낸 그림이며, Fig.5 는 SINE 급수를 이용하여 P.R.Stepanishen 이 제시한 해석 결과[2,3]를 나타낸 그림이다. 이 결과 COSINE 급수를 이용한 해석 결과에서 높은 무차원 파수 ka 값 대역에서는 약간의 변동치들을 보이고 있으나 Reactance 값은 0 으로, Resistance 값은 1 로 접근하는 경향을 보이고 있어 본 연구에서 이용한 해석방법도 원통형 몰수체의 음압복사(Sound radiation)를 계산하는데 유용하게 사용될 수 있음을 알 수 있다.

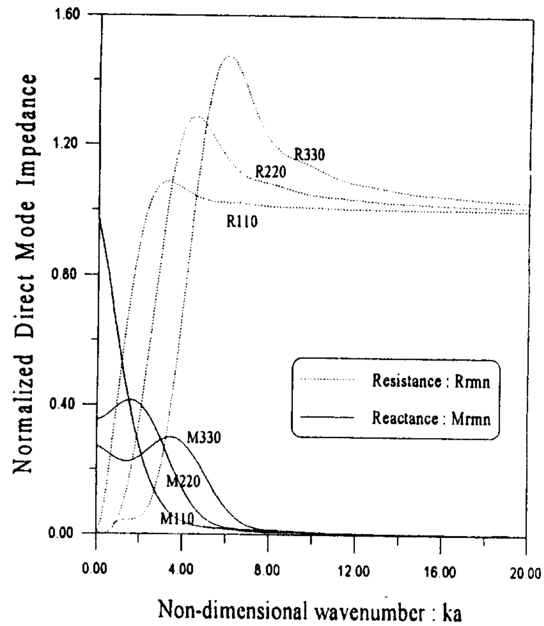

FIg.3 Fluid loading coefficients using SINE series for a cylindrical shell with a/L=0.5

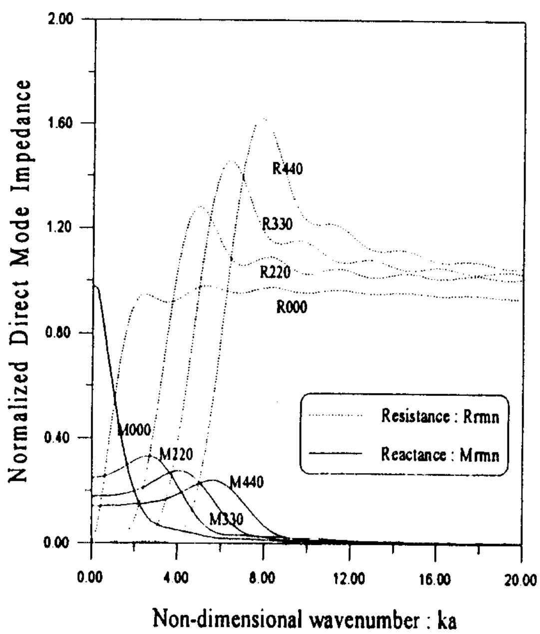

FIg.2 Fluid loading coefficients using COSINE series for a cylindrical shell with a/L=0.5

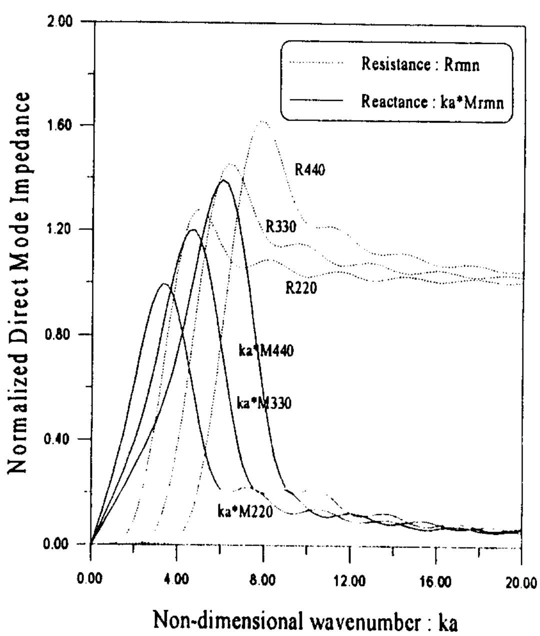

FIg.4 Fluid loading coefficients with ka using COSINE series for a cylindrical shell with a/L=0.5

