한국소음진동공학회 1995년도 춘계학술대회논문집 pp. 147-152

회귀적 방법에 의한 모우드 변수 규명에 관한 연구

[0]고 장 욱*, 이 재 응**

(A Study on the Recursive Identification of Modal Parameters)

(Jang-Wook Koh, Jae-Eung Lee)

1. 서론

실험에 의한 모우드 해석 방법들은 1980년대부터 활발히 연구되어 많은 새로운 방법들이 개발되어 발표되었다. 그러나 개발된 대부분의 방법들은 측정된 데이타를 일괄처리하는 밸치(또는 off-line)방법들이다. 최근에는 시간에 따라서 변하는 구조물의 동특성을 규명하는 분야에 모우드 해석 방법이 응용되어 사용되고 있다. 이러한 응용분야에서는 모우드 변수들의 변화되는 값을 새로운 데이타가 샘플링 될 때마다 그 값들을 수정하면서 추정할 수 있는 회귀적인(recursive 또는 on-line) 방법을 사용하여야 한다.

Davies와 Hammond[1]는 회귀적 선형 자승법(Recursive Least Squares : RLS)을 이용하여 모우드 변수를 구하고 이를 밸치방법인 Instrumental Variable 방법과 Fourier 방법의 결과와 비교하였다. 그러나, 그 결과에서 보여준것처럼 RLS 방법은 잡음 대 신호비가 낮을 때에만 모우드 변수 값들을 정확하게 추정할 수 있었다.

Sundararajan과 Montgomery[2]는 회귀적 선형 최소자승 격자필터(lattice filter)를 이용하여 구조물의 차수(order)와 고유진동형, 그리고 진폭을 결정한 후 이를 토대로 회귀적 gradient형태의 방정식 오차 규명 방법(equation-error identification algorithm)에 의하여 모우드 변수들을 추정하였다. 이 방법은 2차원 격자구조물의 모우드 변수 추정에 사용되었으며, 또한 적응모우드제어에도 성공적으로 이용되었다. 그러나, 이 방법도 잡음 대 신호비가 낮은 환경에서만 사용할 수 있다는 단점이 있다.

위에서 언급한 방법들은 모두 RLS 방법을 기초로 하여 개발되었으나, RLS 방법은 전형적인 결정적(deterministic)방법으로서 잡음이 섞인 데이타를 처리하기에는 부적절한 방법임이 널리 알려진 사실이다[3]. 최근에 Ben Mrad와 Fassois[4]는 신호에 잡음이 존재하여도 이를 잘 처리할 수 있는 확률적(stochastic) 방법을 개발하여 기존의 결정적 방법들과 그 결과를 비교하였다. 그러나, 개발된 방법은 응답신호에 백색잡음(white noise)이 섞이는 특수한 경우에만 사용할 수 있게 만들어져서 이 방법의 실질적인 적용에는 어려움이 있다.

본 연구에서는 기존의 방법들의 단점을 극복할 수 있는 새로운 회귀적 모우드 변수 규명 방법을 개발하였다. 이는 Fassois와 Lee가 ARMAX모델의 계수를 효율적으로 추정하기 위하여 개발한 밸치방법인 Suboptimum Maximum Likelihood 방법[5]을 기초로 하여 개발하였다. 개발된 방법의 장점은 응답 신호에 유색잡음이 존재하여도 모우드 변수들을 항상 정확하게 구할 수 있으며, 또한 알고리즘의 안정성이 보장된 것이다.

2. 모우드 해석 방법의 기초 이론

2.1. 점성감쇠 진동 시스템의 운동방정식

선형, 점성감쇠 구조물의 동특성은 다음과 같은 미분방정식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{u}}(t)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{1}$$

여기서, $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$는 구조물의 질량, 점성감쇠, 강성 행렬을 나타내며, $\mathbf{f}(t)$는 가진력 함수, $\mathbf{u}(t)$는 응답 변위 벡터를 나타낸다. 식 (1)은 라플라스 영역(Laplace domain)으로 다음과 같이 변환된다.

$$\mathbf{U}(s)=\left[\mathbf{M}s^2+\mathbf{C}s+\mathbf{K}\right]^{-1}\cdot\mathbf{F}(s)=\mathbf{G}(s)\cdot\mathbf{F}(s) \tag{2}$$

여기서, $\mathbf{G}(s)$는 시스템의 전달함수 행렬을 나타낸다.

