

섬유강화 복합재료 적층 구조물 (외팔보형태)의 면진 및 제진

오 동 훈 *

Vibration Control of Cantilevered Structures Laminated of fiber-reinforced Composite Materials

Dong-Hoon Oh

1. 머리말

복합소재는 비강성이 우수하여 무게 감소를 중요시하는 수송기계분야 구조물의 재료로서 쓰임이 늘고 있다. 수송기계, 특히 항공분야에서 항공기 및 헬리콥터 날개등에 적용되고 있는바 기존의 금속재료로 구성된 구조물과 다른 동특성을 나타내고 있어 이에 대한 새로운 해석이 필요하게 되었고 대부분 대형구조물의 변위량이 커 운항시 저주파 진동이 발생되고 있는바, 이로 인해 피로 파괴에 이른다든지, 공기탄성학적 공명현상에 이르게 되지 않도록 하는 연구가 필요하게 되었다.

본 연구에서는 섬유강화 복합재료로 구성된 항공기 날개를 외팔보 형태 구조물로 모델링하고 동특성 해석을 위해 횡단변형 이론과 고전 적층판 이론을 적용, Rayleigh-Ritz 방법에 의한 진동해석을 수행한뒤 진동 발생시 효과적으로 제어할 수 있는 방법을 제시하고 시뮬레이션을 통하여 동특성 향상을 정량적으로 제시하였다.

진동을 제어하기 위한 방법으로서 수동적, 능동적 방법을 모두 사용하고 있는데, (보다 자세한 사항은 참고문헌 [12] 참조) 본 연구에서는 TMD (Tuned Mass Damper)를 사용하지 않고 복합소재 구조물의 성질을 이용한 彈性配列設計 (Structural Tailoring)로 수동적 의미의 면진효

과를 거둘 수 있게 하였다. 능동 제어의 경우 피드백(feedback) 제어를 이용, 이산 (discret) 작동기(actuator)를 통하여 외팔보의 휨 및 비틀림 모우드를 함께 제어하여 효과적인 제어를 설계하였다.

2. 운동방정식

복합재료 보의 기하학적 형상과 좌표계를 그림 1에 나타내었다. 항공기 날개를 참조하여 x-축은 코드 (c) 방향, y-축은 스패น (l) 방향을 가리키고 x,y-축은 보 중앙면에 접하고, z-축은 그 중앙면에서 수직인 두께(h) 방향을 취하였다. 적층각 (θ)는 x-축에서 y-축 회전방향울 양의 정수로 표현하였다. 변위기준이론 (displacement base theory)을 기초로 코드축 방향으로의 불변형을 가정하면 적층판의 변위장은 y-축 방향의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} u_1 &= z\theta(y; t) \\ u_2 &= v(y; t) + z(\psi + x\varphi) \\ u_3 &= w(y; t) - (x - x_0)\theta(y; t) \end{aligned} \quad (1)$$

v 는 y-축 방향의 변위이며 θ 은 x-축과 수직인 탄성축(x_0)의 비틀림각이고 $z(\psi + x\varphi)$ 는 단면의 워핑에 관계된 항이며, 수직변위함수 u_3 는 탄성축으로부터 측정된 수직변위 w 와 비틀림각 θ

* 삼성항공우주연구소

의 함수로 표현된다. 변형률-변위식 (2), 응력-변위 (3)의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} &= v_{,y} + z(\phi_{,y} + x\varphi_{,y}) \\ \gamma_{12} &= z(\theta_{,y} + \varphi) \\ \gamma_{23} &= \phi + x\varphi + w_{,y} - x\theta_{,y} + (x_0\theta)_{,y} \\ \epsilon_{11}, \epsilon_{33}, \gamma_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = K^2 \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}$$

(), $_{,y} \equiv \partial(\)/\partial y$ 이고 $zx\varphi_{,y}$ 은 뿌리끝에서의 워핑제한 (warping restraint)으로 인한 항이다.