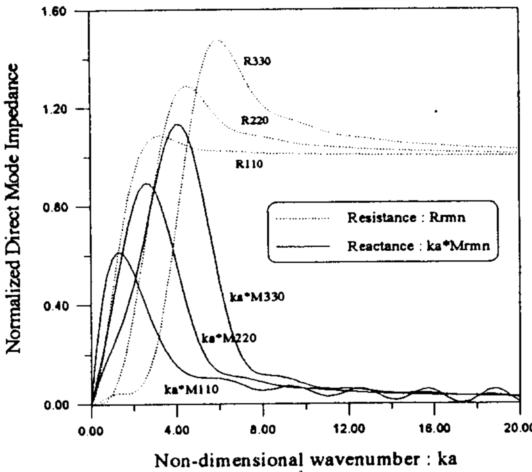

FIg.5 Fluid loading coefficients with ka using SINE series for a cylindrical shell with a/L=0.5

FIg. 6 에는 COSINE 급수와 SINE 급수를 이용한 Cross mode 에 대한 결과를 나타내었다. 이로부터 Cross mode 에서는 음을 방사하는 음압과 속도의 위상이 일치하지 않으며, ka 값이 증가함에 따라 0 으로 접근하므로 높은 ka 영역에서는 Cross mode가 음압복사에 영향을 주지 못하는 것을 알 수 있다. 따라서 높은 ka 영역에서의 음압복사 해석시 Cross mode 를 심각하게 고려하지 않아도 된다는 사실을 알 수 있다.

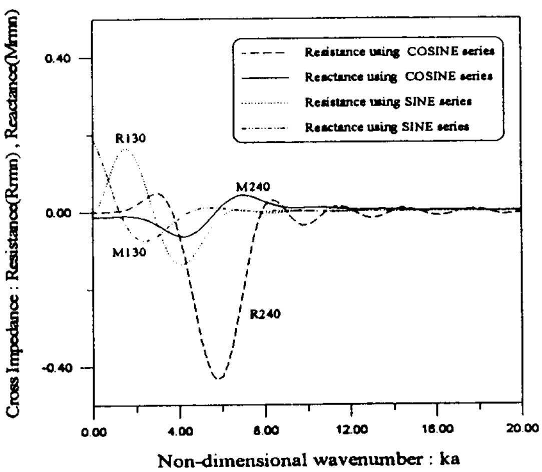

Fig.6 Cross mode impedances using COSINE and SINE series, respectively

FIg.7 과 FIg.8 에는 COSINE 급수를 이용하여 원주방향 진동모드(n=2, 8)와 길이방향 진동모드(r=2, 4, m=2, 4)에 대한 자기모드 Impedance의 계산 결과를 수록하였다. 이 결과 원주방향과 길이방향으로 고차 모드로 갈수록 높은 파수(Wavenumber)에서 최대값이 나타내고 있으며 이는 고차모드의 영향을 보여주는 것이다. 또한 파수가 커짐에 따라 Reactance 항이 감소하므로 임피던스는 Resistance에 지배받고 있음을 알 수 있다.