* 중앙대학교 대학원 기계공학과
** 중앙대학교 공과대학 기계공학과

2.2. ARMAX 모델과 모우드 변수와의 관계

실제 진동 실험에서는 측정된 데이타에 잡음이 섞이기 마련이므로 모우드 변수들의 값을 정확하게 구하기 위해서는 데이타에 섞인 잡음특성도 고려하여야 한다. 본 연구에서는 응답 변위 신호에 잡음이 섞이는 문제를 고려하였다. 잡음이 섞인 응답 변위 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다 :

$$y[t] = u[t] + n[t] = G(B)\cdot f[t] + n[t] \tag{3}$$

여기서, $f[t]$는 일정하게(uniformly) 샘플링된 가진력 신호, $u[t]$는 응답 변위 신호, $y[t]$는 잡음이 섞인 응답 변위 신호, 그리고 $n[t]$는 평균값이 0인 잡음 신호로 $f[t]$와는 독립적인 신호이다. 또한 $G(B)$는 이산 시간 영역(discrete time domain)에서 표시된 전달함수이고, B는 backshift operator로서 $B^j \cdot y[t] = y[t-j]$로 정의된다. 만일 잡음 $n[t]$가 유리함수의 스펙트럼 밀도(rational spectral density)를 갖는 유색잡음(colored noise)이라고 가정하면 식 (3)은 표준 ARMAX(na, nd, nc)모델 :

$$A(B)\cdot y[t] = D(B)\cdot f[t] + C(B)\cdot w[t] \tag{4}$$

로 표현될 수 있다. 여기서, ARMAX는 AutoRegressive Moving Average with eXogenous input의 약자이고, $w[t]$는 평균값이 0인 백색잡음(white noise)이며, autoregressive(AR), exogenous(X), moving average(MA) 다항식인 $A(B)$, $D(B)$, $C(B)$는 각각 :

$$A(B) \equiv 1 + a_1 \cdot B + \cdots + a_{na} \cdot B^{na} \tag{5}$$

$$D(B) \equiv d_0 + d_1 \cdot B + \cdots + d_{nd} \cdot B^{nd} \tag{6}$$

$$C(B) \equiv 1 + c_1 \cdot B + \cdots + c_{nc} \cdot B^{nc} \tag{7}$$

로 표현된다.

식 (3)과 (4)를 비교해 보면, $D(B)/A(B)$는 이산 시간 전달함수 $G(B)$를, $C(B)/A(B)$는 잡음의 동특성을 나타냄을 알 수 있다. 따라서 ARMAX모델은 구조물의 동특성뿐만 아니라 잡음의 동특성도 동시에 표현할 수 있으며, 응답 신호에 잡음이 섞인 진동 실험 데이타로부터 모우드 변수들을 추정하는데 효율적으로 사용될 수 있는 확률적(stochastic) 모델이다.

2.3. 모우드 추정 방법

연속 시간 전달함수와 등가인 이산 시간 전달함수 사이의 관계는 유일(unique)하지 않고 변환원리의 선택에 따라 다르게 표현되며, 따라서 모우드 변수들을 구하는 식도 다르게 표현된다. 임펄스 불변 원리(impulse invariance principle)[6]를 이용하면 두 전달함수간의 관계는 다음과 같이 표현될 수 있다 :

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(r_k + r_k^*)s - (r_k \ln\lambda_k^* + r_k^* \ln\lambda_k)T^{-1}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_{nk}s + \omega_{nk}^2} \\ \Leftrightarrow\ G(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(r_k + r_k^*) - (r_k\lambda_k^* + r_k^*\lambda_k)B}{1 - (\lambda_k + \lambda_k^*)B + \lambda_k\lambda_k^* B^2} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서, ω_{nk}, ζ_k는 모우드 k의 고유진동수와 감쇠계수를 나타내며, (r_k, r_k^*)는 연속 시간 전달함수의 공액 복소 residues, (λ_k, λ_k^*)는 이산 시간 전달함수의 고유치, T는 샘플링 간격을 각각 나타낸다.