\bar{Q}_{ij} 는 치환강성계수이며 K^2 는 전단보정계수로 본연구에서 5/6로 취함. $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ 은 내평면(in-plane) 응력이고 τ_{a3} ($a=1,2$) 횡전단응력이다. 위의 관계식 (2), (3)과 각종 (Kth layer)의 강성계수식 (4)을

$$\begin{pmatrix} A_{ij}^k \\ B_{ij}^k \\ D_{ij}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_{k+1} - z_k) \\ \frac{1}{2}(z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ \frac{1}{3}(z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{pmatrix} \bar{Q}_{ij}^k, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$A_{ij}^k = (z_{k+1} - z_k) \bar{Q}_{ij}^k \quad i, j = 4, 5 \quad (4)$$

(여기서 A는 인장강성계수, B는 인장/굽힘 연성계수, D는 굽힘강성계수) 해밀턴원리 (principles of Hamilton)에 적용하여 비선형 항들이 사소하다는 가정 아래 다음과 같은 운동방정식을 구하였다.

$$\begin{aligned} u: & [A_{22}v_{,y} + B_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + B_{22}\theta_{,y} + B_{22}\varphi]_{,y} \\ & = m_1\dot{v} + m_2\dot{\phi} + \frac{c}{2}m_2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi: & [B_{22}v_{,y} + D_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + D_{22}\theta_{,y} + D_{22}\varphi]_{,y} \\ & - [A_{55}\phi + \frac{c}{2}A_{55}\varphi + A_{55}w_{,y} + A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c}{2}A_{55}\theta_{,y}] \\ & = m_3\dot{\phi} + m_2\dot{v} + \frac{c}{2}m_3\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi: & [\frac{c}{2}\delta_w B_{22}v_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\phi_{,y} + \frac{c^2}{3}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\theta_{,y} + \frac{c}{2}D_{22}\varphi]_{,y} \\ & - [B_{22}v_{,y} + D_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}D_{22}\varphi_{,y} + D_{22}\theta_{,y} + D_{22}\varphi] \\ & - [\frac{c}{2}A_{55}\phi + \frac{c^2}{3}A_{55}\varphi + \frac{c}{2}A_{55}w_{,y} + \frac{c}{2}A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c^2}{3}A_{55}\theta_{,y}] \\ & = \frac{c^2}{3}m_3\dot{\varphi} + \frac{c}{2}m_2\dot{v} + \frac{c}{2}m_3\dot{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w: & [A_{55}\phi + \frac{c}{2}A_{55}\varphi + A_{55}w_{,y} + A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c}{2}A_{55}\theta_{,y}]_{,y} + P \\ & = m_1\dot{w} - (\frac{c}{2} - x_0)m_1\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta: & [B_{22}v_{,y} + D_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + D_{22}\theta_{,y} + D_{22}\varphi]_{,y} \\ & - [\frac{c}{2}A_{55}\phi + \frac{c^2}{3}A_{55}\varphi + \frac{c}{2}A_{55}w_{,y} + \frac{c}{2}A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c^2}{3}A_{55}\theta_{,y}]_{,y} \\ & + x_0[A_{55}\phi + \frac{c}{2}A_{55}\varphi + A_{55}w_{,y} + A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c}{2}A_{55}\theta_{,y}]_{,y} + T \\ & = [m_3 + (\frac{c^2}{3} - x_0c + x_0^2)m_1] \dot{\theta} - (\frac{c}{2} - x_0)m_1\dot{w} \end{aligned}$$

자유단의 경계조건은 다음과 같다.

