

스펙트럴요소법을 이용한 분포하중을 받는 구조물의 동적 거동 해석

⁰홍종원*, 이준근*, 이우식**

(Dynamic Analysis of the Structures Subject to Distributed Loads by Using Spectral Element Method)

(Jong-Won Hong, Joon-Keun Lee, Usik Lee)

1. 서 론

구조물의 동적 거동에 관한 연구는 여러 공학자들에 의해서 최근까지도 연구가 가장 활발히 진행되고 있는 분야중의 하나이다. 따라서 구조물의 동적거동을 해석하기 위한 여러 방법들이 연구되어왔지만 그중에서도 가장 일반적으로 사용되는 방법으로 유한요소법(finite element method)을 들 수 있다. 유한요소법은 저주파수에서는 신빙성 있는 결과를 제시할 수 있으나 고주파수로 갈수록 엄밀해와 다른 결과를 주게 된다. 이 현상을 파동역학(wave mechanics) 관점에서 본다면 고주파수로 갈수록 구조물내의 파장(Wave length)이 짧아지므로 유한요소의 길이를 관심있는 주파수에 해당하는 파장보다 충분히 작게 하지 않으면 엄밀해에 가까운 값을 얻을 수 없게 된다. 개인용 컴퓨터(PC)로 유한요소법을 사용하여 엄밀해에 가까운 값을 얻기 위해서는 매우 많은 요소분할을 필요로 하므로 많은 시간과 컴퓨터 용량을 필요로 하므로 사용자 입장에서는 커다란 장애요인이 아닐 수 없다.

구조물의 진동을 파동역학 관점에서 본다면 진동은 정재파[1]의 한 종류로 볼 수 있다. 즉 구조물의 진동은 파동역학으로도 해석이 가능하다는 논리가 성립하게 된다. 파동역학으로 구조물을 해석하면 주어진 구조물의 운동방정식을 직접 다루기 때문에 주파수 범위에 관계없이 엄밀해에 가까운 값을 얻을 수 있다. Doyle[2]은 파동역학을 응용한 스펙트럴 방법을 정립하였는데 이것은 기존의 파동역학에 고속 푸리에 변환(FFT) 및 역 고속 푸리에 변환(inverse FFT) 알고리즘을 적용시켜 응답함수를 시간축상 혹은 주파수 축상에 임의대로 나타나도록 한 방법이다. 참고문헌[2]에서 그는 봉(Rod)과 보(Beam) 그리고 곡선 보를 스펙트럴 방법으로 해석하여 얻어진 엄밀해들을 시간 축 혹은 주파수 축상에 도시하였다. 그후 Gopalakrishnan[3]은 Timoshenko 보를

스펙트럴 방법으로 해석하였다. Rizzy[4]는 보다 현실성 있는 구조로 층구조를 갖는 복합재료 형태의 구조를 스펙트럴 방법으로 해석하는 방법을 제안하였다. 그러나 이러한 연구들은 대부분 구조물이 균일하고 집중하중을 받는 경우에 대해 다루었으며 지배방정식이 다르다는 점을 제외하고는 Doyle이 정립한 이론에 바탕을 두고 있다. 그러나 실제의 구조물은 집중하중 뿐만 아니라 분포하중을 받는 경우가 많으며 구조물상에 단면적의 변화나 재질의 변화와 같은 불연속성이 존재하는 경우가 있다. 이러한 경우 기존의 스펙트럴 해석방법을 직접 적용할 수 없다. 기존의 스펙트럴 해석방법을 폭넓게 적용하기 위해서 마치 유한요소법에서 유한요소분할(finite element discretization)을 이용하는 것처럼 스펙트럴요소 분할을 이용할 수 있다. 이때 스펙트럴요소에 대해 유도된 스펙트럴요소행렬은 유한요소법에서 처럼 어셈블링이 가능하다. 이와같이 스펙트럴요소를 이용하여 구조물을 해석하는 기법을 스펙트럴요소법이라고 한다. 따라서 본 연구에서는 기존의 연구에서 다룬바 없는 분포하중의 경우에 대해 스펙트럴요소법을 적용하기 위해 (1) 힘과 변위와의 관계를 이용하여 Bernoulli-Euler보와 1차원 Timoshenko-Mindlin평판에 대한 스펙트럴요소를 유도하고 (2) 스펙트럴요소법을 이용하여 분포하중을 받는 이들 구조물의 동적거동을 해석하고자 한다.