따라서, k번째 모우드의 고유진동수와 감쇠계수는 다음의 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\omega_{nk} = \frac{1}{T}\sqrt{\left[\frac{\ln(\lambda_k\lambda_k^*)}{2}\right]^2 + \left[\cos^{-1}\left(\frac{\lambda_k + \lambda_k^*}{2\sqrt{\lambda_k\lambda_k^*}}\right)\right]^2} \tag{9}$$

$$\zeta_k = \sqrt{\frac{\left[\ln(\lambda_k\lambda_k^*)\right]^2}{\left[\ln(\lambda_k\lambda_k^*)\right]^2 + 4\left[\cos^{-1}\left(\frac{\lambda_k + \lambda_k^*}{2\sqrt{\lambda_k\lambda_k^*}}\right)\right]^2}} \tag{10}$$

3. ARMAX모델 계수 추정을 위한 회귀적 방법

앞장에서 언급한 바와 같이 구조물의 모우드변수들은 그 구조물의 동특성을 나타낼 수 있는 이산시간 전달함수로부터 구할 수 있다. 따라서 모우드 변수들을 회귀적으로 구하기 위해서는 ARMAX모델의 계수를 회귀적으로 규명할 수 있는 방법이 우선적으로 요구된다.

본 연구에서는 Fassois와 Lee가 ARMAX모델의 계수를 효율적으로 추정하기 위하여 개발한 뱉치 방법인 Suboptimum Maximum Likelihood (SML) 방법[5]을 기초로 하여 회귀적 방법을 개발하였다. SML 방법은 Maximum Likelihood방법의 단점들을 극복하면서 이 방법에 준하는 정확한 추정 결과를 제공해 줄 수 있으며, 신뢰성이 높고 안정성이 보장된, 계산상 매우 효율적인 선형 다단계 계수 추정 방법이다.

3.1. 회귀적 방법에 의한 ARMAX계수 추정

표준 ARMAX(na, nd, nc)모델은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A(B,\theta)\cdot y[t]=D(B,\theta)\cdot x[t]+C(B,\theta)\cdot e[t|\theta] \tag{11}$$

$$\theta=\left[a_1 \cdots a_{na}\ d_1 \cdots d_{nd}\ c_1 \cdots c_{nc}\right]^T \tag{12}$$

여기서, θ는 추정하고자 하는 계수 벡터이고, $e[t|\theta]$는 모델의 예측오차(prediction error)를 나타낸다.

계수 벡터 θ를 추정하기 위해서는 비선형 최적화 방법을 사용하여야 하지만 본 연구에서 제안하는 방법은 계수 추정 과정을 선형 최소자승법(Linear Least Squares Method : LLS)을 반복하여 사용하는 다단계의 선형 최적화 방법이다.

계수 벡터 추정 과정에서 나타나는 비선형성은 다항식 $C(B)$로부터 기인하므로 제안된 방법에서는 우선 계수 벡터 θ에서 $C(B)$의 계수를 분리시켜 계수 벡터를 다음과 같이 재정의하였고 :

$$\theta\equiv\left[\phi^T \vdots \mathbf{c}^T\right]^T\equiv\left[a_1 \cdots a_{na}\ d_1 \cdots d_{nd} \vdots c_1 \cdots c_{nc}\right]^T \tag{13}$$

ϕ와 $\mathbf{c}$를 개별적으로 선형적 방법으로 추정하였다.

본 연구에서 제안하는 다단계 선형 방법은 다음과 같다.

□ Step 1 : ARX계수 추정.