$$u: A_{22}v_{,y} + B_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w B_{22}\varphi_{,y} + B_{22}\theta_{,y} + B_{22}\varphi = 0$$

$$\phi: B_{22}v_{,y} + D_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + D_{22}\theta_{,y} + D_{22}\varphi = 0 \quad (6)$$

$$\varphi: \frac{c}{2}\delta_w B_{22}v_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\phi_{,y} + \frac{c^2}{3}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\theta_{,y} + \frac{c}{2}D_{22}\varphi = 0$$

$$w: A_{55}\phi + \frac{c}{2}A_{55}\varphi + A_{55}w_{,y} + A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c}{2}A_{55}\theta_{,y} = 0$$

$$\begin{aligned} \theta: & B_{22}v_{,y} + D_{22}\phi_{,y} + \frac{c}{2}\delta_w D_{22}\varphi_{,y} + D_{22}\theta_{,y} + D_{22}\varphi \\ & - [\frac{c}{2}A_{55}\phi + \frac{c^2}{3}A_{55}\varphi + \frac{c}{2}A_{55}w_{,y} + \frac{c}{2}A_{55}(x_0\theta)_{,y} - \frac{c^2}{3}A_{55}\theta_{,y}] = 0 \end{aligned}$$

($\dot{\ } \equiv \partial(\)/\partial t$)로 간편화하였고 질량항들은

$$(m_1, m_2, m_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (7)$$

δ_w 는 워핑제한을 고려할 시 $\delta_w=1$, 프리워핑인

경우는 $\delta_w=0$ 가 된다. P 와 T 는 각각 수직힘

과 비틀림 모멘트를 나타냈다.

고전판이론에서는 횡전단변형이 일어나지 않고 무한대의 강성으로 취급하는바 식 (1)의 워핑에 관계되는 항을 다음과 같이 놓고

$$\phi = -w_{,y} - (x_0\theta)_{,y} \quad \text{and} \quad \varphi = \theta_{,y} \quad (8)$$

위와 같은 과정을 밟아 운동방정식을 유도한다.

3. 진동해석 / 면진 및 제진

연속 무한대의 자유도를 갖는 유연체의 동특성 해석을 위해 분포-변수 (distributed-parameter) 시스템으로 표현하면

$$\mathcal{L}u(y,t) + m\dot{u}(y,t) = f(y,t) \quad (9)$$

여기서 \mathcal{L} 과 m 은 각각 선형미분, 질량 연산자이다. 자유진동해석을 위해 감쇠비와 외력을 제외하고 이산화 과정(discretization process) 을 거쳐

$$M\dot{q} + Kq = 0 \quad (10)$$

고유진동치를 구하는 식 (11) 으로 귀결된다.

$$Ku = \omega^2 Mu \quad (11)$$

참고문헌 [11]에 강성행렬 K 과 질량행렬 M 을 Rayleigh-Ritz 방법에 의하여 구하였다.

능동 제어기 설계시 이산 작동기 사용을 고려하면 작동력은

$$f(y,t) = \sum_{i=1}^m F_i(t) \delta(y-y_i), \quad \langle y < l \quad (12)$$

이며 F_i 은 힘의 크기이며 $\delta(y-y_i)$ 은 Dirac delta 함수이다. 이를 아이겐 벡터의 직교성질을 이용 모달좌표계 η_r 로 표현하면 (13)

$$\ddot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = \sum_{i=1}^m U_r(y_i) P_i(t), \quad r=1,2,\dots,n$$

행렬형태를 취하면

$$\ddot{\eta}(t) + \Omega^2 \eta(t) = B^T P(t) \quad (14)$$

여기서

$$\Omega = \text{diag}(\omega_r), \quad r=1,2,\dots,n \\ B^T = [b^T_r] = [U_r(y_i)] \quad (15)$$

제어상 상벡터로 표현하면

$$\dot{z}(t) = Az(t) + BF(t) \quad (16)$$

여기서 행렬 A 와 B 는

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

Riccati 의 되먹임 제어법칙 (feedback control law) 식 (18) 을 적용하고

$$F(t) = -Gz(t) \quad (18)$$

최적제어론 (optimal control theory)에 준하여 다음의 수행지표 (performance index) 식(19) 를 최소화 하면

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (z^T Qz + F^T R F) dt \quad (19)$$

개인행렬식이 다음과 같이 구해진다.