2. 집중하중을 받는 Bernoulli-Euler보의 해석

Bernoulli-Euler보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

식(1)의 해가 x 방향으로 전파되어 가는 파동을 나타내도록 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

* 인하대학교 기계공학과 대학원
 ** 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 e^{i(\omega t - kx)} \\
 &= \bar{v}(x) e^{i\omega t}
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

여기서, k 는 파수(wave number)이고, $\bar{v}(x)$ 는 변위에 대한 푸리에 계수라고 한다[4]. 식(2)를 식(1)에 대입하면 다음과 같은 스펙트럼 관계식을 도출할 수 있다.

$$EI k^4 - \omega^2 \rho A = 0 \quad (3)$$

주파수와 파수와의 관계를 나타내는 분산곡선(dispersion curve)은 식(3)으로부터 Fig. 1과 같이 구할 수 있다. 또한 Bernoulli-Euler보의 파동해는 식(2), (3)으로부터 다음식으로 표현될 수 있다.

$$\bar{v}(x) = A e^{-ikx} + B e^{-kx} + C e^{ikx} + D e^{kx} \quad (5)$$

여기서, $k = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}$.

만일 보가 Fig. 2와 같은 경계조건을 갖고 있을 경우, 힘과 변위와의 관계식

$$\bar{V} = EI \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3}, \quad \bar{M} = EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \quad (5)$$

을 이용하여 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 -ik & -k & ik & k \\
 -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} & -k^2 e^{ikL} & k^2 e^{kL} \\
 Eik^3 e^{-ikL} & -Eik^3 e^{-kL} & -Eik^3 e^{ikL} & Eik^3 e^{kL}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 A \\
 B \\
 C \\
 D
 \end{Bmatrix}
 = \{ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{P} \}^T \quad (6)$$

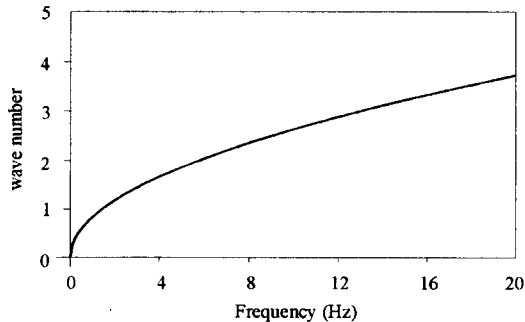


Fig. 1 Dispersion curve of the Bernoulli-Euler beam

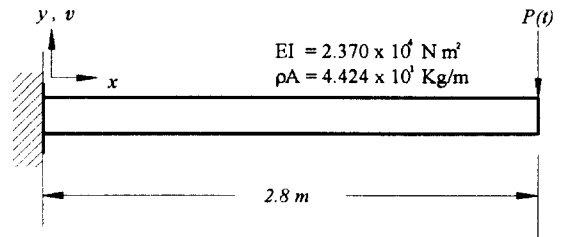


Fig. 2 Bernoulli-Euler beam with a concentrated load

네개의 미지수 A, B, C, D 는 식(6)을 계산함으로써 구할 수 있으며 이 네개의 미지수를 식(4)의 파동해에 대입함으로써 수직변위 $\bar{v}(x)$ 를, 그리고 식(5)를 이용하여 전단력과 모멘트를 더불어 구할 수 있다. 이 값을 다시 고속 푸리에 변환과 역 고속 푸리에 변환 이론을 이용하여 시간 축이나 주파수 축상의 값으로 변환 할 수 있다. Table 1는 Fig. 2와 같은 Bernoulli-Euler보에 대한 이론해와 스펙트럴 방법 그리고 유한요소법으로 구한 고유진동수의 비교이다. 관심있는 주파수범위가 증가할수록 이론해와 스펙트럴 방법으로 구한 결과가 유한요소법으로 구한 결과보다 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 1. Comparisons of the natural frequencies(Hz) of a Bernoulli-Euler beam by analytical method, spectral analysis method and FEM(NISA).