식 (11)의 ARMAX모델은 ARX(∞,∞)모델로 표현될 수 있으나, 적절한 차수 p를 선정함으로써 다음과 같은 ARX 모델로 표현될 수 있다.

$$H_y(B,\mathbf{h})\cdot y[t]=H_x(B,\mathbf{h})\cdot x[t]+e_p[t|\mathbf{h}] \tag{14}$$

여기서, $H_y(B,\mathbf{h})$와 $H_x(B,\mathbf{h})$는 각각 다음과 같이 표현되는 p차 다항식이고,

$$H_y(B,\mathbf{h})\equiv 1+h_{y1}B+\cdots+h_{yp}B^p \tag{15}$$

$$H_x(B,\mathbf{h})\equiv h_{x1}B+\cdots+h_{xp}B^p \tag{16}$$

$e_p[t|\mathbf{h}]$는 ARX모델의 예측오차이며, $\mathbf{h}$는 다음과 같은 계수 벡터이다.

$$\mathbf{h}\equiv\left[h_{y1} \cdots h_{yp}\ \ h_{x1} \cdots h_{xp}\right]^T \tag{17}$$

식 (14)의 ARX모델을 선형회귀(linear regression) 형태로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y[t]=\psi_h^T[t]\cdot\mathbf{h}+e_p[t|\mathbf{h}] \tag{18}$$

$$\psi_h[t]\equiv\left[-y[t-1]\cdots-y[t-p] \vdots -x[t-1]\cdots-x[t-p]\right]^T \tag{19}$$

위의 식 (18)에서의 측정값과 모델의 예측값사이의 차이인 예측오차는 다음과 같다.

$$e_p[t|\mathbf{h}]\equiv\varepsilon[t]\equiv y[t]-\psi_h^T[t]\cdot\hat{\mathbf{h}}[t-1] \tag{20}$$

여기서, $\hat{\mathbf{h}}[t-1]$은 $[t-1]$시간에서 추정한 계수 벡터이다.

식 (17)에서 정의된 계수 벡터 $\mathbf{h}$는 RLS(Recursive Least Squares) 방법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{h}}[t]=\hat{\mathbf{h}}[t-1]+\mathbf{K}[t]\cdot\varepsilon[t] \tag{21.a}$$

$$\mathbf{K}[t]=\mathbf{P}[t]\psi_h[t]=\frac{\mathbf{P}[t-1]\psi_h[t]}{\lambda[t]+\psi_h^T[t]\mathbf{P}[t-1]\psi_h[t]} \tag{21.b}$$

$$\mathbf{P}[t]=\frac{\mathbf{P}[t-1]}{\lambda[t]}-\frac{\mathbf{P}[t-1]\psi_h[t]\psi_h^T[t]\mathbf{P}[t-1]}{\lambda[t]+\psi_h^T[t]\mathbf{P}[t-1]\psi_h[t]}\cdot\frac{1}{\lambda[t]} \tag{21.c}$$

$$\lambda[t]=\lambda_0\lambda[t-1]+(1-\lambda_0) \tag{21.d}$$

여기서, $\mathbf{K}[t]$는 적응이득(adaptation gain) 벡터, $\mathbf{P}[t]$는 공분산(covariance) 행렬, $\lambda[t]$는 망각계수(forgetting factor)를 의미한다.

□ Step 2 : MA계수의 초기치 추정

초기화 단계에서 필요한 MA계수 $\mathbf{c}$의 초기추정치 $\hat{\mathbf{c}}_0$는 이전 단계에서 추정한 계수 벡터 $\hat{\mathbf{h}}$의 $h_{y1}\cdots h_{yp}$항을 이용하여 다음과 같은 선형 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{j}\hat{c}_{k0}\cdot\hat{h}_{y(j-k)}=0 \qquad (j>na) \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{y(l-nc)} & \hat{h}_{y(l-nc-1)} & \cdots & \hat{h}_{y(l-2nc+1)} \\ \hat{h}_{y(l-nc+1)} & \hat{h}_{y(l-nc)} & \cdots & \hat{h}_{y(l-2nc+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_{y(l-1)} & \hat{h}_{y(l-2)} & \cdots & \hat{h}_{y(l-nc)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \hat{c}_{10} \\ \hat{c}_{20} \\ \vdots \\ \hat{c}_{nc0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\hat{h}_{y(l-nc+1)} \\ -\hat{h}_{y(l-nc+2)} \\ \vdots \\ -\hat{h}_{yl} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_y\cdot\hat{\mathbf{c}}_0=\mathbf{h}_y$$