$$G = R^{-1} B^T K \quad (20)$$

Riccati 관계식은

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0 \quad (21)$$

전체 시스템의 상태변수 방정식 (16) 의 맨오른쪽항은 입력벡터로 진동모우드를 제어할 수 있음을 보여준다. 상태행렬 A 는 복합체의 설계변수 즉, 적중과 및 적중형태에 의한 고유진동수 ω 에 의해 좌우되어 결정되므로 제어에 앞서 정확한 모델링에 의한 동특성 예측이 필요하다. 수동적의미의 제이로서 적중방향과 조절에 의해 보의 진동수를 높이므로서 보다 높아진 진동수에 작동기가 동작할 수 있게 되면 부하를 줄일 수 있게 됨을 알 수 있다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

다음과 같이 주어진 물성치를 가지고 수치해석을 수행하였다.

Table 1. Material properties and dimension of Graphite-Epoxy beam

E_1	$18.5 \times 10^6 \text{ psi}$
E_2	$1.6 \times 10^6 \text{ psi}$
ν_{12}	0.35
G_{12}	$0.832 \times 10^6 \text{ psi}$
G_{23}	$0.332 \times 10^6 \text{ psi}$
G_{13}	$0.332 \times 10^6 \text{ psi}$
ρ	0.056 lb/in^3
t	0.0053 in

그림 2와 3는 보의 길이가 $l=12\text{ in}$, $c=3\text{ in}$ 일때 횡전단변형이론에 근거하고 워핑제한을 고려한 상태에서의 진동해석에 따른 탄성배열설계 결과를 보여주고 있다. 탄성배열설계란 복합소재 섬유 방향성을 이용 적층함으로써 구조물 강성을 높일 수 있는 방식으로 많은 연구개발과 실용화가 진행되고 있다. 주어진 적층형태에 의하여 적층각을 0° 부터 90° 까지 변화시킨 결과 휨 초기진동수치는 약 85%까지 증가 되었다. 이와같이 물리적인 힘을 가하지 않고서도, 물성을 이용 강건한 구조물을 구현, 시스템의 안정성을 도모할 수 있음은 복합소재 구조물의 큰 장점이라 할 수 있겠다.

그림 4와 5에서는 복합재료물의 비전형특성인 이방성에 의한 휨-비틀림 커플링의 고유진동수에 미치는 영향을 살펴보았다. 이의 비교로서 고전판이론에 의거한 모델링에서 커플링 강도를 무시한 경우와 비교하였다. 그림으로부터 휨-비틀림 커플링은 휨 보다는 비틀림 진동수에 더 많은 영향을 주고 있으며 워핑제한이 없는 영역에서는 상당한 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 이영역에서는 커플링의 고려없이 고유진동수 예측에 상당한 오차가 발생함을 알 수 있었다.

그림 6 과 7은 횡전단변형의 영향을 고려한 1차 횡전단변형이론과 이를 고려치 않은 고전판이론에 근거를 두고 진동해석결과를 서로 비교함으로써 횡전단변형의 영향을 조사하였다. 예측했던 것과 같이, 횡전단변형이론에 따른 고유진동수치는 고전적해석과 달리 적층판사이의 변형을 고려함으로써 낮아짐을 알 수 있었다.

능동제어의 실험예로서 해석에 사용된 적층판의 적층형태는 $[90_2/0]_{32}$ 이고 3점 이산 작동기를 위치 $(0, 0.5)$ $(0, 0.75)$ $(0, 1)$ 에 설치하였다 [()은 x, y 좌표내 무차원 변수]. 보의 길이는 $l=15\text{ in}$, $c=3$ 를 취하였다. 휨, 비틀림 모우드 각각 6차씩, 모두 12개 모우드를 고려하였고, 나머지 모우드의 동특성에 대한 영향은 무시할 정도로 작고 시스템은 감지 가능하다고 가정하

였다. 가중치를 다음과 같이 취했다.

$$Q = \begin{bmatrix} Q^2 & 0 \\ 0 & I_{(12 \times 12)} \end{bmatrix}, R = I_{(3 \times 3)} \quad (22)$$