Mode Number	Analytical Method	Spectral Method	FEM
1	1.67	1.67	1.67
2	10.5	10.5	10.4
3	29.3	29.3	29.1
4	57.6	57.6	57.0
5	95.0	95.0	94.0
6	142	142	140
7	198	198	195
8	264	264	259
9	339	339	331
10	424	424	412
12	517	517	500
13	621	621	596
14	733	733	698
15	855	855	804
16	987	987	911
17	1129	1129	1016
18	1277	1278	1113

3. 분포하중을 받는 구조물의 스펙트럴요소 해석

이 장에서는 Bernoulli-Euler보의 스펙트럴요소를 유도하는 과정을 소개하고 보다 일반적인 구조물인 1차원 Timoshenko-Mindlin평판의 스펙트럴요소를 같은 과정을 거

쳐 유도한다

3-1. Bernoulli-Euler보의 스펙트럴요소 유도

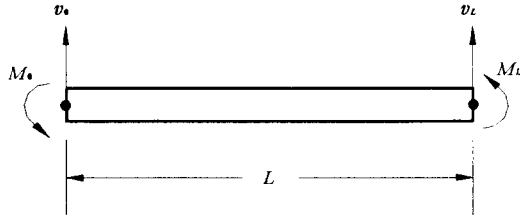


Fig. 3 Sign convention for the Bernoulli-Euler beam

스펙트럴요소는 절점에서의 힘과 변위와의 관계를 이용하여 나타낼 수 있다. 분포하중을 받는 구조물을 스펙트럴 방법으로 해석하기 위해서는 먼저 스펙트럴요소를 유도하여야 한다. Bernoulli-Euler보의 수직 변위는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{v}(x) = [e^{-ikx} \quad e^{-kx} \quad e^{ikx} \quad e^{kx}] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Fig. 3에서 나타낸 Bernoulli-Euler보의 전단력과 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{V} &= EI \frac{d^3 \bar{v}}{dx^3} = EK [ik^3 A e^{-ikx} - k^3 B e^{-kx} - ik^3 C e^{ikx} + k^3 D e^{kx}] \\ \bar{M} &= EI \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} = EK [-k^2 A e^{-ikx} + k^2 B e^{-kx} - k^2 C e^{ikx} + k^2 D e^{kx}] \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)로부터 Bernoulli-Euler보의 절점에서의 힘과 변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_L \\ \bar{M}_L \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} ik^3 & -k^3 & -ik^3 & k^3 \\ k^2 & -k^2 & k^2 & -k^2 \\ -ik^3 e^{-ikL} & k^3 e^{-kL} & ik^3 e^{ikL} & -k^3 e^{kL} \\ -k^2 e^{-ikL} & k^2 e^{-kL} & -k^2 e^{ikL} & k^2 e^{kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$= [T] \{ A \ B \ C \ D \}^T$$

스펙트럴요소행렬은 절점에서의 힘과 변위와의 관계를 나타내므로 식(9)의 우변항을 절점좌표(nodal coordinate)로 표현하여야 한다. 이를 위하여 $x=0$ 와 $x=L$ 에서의 변위와 기울기는 식(7)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= A+B+C+D \\ \bar{v}_0' &= -ikA - kB + ikC + kD \\ \bar{v}_L &= A e^{-ikL} + B e^{-kL} + C e^{ikL} + D e^{kL} \\ \bar{v}_L' &= -ikA e^{-ikL} - kB e^{-kL} + ikC e^{ikL} + kD e^{kL} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $(\)' = \partial(\)/\partial x$ 이다. 식(10)을 정리하여 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0' \\ \bar{v}_L \\ \bar{v}_L' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik & -k & ik & k \\ e^{-ikL} & e^{-kL} & e^{ikL} & e^{kL} \\ -ike^{-ikL} & -ke^{-kL} & ike^{ikL} & ke^{kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$= [N] \{ A \ B \ C \ D \}^T$$