여기서, $l\ge na+nc$이다.

□ Step 3 : AR and X parameter estimation. (계수 ϕ의 추정)

식 (11)의 ARMAX모델과 동등한 표현식으로 다음과 같이 다시 모델을 표현할 수 있다:

$$A(B,\phi)\cdot y^F[t|\hat{\mathbf{c}}]=D(B,\phi)\cdot x^F[t|\hat{\mathbf{c}}]+e'[t|\phi,\hat{\mathbf{c}}] \tag{24}$$

여기서, $e'[t|\phi,\hat{\mathbf{c}}_0]$는 식 (24)의 모델의 예측오차를 나타내고, ϕ는 다음과 같은 계수 벡터이며:

$$\phi\equiv\left[a_1 \cdots a_{na}\ d_1 \cdots d_{nd}\right]^T \tag{25}$$

필터링된 신호 $x^F[t]$, $y^F[t]$는 각각 다음과 같다 :

$$x^F[t|\hat{\mathbf{c}}]\equiv x^F[t]\equiv\frac{x[t]}{\hat{C}(B)} \tag{26.a}$$

$$y^F[t|\hat{\mathbf{c}}]\equiv y^F[t]\equiv\frac{y[t]}{\hat{C}(B)} \tag{26.b}$$

식 (24)을 선형회귀(linear regression) 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$y^F[t] = \psi^T[t]\cdot\phi + e'[t|\phi,\hat{c}] \tag{27}$$

$$\psi[t] \equiv \left[-y^F[t-1]\cdots - y^F[t-na] \vdots \; -x^F[t-1]\cdots - x^F[t-nd]\right]^T \tag{28}$$

위의 식 (27)에서의 측정값과 모델의 예측값사이의 차이인 예측오차는 다음과 같다.

$$e'[t|\phi,\hat{c}] \equiv \varepsilon'[t] \equiv y^F[t] - \psi^T[t]\cdot\hat{\phi}[t-1] \tag{29}$$

여기서 $\hat{\phi}[t-1]$은 $[t-1]$시간에서 추정한 계수 벡터이다.

계수벡터 ϕ는 RLS(Recursive Least Squares) 방법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\phi}[t] = \hat{\phi}[t-1] + \mathbf{K}[t]\cdot\varepsilon'[t] \tag{30.a}$$

$$\mathbf{K}[t] = \mathbf{P}[t]\psi[t] = \frac{\mathbf{P}[t-1]\psi[t]}{\lambda[t] + \psi^T[t]\mathbf{P}[t-1]\psi[t]} \tag{30.b}$$

$$\mathbf{P}[t] = \frac{\mathbf{P}[t-1]}{\lambda[t]} - \frac{\mathbf{P}[t-1]\psi[t]\psi^T[t]\mathbf{P}[t-1]}{\lambda[t] + \psi^T[t]\mathbf{P}[t-1]\psi[t]}\cdot\frac{1}{\lambda[t]} \tag{30.c}$$

$$\lambda[t] = \lambda_0\lambda[t-1] + (1-\lambda_0) \tag{30.d}$$

☐ Step 4 : 최종 MA계수 추정치의 계산

각 샘플링 단계에서의 MA계수의 최종값은 다음과 같은 선형방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{j}\hat{c}_k\cdot\hat{h}_{y(j-k)} = \hat{a}_j \qquad (j = 1\ldots nc) \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_{y1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{h}_{y(nc-1)} & \hat{h}_{y(nc-2)} & \hat{h}_{y(nc-3)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \vdots \\ \hat{c}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 - \hat{h}_{y1} \\ \hat{a}_2 - \hat{h}_{y2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{nc} - \hat{h}_{ync} \end{bmatrix} \tag{32}$$