힘의 크기가 100psi인 사인파를 $(0.6, 0.6)$ 위치에 $2\pi\text{ rad/sec}$ 주기로 3초 동안 가하였다. 그림 8 은 제어시 시간에 따른 시스템의 모드감쇠를 보여주고 있는데 횡전단변형과 휨-비틀림 커플링의 영향이 제어시 더 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 이러한 비전형적인 특성은 모델링시 미미하다고 판단될 수도 있으나 제어기 구동시 진동수의 예측오차는 무시할 수 없는 정도가 되어 전체 시스템의 붕괴를 가져올 수 있으므로 모델링의 중요성을 다시 한번 일깨우게 된다.

5. 맺 음 말

제어기를 포함한 복합적층판으로 구성된 외팔보의 동특성 해석을 수행하였다. 1차 횡전단 변형 이론에 기초하여, 횡전단 변형과 외팔보 뿌리 끝에서의 워핑제한을 고려하였다. 또한 복합재의 이방성으로 인한 휨-비틀림 커플링을 모두 고려 정확한 모델링을 도출 제어시 모델링 오차에 의한 진동 제어기의 오동작을 미연에 방지하였다. 제어 작동기의 부하를 적게 하기위하여 수동적 의미의 제어인 탄성배열설계를 하여 구조물의 강성을 높이도록 시도하였다. 적층판의 섬유방향성 (또는 적층각) 을 조절하여 구조물의 탄성을 강화시키는 방식인 탄성배열설계 결과 만족할만한 동특성 향상을 이루었다.

비록 대형구조물을 유연체로 무한대의 모우드를 가지나 주로 저차 모우드에 의해 동적거동이 좌우되므로 이 저차 모우드를 제어 효과적인 능동적 제어를 설계하였다. 현재 압전 (piezo-ceramic) 제어기를 이용한 제어시스템 연구를 진행중에 있으며 추후 휨과 비틀림 초기 진동수를 동시에 증가시키기 위해서는 트레이드 스텐디와 시스템 최적화가 함께 이루어 지어야 되겠다.

참고 문헌

(1) Jensen, D. W., Crawley, E. F. and Dugundji, J., "Vibration of Cantilevered Graphite/Epoxy Plates with Bending-Torsion Coupling," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 1, July 1982, pp. 254-269.

(2) Jensen, D. W. and, Crawley, E. F., "Frequency Determination Techniques for Cantilevered Plates with Bending-Torsion Coupling," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 1, March 1984, pp. 415-420.

(3) Weisshaar, T. A. and Foist, B. L., "Vibration Tailoring of Advanced Composite Lifting Surfaces," *Journal of Aircraft*, Vol 22, No. 2, 1985, pp. 141-147.

(4) Shirk, M. H., Hertz, T. J. and Weisshaar, T. A., "Aeroelastic Tailoring-Theory, Practice, and Promise," *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 1, 1986, pp. 6-18.

(5) Thangjitham, S. and Librescu, L., "Vibration Characteristics of Anisotropic Composite Wing Structures," *Proc. of 32nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1991, pp. 2115-2122.

(6) Librescu, L. and Simovich, J., "A General Formulation for the Aeroelastic Divergence of Composite Swept Forward Wing Structures," *Journal of Aircraft*, Vol. 25, No. 4, 1988, pp. 364-371.

(7) Librescu, L. and Thangjitham, S., "The Static Aeroelastic Behavior of Swept Forward Composite Wing Structures Taking into Account Their Warping Restraint Effect," *Proceedings of the Fourth Japan-U.S. Conference on Composite Materials*, June 22-29, 1988, Washington, D.C., pp. 914-922.

(8) Meirovitch, L., "A New Modal Method for the Response of Structures Rotating in Space," *25th International Astronautical Congress of the I.A.F.*, Sept. 30-Oct. 5, 1974, Amsterdam, The Netherlands.