따라서, 절점에서의 힘과 모멘트와의 관계는 식(9)와 식(11)로부터 다음 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{V}_L \\ \bar{M}_L \end{Bmatrix}^T = [T] [N]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_0' \\ \bar{v}_L \\ \bar{v}_L' \end{Bmatrix}^T \quad (12)$$

식(12)에서 $[T] [N]^{-1}$ 가 Bernoulli-Euler보의 스펙트럴요소행렬이며 이 행렬은 분포하중을 받는 구조물을 스펙트럴요소법으로 해석하는데 사용된다. 이 스펙트럴요소행렬은 유한요소법에서 유한요소행렬과 마찬가지로 다른 스펙트럴요소행렬들과 어셈블링이 가능하다.

3-2. 1차원 Timoshenko-Mindlin 평판의 스펙트럴요소 유도

Timoshenko-Mindlin평판[5]이론은 전단변형 효과와 회전관성 효과를 포함하는 1차원 평판이론으로써 Bernoulli-Euler보이론에 비해 보다 엄밀한 진동특성을 나타낼 수 있는 이론이라 할 수 있다. 1차원 Timoshenko-Mindlin평판의 운동방정식은 다음식으로 주어진다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \ddot{w} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{D_1 \rho}{xG} \right) \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\rho^2 h^3}{12xG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \quad (13)$$

$$= p(x, t)$$

여기서, $D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 이고 ν 는 Poisson비이다.

식(13)의 해를 다음과 같은 파동해로 가정한다.

$$w = w_0 e^{i(\omega t - kx)} = \bar{w}(x) e^{i\omega t} \quad (14)$$

식(14)의 해를 식(13)의 운동방정식에 대입하면 다음과 같은 스펙트럼 관계식을 얻을 수 있다.

$$ak^4 + c\omega^4 + bk^2\omega^2 + d\omega^4 = 0 \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & b &= -\left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{Eh^3 \rho}{12(1-\nu^2)xG} \right) \\ c &= -\rho h & d &= \frac{\rho^2 h^3}{12xG} \end{aligned}$$

수직변위 $\bar{w}(x)$ 는 식(15)로 부터 구한 4개의 파수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{w}(x) &= A e^{-ik_1 x} + B e^{ik_1 x} + C e^{-ik_2 x} + D e^{ik_2 x} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & e^{ik_1 x} & e^{-ik_2 x} & e^{ik_2 x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 파수 k_1 and k_2 는 다음과 같이 주어진다.

$$k_1 = \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{-b\omega + \sqrt{-4ac + b^2\omega^2 - 4ad\omega^2}}}{\sqrt{2a}}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{\omega} \sqrt{-b\omega - \sqrt{-4ac + b^2\omega^2 - 4ad\omega^2}}}{\sqrt{2a}}$$

또한, 전단력과 모멘트는 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{V} = D_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = D_1 (ik_1^2 A e^{-ik_1 x} - ik_1^2 B e^{ik_1 x} + ik_2^2 C e^{-ik_2 x} - ik_2^2 D e^{ik_2 x}) \quad (17)$$

$$\bar{M} = D_1 \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} = D_1 (-k_1^3 A e^{-ik_1 x} - k_1^3 B e^{ik_1 x} - k_2^3 C e^{-ik_2 x} - k_2^3 D e^{ik_2 x})$$

마지막으로 1차원 Timoshenko-Mindlin 평판에 대한 스펙트럴요소는 Bernoulli-Euler 보에 적용한 과정을 동일하게 적용하여 구할 수 있다.