이상에서와 같이 프로그램은 첫번째 반복(iteration)에서 Step 1~4까지 실행한다. 그러나, 입・출력 신호가 매번 샘플링될 때마다 Step 1에서 ARX계수 벡터 $\hat{\mathbf{h}}$를 갱신하고, Step 3에서는 각 신호를 필터링한 후 이를 이용하여 계수 벡터 $\hat{\phi}$를 갱신하고, 마지막으로 Step 4에서 MA계수의 최종 추정치 $\hat{\mathbf{c}}$를 갱신하게 된다. Step 4에서 구한 MA계수는 다음 반복에서 새로 샘플링되는 신호를 필터링하는 단계(Step 3)에서 사용된다.

또한 Step 1과 Step 3에서 갱신되는 $\mathbf{P}[t]$에 대한 계산은 실시간(on-line) 해석방법에서 중요시되는 알고리즘의 수행속도, 메모리 요구량 등에 가장 큰 영향을 끼치는 요인이 된다. 본 연구에서는 'Bierman's UD factorization 알고리즘 [7]'을 적용하였다. 이 방법은 각 순환단계에서 $\mathbf{P}[t]$가 항상 positive definite하게 유지되며, RLS 방법의 수치계산을 향상시키는 장점이 있다.

3.2. 수정된 필터링 방법

회귀적 규명 방법들은 아주 적은 수의 데이타로부터 계수 벡터를 추정하고 갱신하기 때문에 초기에 일시적으로 과도현상(transient behavior)을 갖게 된다. 이는 순환 알고리즘의 전반부에 소수의 데이타로부터 예측된 잡음특성의 추정치 $\hat{C}(B)$가 불완전한 값을 나타내기 때문이다. 따라서, 이후에 측정되는 데이타를 이같은 불완전한 $\hat{C}(B)$로 필터링하게 되면, $A(B), B(B)$다항식의 계수에 직접적으로 영향을 미치게 된다. 더구나 $\hat{C}(B)$가 불안정(unstable)하면, 필터링된 신호 $x^F[t], y^F[t]$는 발산하게 된다. 따라서, $\hat{C}(B)$는 항상 안정(stable 또는 minimum phase) 조건을 만족하여야 한다.

본 연구에서는 $\hat{C}(B)$가 항상 안정한 조건이 되도록 보장할 수 있는 방법도 개발하였다. 이는 Step 2에서 MA계수 $\mathbf{c}$의 초기값을 다음식에서 최소자승법을 이용하여 구하면 된다[6].

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{yna} & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{h}_{y(na+1)} & \hat{h}_{yna} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \hat{h}_{y(na+1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \hat{h}_{yna} \\ \hat{h}_{yp} & \vdots & \ddots & \hat{h}_{y(na+1)} \\ 0 & \hat{h}_{yp} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{h}_{yp} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_0/a_{na} \\ c_0/a_{na} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_0/a_{na} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{p+nc-na} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}_y\cdot\underline{\mathbf{c}}_0 = \delta + \varepsilon \tag{33}$$

$$\hat{\mathbf{c}}_0 = \hat{\underline{c}}_{00}^{-1}\cdot\hat{\underline{\mathbf{c}}}_0 = \hat{\underline{c}}_{00}^{-1}\cdot\left[\hat{\underline{c}}_{01}\,\hat{\underline{c}}_{02}\cdots\hat{\underline{c}}_{0nc}\right]^T \tag{34}$$

4. 모의실험

본 장에서는 컴퓨터 모의실험을 통하여 본 연구에서 제안한 알고리즘의 성능을 평가하고자 한다.