(9) Meirovitch, L. and Silverberg, L. M., "Active Vibration Suppression of a Cantilever Wing," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, 1984, pp. 489-498.

(10) Karpouzian, G. and Librescu, L., "Aeroelasticity of Anisotropic Composite Wing Structures Including the Transverse Shear Flexibility and Warping Restraint Effects," *Proc. of 32nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1991, pp. 1683-1691 (to appear also in *Journal of Aircraft*.)

(11) 오동훈, "항공기 날개형태 구조물의 설계와 진동해석 (구조적 결합 및 피해고려)," 박사학위논문, 1993. 5, Virginia Polytechnic Institute and State Univ.

(12) 김두훈, "지진을 고려한 구조물의 면지/제진 기술개발 현황," 한국소음진동공학회, 제5권 제1호, 1995, pp. 11-20.

(14) 최승복, "지능 복합재료의 구성과 특성," 한국항공우주학회지, 제20권 제4호, 1992, pp. 117-129

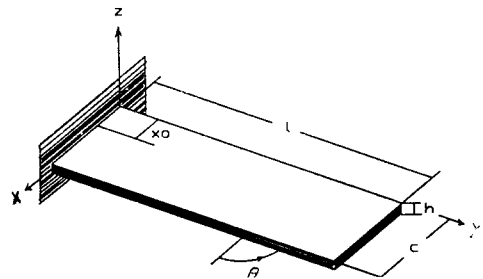


Figure 1 Coordinate system and geometry of cantilevered structure.

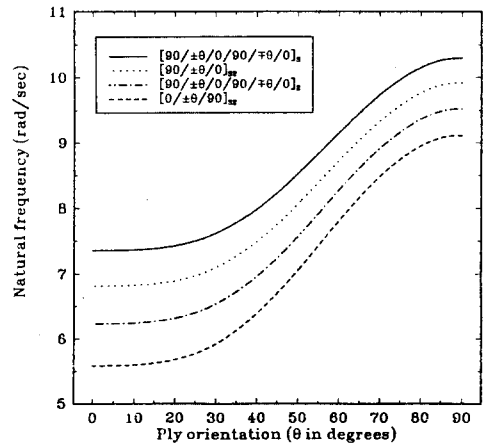


Figure 2 Variation of first bending frequencies versus ply orientation as design variable for sixteen-layer laminate ($l = 12$ in, $c = 3$ in) based on the FSDT with consideration of the warping restraint effect.

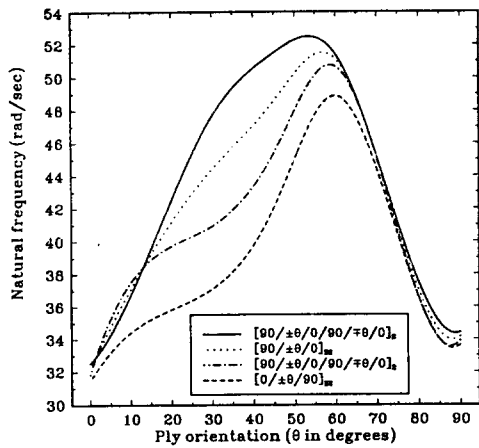


Figure 3 Variation of first torsional frequencies versus ply orientation as design variable for sixteen-layer laminate ($l = 12$ in, $c = 3$ in) based on the FSDT with consideration of the warping restraint effect.

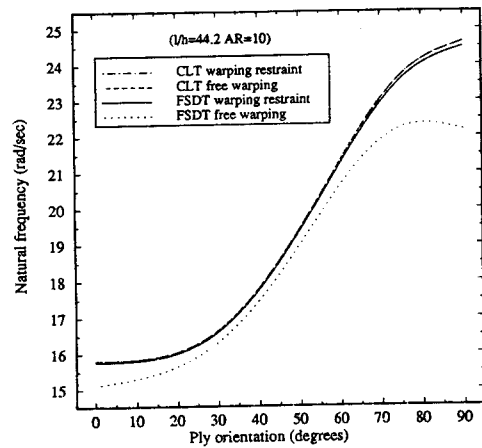


Figure 6 Effects of transverse shear deformation and warping restraint on the first bending frequencies of 64-layer laminate $[90/\pm\theta/0]_{S8}$ ($l = 15$ in, $c = 3$ in).