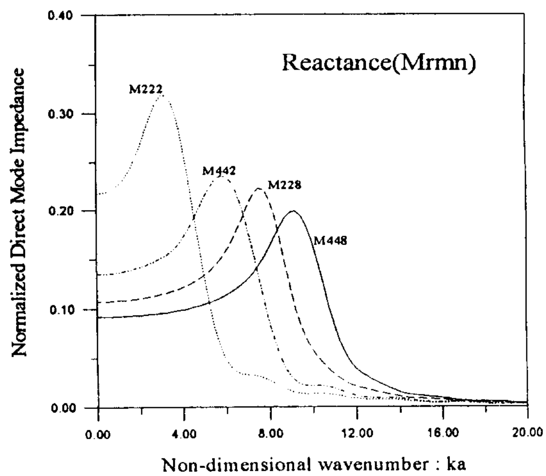

Fig.7 Reactance in accordance with structural mode number(r,m) with a/L=0.5

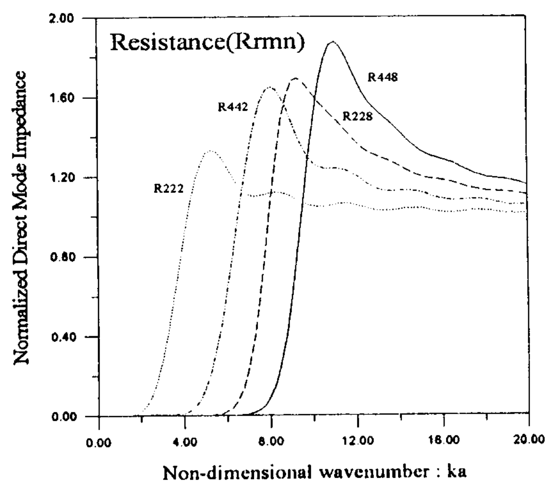

Fig.8 Resistance in accordance with structural mode number(r,m) with a/L=0.5

4. 결 론

COSINE 급수를 이용한 유한 길이 원통형 셸의 유체 영향계수에 대한 해석 결과를 양단 단순지지 조건(Simply-supported condition)을 갖는 해석모델에서 이용한 SINE 급수를 적용한 해석 결과와 비교, 검토한 결과 유사한 경향을 보이고 있으며, 무차원 파수 ka 값이 커질수록 Reactance는 0 으로 접근하고 Resistance는 ρc 값으로 접근하는 경향을 가지고 있어 타당한 해석방법임을 알 수 있었다. 따라서 양단에 끝막이 판을 갖고 있는 원통형 셸에 대한 음압복사 현상을 해석하는데 COSINE 급수를 이용하는 것이 가능함을 본 연구를 통하여 확인하였다. 또한 본 연구에서 유도한 Z_{mn} 값을 이용하면 양단에 끝막이 판을 갖고 있는 원통형 셸에서의 유체 효과를 용이하게 해석할 수 있다.

5. 참고 문헌

1. Sandman.B.E., 1976, "Numerical fluid loading coeffi-cients for the modal velocities of a cylindrical shell", Computers & Structures, vol.6, pp.467-473

2. Stepanishen,P.R., 1978, "Radiated power and radia-tion loading of cylindrical surfaces with nonuniform velocity distribution", J.Acoust.Soc.Am., vol.63, no.2, pp.328-338

3. Stepanishen,P.R., 1982, "Modal coupling in the vibr-ation of fluid loaded cylindrical shells", J.Acoust. Soc.Am., vol.71, no.4, pp.813-823

4. Laulagnet,B.,and Guyader,J.L.,1989, "Modal analysis of a shell's acoustic radiation in light and heavy fluids", Journal of Sound and Vibration, vol.131, no.3, pp.397-415

5. Harari,A.,and Sandman,B.E., 1990, "Radiation and vibrational properties of submerged stiffened cylindri-cal shells", J.Acoust.Soc.Am., vol.88, no.2, pp.1817-1830

6. Harari,A., Sandman,B.E.,and Zaldonis,J.A., 1990, "Analytical and experimental determination of the vibration and pressure radiation from a submerged, stiffened cylindrical shell with two end plates", J.Acoust.Soc.Am., vol.95, no.6, pp.3360-3368

7. Junger,M.C.,and Feit,D., 1986, "Sound,structure and their interaction, second edition", The MIT Press, pp. 168-169