Figure 1.과 같은 2자유도 점성감쇠 진동 시스템에서 시스템의 고유진동수가 서로 잘 분리된(well-separated) 경우와 시스템의 고유진동수가 서로 근접한(colsely-spaced) 경우에 대하여 모의 실험을 수행하였다. 각각의 경우에 대해 수렴속도와 잡음을 잘 처리하여 정확하게 모우드변수를 추출해내는 능력을 이론치와 비교하여 추정치의 정확도를 평가하였다.

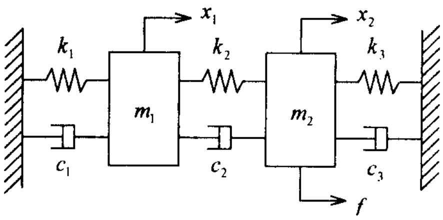

Figure 1. The two degree of freedom structural system

모의실험에 사용한 가진력 신호는 평균값이 0이고 분산이 1인 Gaussian white noise 신호이며, 이에 따른 응답 변위 신호는 운동방정식을 "Wilson-θ" 방법에 의해 직접 적분하고, 주어진 샘플링 간격에 따라 샘플링하였다. 또한 잡음이 섞인 응답신호는 앞에서 구한 응답신호에 평균값이 0인 유색잡음을 더함으로써 구할 수 있다. 유색잡음은 가진력 신호와 독립적인 새로운 백색잡음신호를 필터를 통과시켜서 구할 수 있다. 이때, 잡음 대 신호비는 잡음의 표준편차(standard deviation) σ_n 대 잡음이 없는 응답신호의 표준편차 σ_u의 비로서 다음과 같이 정의하였다.

$$N / S \equiv \frac{\sigma_n}{\sigma_u} \times 100 \quad \% \tag{35}$$

4.1. 분리된 모우드의 경우

잘 분리된 모우드를 갖는 진동 시스템의 경우, 질량, 점성감쇠, 강성 계수들과 이론적인 모우드 변수값을 Table 1.에 나타내었다.

N/S비는 각각 0%, 5%, 10%인 경우를 고려하였고, ARMAX(4,3,3)을 사용하였다. 각각의 경우 샘플링 간격은 T=0.323 sec로 하였다.

Table 1.의 모우드 변수 추정 결과에서 볼 수 있듯이, 고유진동수와 감쇠계수는 세가지 경우 모두 매우 정확한 값으로 추정됨을 알 수 있다.

모우드 변수를 계산하는 과정에서 필요한 AR계수와 X계수의 수렴율은 잡음이 존재하는 조건하에서도 상당히 빠른 결과를 보였다. 각 계수들이 수렴하는 양상은 Figure 2.의 N/S=10%경우에서 볼 수 있다.

4.2. 근접한 모우드의 경우

이번에는 두개의 모우드가 매우 근접해 있는 진동 시스템에서 얼마나 이들 모우드를 정확하게 분리해서 추정할 수 있는가를 시험하여, 그 결과를 Table 2.에 나타내었다. 이 경우에서도 볼 수 있듯이 유색잡음이 섞인 높은 N/S비에서도 근접한 모우드를 정확하게 추정함을 알 수 있다.

Table 1. Modal parameter estimated by the proposed approach at different N/S ratios (Well-Separated Modes Case)

	Theoretical	Estimated Parameters		
	Parameters	N/S = 0 %	N/S = 5%	N/S = 10%
Natural Frequencies (Hz)	0.4009 0.7739	0.4008 0.7735	0.4008 0.7734	0.4008 0.7733
Damping Factors	0.0147 0.0284	0.0147 0.0283	0.0149 0.0282	0.0151 0.0282
Sampling Interval : 0.323 sec $m_1 = 2\,kg$, $m_2 = 1\,kg$ $c_1 = 0.1\,N\cdot s/m$, $c_2 = 0.2\,N\cdot s/m$, $c_3 = 0\,N\cdot s/m$ $k_1 = 30\,N/m$, $k_2 = 10\,N/m$, $k_3 = 0\,N/m$				