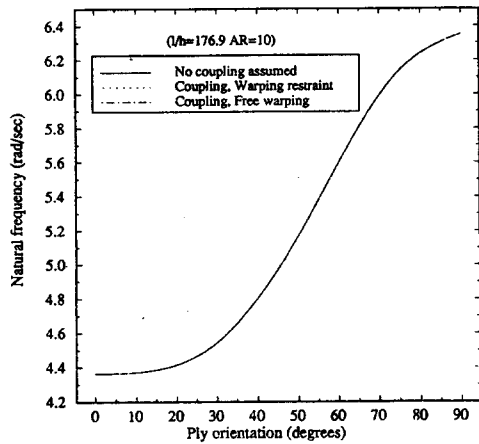


Figure 4 Effects of bending-twist coupling and warping restraint on the first bending frequency of laminate $[90/\pm\theta/0]_{S2}$ ($l = 15$ in, $c = 3$ in) based on CLT.

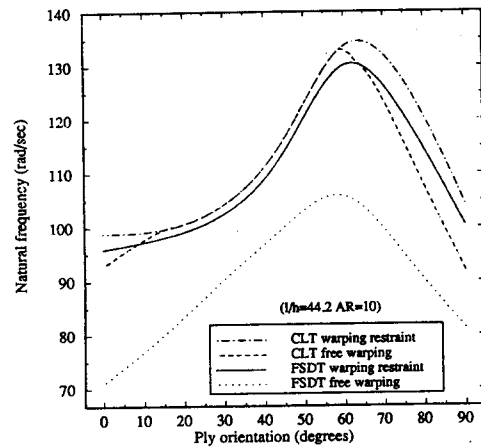


Figure 7 Effects of transverse shear deformation and warping restraint on the first torsional frequencies of 64-layer laminate $[90/\pm\theta/0]_{S8}$ ($l = 15$ in, $c = 3$ in).

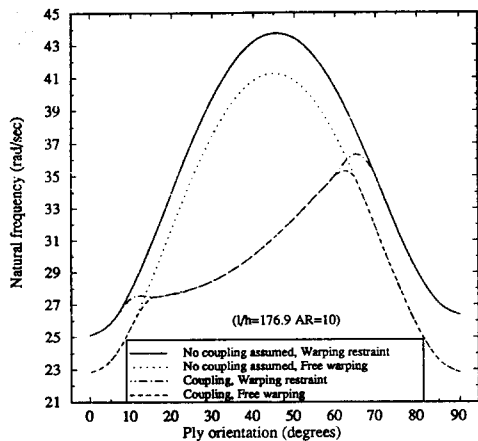


Figure 5 Effects of bending-twist coupling and warping restraint on the first torsional frequency of laminate $[90/\pm\theta/0]_{S2}$ ($l = 15$ in, $c = 3$ in) based on CLT.

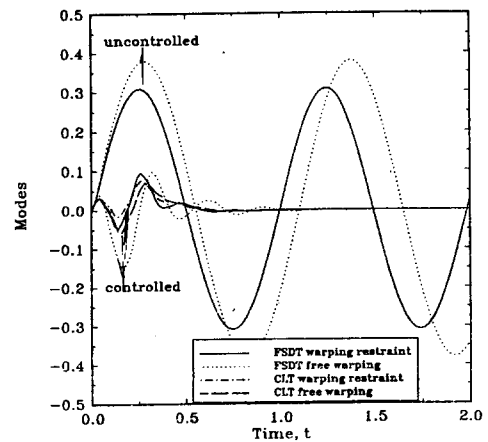


Figure 8 Controlled and uncontrolled responses of the first bending vibration mode for the cantilevered composite beam.