3-3. 진동응답의 스펙트럴요소 해석

어느 한 위치에 하중이 작용하는 동적집중하중에 의한 진동응답을 스펙트럴 방법으로 해석하기 위한 기법은 잘 알려져 있다[2]. 그러나 일반적인 동적분포하중을 다룰수 있는 해석기법은 아직까지 알려진 바 없다. 따라서, 이 장에서는 동적분포하중을 받는 구조물의 진동응답의 해석을 위해 선형계에 적용할수 있는 중첩원리를 사용한 스펙트럴요소법을 정립하였다. Fig. 4는 일반적인 동적분포하중을 받고 있는 구조물을 도시한 것이다.

구조물상의 ξ 의 위치에 단위충격하중이 $t=0$ 의 순간에 집중하중의 형태로 가해졌을때 임의의 위치 x 에서의 단위충격진동응답을 $I(x; \xi, t)$ 라 정의하면 $t=\tau$ 에 가

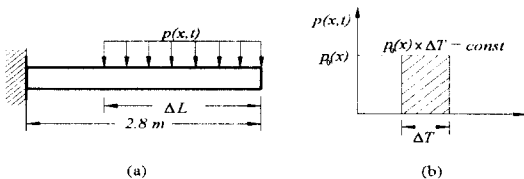


Fig. 4 A typical distributed load

해진 단위충격하중에 대한 진동응답은 $I(x; \xi, t-\tau)$ 로 표현된다. 만일, 구조물상에 동적분포하중 $p(x, t)$ 이 작용하는 경우 ξ 의 위치에서 $t=\tau$ 에 작용하는 동적집중하중의 크기는 $p(\xi, \tau)\Delta\xi$ 가 되므로 이 하중이 $0 \leq \tau < t$ 동안 작용하게 되면 이 하중에 의해 발생한 충격진동응답의 크기 $\Delta w(x; \xi, t)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta w(x; \xi, t) = \int_0^t I(x; \xi, t-\tau) p(\xi, \tau) \Delta\xi d\tau \quad (18)$$

식(18)은 $x=\xi$ 에 $0 \leq \tau < t$ 동안 작용하는 동적집중하중 $p(\xi, \tau)\Delta\xi$ 에 의한 진동응답이므로 $a \leq \xi \leq b$ 의 구간에 걸쳐 작용하는 동적분포하중에 대한 총 진동응답은 다음식에 의해 주어진다.

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_a^b \Delta w(x; \xi, t) \\ &= \int_a^b \int_0^t I(x; \xi, t-\tau) p(\xi, \tau) d\tau d\xi \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)에서 시간에 대한 적분은 스펙트럴방법에 의해 계산되며 그 결과를 다음과 같이 정의한다.

$$y(x; \xi, t) = \int_0^t I(x; \xi, t-\tau) p(\xi, \tau) d\tau \quad (20)$$

식(20)의 정의를 이용하면 식(19)는 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$w(x, t) = \int_a^b y(x; \xi, t) d\xi \quad (21)$$

식(21)에서 분포하중 구간에 대한 적분은 다음과 같이 잘 알려진 수치적분기법[6]을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_a^b y(x, \xi, t) d\xi = \frac{1}{2} [y(x, \xi_1, t) + 2y(x, \xi_2, t) + \dots + y(x, \xi_n, t)] \quad (22)$$

따라서, 구조물이 Fig. 4와 같이 분포하중을 받을 경우 스펙트럴요소 절점에 분포하중의 힘을 가하고 스펙트럴요소를 결합한 다음 구속조건을 적용하면 분포하중하에서의 임의의 점에서의 응답을 알 수 있다.