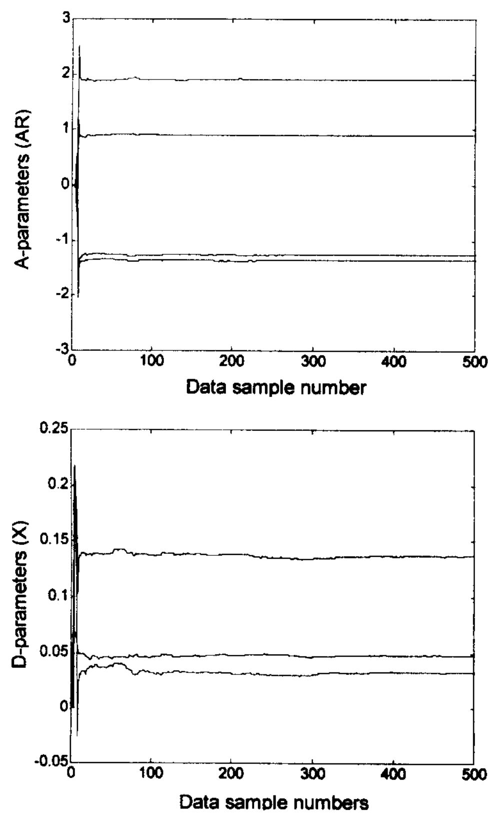

Figure 2. Model parameters estimated by the proposed approach for well-separated modes (N/S=10% case)

Table 2. Modal parameter estimated by the proposed approach at different N/S ratios (Closely-Spaced Modes Case)

	Theoretical Parameters	Estimated Parameters		
		N/S = 0 %	N/S = 5%	N/S = 10%
Natural Frequencies (Hz)	9.9383 10.2460	9.9322 10.2400	9.9330 10.2330	9.9389 10.2024
Damping Factors	0.0482 0.1776	0.0482 0.1773	0.0478 0.1780	0.0475 0.1791
Sampling Interval : 0.0244 sec $m_1 = 4.5\,kg$, $m_2 = 4.5\,kg$ $c_1 = 45\,N \cdot s/m$, $c_2 = 35\,N \cdot s/m$, $c_3 = 15\,N \cdot s/m$ $k_1 = k_3 = 17500\,N/m$, $k_2 = 600\,N/m$				

5. 결론

본 논문에서는 새로운 확률적 방법에 의한, 회귀적 모우드 변수 규명 방법을 개발하였다. 개발된 방법은 : (1)다단계 방법으로 그 계산 과정이 모두 선형화되어 선형 회귀적 최소자승법을 사용하였으며, (2)응답신호에 유색잡음이 존재하는 경우에도 이를 잘 처리하여 정확한 모우드 변수들을 제공할 수 있고, (3)알고리즘의 안정성이 항상 보장된 방법이다.

후기

이 논문은 1994년도 한국 학술 진흥 재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

[1] Davies, P., and Hammond, J. K., 1984, "A Comparison of Fourier and Parametric Methods for Structural System Identification," *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol.106, pp.40-48.

[2] Sundararajan, N., and Montgomery, R. C., 1985, "Experiments using Lattice Filters to Identify the Dynamics of a Flexible Beam," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.107, pp.187-191.

[3] Åström, J. K., and Eykhoff, P., 1971, "System Identification - A Survey," *Automatica*, Vol.7, pp.123-162.

[4] R. Ben Mrad, and S. D. Fassois, "Recursive Identification of Vibration Structures from Noise-Corrupted Observations, Part I : Identification Approaches," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.113, pp.354-361, 1991.

[5] S. D. Fassois, and J. E. Lee, "Suboptimum Maximum Likelihood Identification of ARMAX Process," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.112, pp.586-595, 1990.

[6] J. E. Lee, and S. D. Fassois, "Suboptimum Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Multiple-Excitation Vibration Data," *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.114, pp.260-271, 1992.

[7] L. Ljung, and T. Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*, the MIT Press, 1983.