4. 수치해석 결과 및 토의

하중의 형태가 분포하중이거나 집중하중일 경우 구조물(1

차원 평판)의 특정점에서의 응답이 어떻게 변화하는지를 고찰해 볼 필요가 있다. 이때 분포하중은 Fig. 4(b)에 나타난 것과 같이 시간축상에서 같은 면적을 갖도록 하였다. 고속 푸리에 변환과 역 고속 푸리에 변환 계산에 사용된 조건은 테이타 갯수 512, 시간 길이 16 초, 샘플링 시간 0.0313 초, 그리고 샘플링 주파수 0.0624 Hz이다. 분포하중의 형태가 충격하중(impulse load)에 가까울수록 응답의 크기는 점점 커짐을 알 수 있다. 시간축상에서의 하중의 형태가 동일하다면 집중하중이거나 분포하중이거나 응답의 주기는 변하지 않음을 알 수 있다. 이러한 결과에 비추어 볼때 특정점에서의 구조물의 응답은 분포하중의 공간상의 변화보다는 시간상의 변화에 보다 민감하게 변함을 알 수 있다.

본 연구에서 다루는 방법의 타당성을 검증하기 위하여 분포하중을 받는 1차원 평판을 유한요소법(NISA)로 해석해

보았다. 이때 사용된 조건은 $p_0 = 40 N/m$, $\Delta L = 2.8 m$ 그리고 $\Delta T = 1.56 초$ 이다. Fig. 5와 6은 FEM과 스펙트럴 방법으로 구한 응답의 결과를 주파수 축상과 시간축상에서 비교한 것이다.

6. 결 론

본 연구에서는 분포하중을 받는 구조물을 스펙트럴요소법으로 해석할 수 있는 기법을 소개하였다. 1차원 구조물에 대한 스펙트럴요소 유도과정을 보인후 분포하중을 받는 경우의 진동해석 결과를 다른 해석방법에 의한 해석 결과와 비교감도하여 보았다. 본연구에서 제시한 스펙트럴요소 해석 기법은 유한요소법으로는 신빙성 있는 결과를 얻을 수 없는 고주파 범위에서 유용하게 사용될 수 있으며 매우 신뢰성이 높은 해를 제공하는 것을 확인하였다.

참고문헌

1. L. E. Kinsler 1980 *Fundamentals of Acoustics* 3rd edition, 39-42. New York : John Wiley & Sons, Inc.
2. J. F. Doyle 1989 *Wave Propagation in Structure FFT-based spectral analysis methodology*, 7-156. New York : Springer-Verlag, Inc.
3. S. Gopalakrishnan, M. Martin and J. F. Doyle 1992 *Journal of Sound and Vibration* 158(1), 11-24. A Matrix Methodology for Spectral Analysis of Wave Propagation in Multiple Connected Timoshenko Beams.
4. S. A. Rizzy and J. F. Doyle 1992 *Journal of Vibrations and Acoustics* 114, 569-577. A Spectral Element Approach to Wave Motion in Layered Solids.
5. W. Soedel 1993 *Vibrations of shells and plate* 2nd edition, 78-82. New York : Marcel Dekker, Inc.
6. S. C. Chapra and R. P. Canale 1989 *Numerical Methods for Engineers*, 478-489. New-York : McGraw-Hill, Inc.

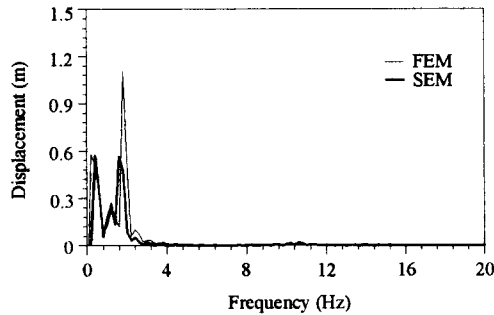


Fig. 5 Comparison of the frequency responses obtained from FEM and the present spectral element method

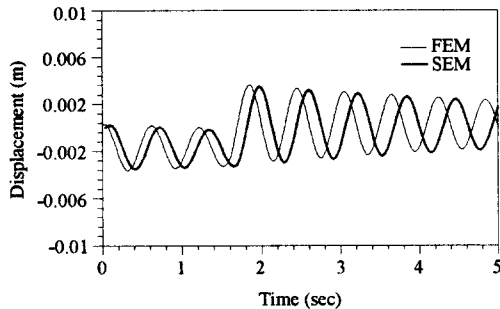


Fig. 6 Comparison of the time responses obtained from FEM and present spectral element method