다속성 의사결정문제의 최적대안 선정을 위한 대화형 접근방법
(An Interactive Approach to Select Optimal Solution in MADM Situations)

이 강 인* · 조 성 구**
(Kang In Lee* · Sung Ku Cho**)

* 전주대학교 산업공학과 조교수
** 동국대학교 산업공학과 부교수

요 약 문

현실적으로 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making;MADM)문제들은 대안과 속성의 수가 매우 많은 것이 보통이기 때문에 이것을 모두 합리적으로 고려하여 최적의 대안을 선정한다는 것은 매우 어려운 일이다.

지금까지 연구·개발된 기존의 수리적 방법들은 주어진 문제에 대한 제약을 가하여 최적해(optimal solution)를 구할 수 있지만 의사결정자들의 입장을 정확히 반영하지 못하는 경우가 대부분이며, 이를 개선하기 위한 기존의 대화형 접근방법은 고려해야 할 대안과 속성의 수가 많아지면 대안 간의 쌍비교등을 통하여 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 기하급수적으로 증가한다는 어려움과 함께 최적해가 보장되지 못하는 문제점이 있다.

따라서, 본 연구의 목적은 대안과 속성의 수가 매우 큰 의사결정상황 하에서 의사결정자가 중요하다고 생각하는 속성의 그룹부터 단계적으로 고려해 가면서 대안의 수를 점차적으로 감소시킬 수 있는 보다 효율적인 대화형 접근방법을 구축하는데 있다.

1. 서 론

일반적으로 경영상의 의사결정문제나 공공의 의사결정문제에 있어서 의사결정자는 여러 가지의 기준에 입각하여 대안들 간의 선호순서를 결정하거나 최적대안을 선택하게 된다. 이러한 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making;MADM)문제는 자원의 제약 때문에 발생하는 상충요인을 해결하기 위한 것으로 실행가능한 대안의 수가 유한개이고 이산적이어서 선택·평가문제등에 적합하다.

위의 문제를 해결하기 위한 기존의 수리적 방법들[4],[5],[6],[7],[8],[15],[18],[23],[24]은 거리나 퍼지척도에 따라 주어진 문제에 대한 모형 또는 의사결정자의 선호구조에 제약을 가하여 MOLP(multi-objective linear programming)나 MOGP(multi-objective goal programming)를 이용해서 최적해(optimal solution)를 구하고 있지만 이들은 의사결정자의 입장을 정확히 반영하지 못하는 경우가 대부분이며, 이를 개선하기 위한 대화형 접근방법[9],[11],[14],[17],[19],[20],[21],[22],[26],[27] 역시 전체의 대안과 속성을 고려해야 하기 때문에 이들의 수가 많으면 많을 수록 대안 간의 쌍비교(pairwise comparison)등을 통하여 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 기하급수적으로 증가하게 되어 일관성을 유지시키기도 어렵고 최적해가 보장되지 못하는 문제점이 있다. 또한, 지금까지의 방법들은 대부분 속성 간의 선호독립성(preferential independence)을 가정하고 있기 때문에 현실성이 부족하다. 그러나 어떤 제품 등의 품질평가를 할 때에 모든 속성을 고려한다는 것은 매우 어려울 뿐만 아니라 의사결정자의 가치판단기준에 따라 중요하게 고려하는 소수개의 우선적인 속성이 존재할 수 있을 것이다.

따라서, 본 연구에서는 대안과 속성의 수가 매우 큰 의사결정상황 하에서 전체 속성들의 집합을 상호 독립적인 몇 개의 속성그룹으로 분할한 다음 의사결정자가 중요하다고 생각하는 그룹부터 단계적으로 고려해 가면서 대안의 수를 점차적으로 줄여나가되, 이 과정에서 의사결정자의 입장을 가능한 한 반영할 수 있도록 하고, 속성간의 종속성(dependence)을 그룹내에서는 허용하는 경우에도 최적해에 도달할 수 있는 보다 효율적인 대화형 접근방법을 구축하고자 한다. 여기서 의사결정자가 최적해를 얻는데 필요한 시간과 정신적 노력이 과다하다고 생각되어 최적해가 보장되지 않더라도 신속히 만족할 만한 해를 얻고자 하는 경우에는 단계별 대안제거를 위한 절단범위(cutting range)의 폭을 조정할 수 있도록 하여 빠른 시간 내에 해에 도달할 수 있게 함으로써 의사결정자의 입장이 최대한 반영되도록 하였다.

2. 기존 연구 및 수리적 배경

본 연구에서는 다음과 같이 기호를 정의하기로 한다.

n_0 : 원문제에서 고려해야 할 전체 속성의 수

m_0 : 원문제에서 고려해야 할 전체 대안의 수

a_i : 원문제의 i번째 대안, $i = 1, \cdots, m_0$.

z : n_0개의 전체 속성을 상호독립적인 그룹들로 분할 했을 때의 그룹의 수

p : 단계를 의미하며 $p=1,2,\cdots,z \le n_0$

n_p : p단계에서 추가로 고려되는 속성의 수, $n_0=n_1+n_2+\cdots+n_z$

m_p : 전 단계에서 제거되고 남은 것으로 p단계에서의 실행가능한 대안의 수

G_p : p단계에서 고려되는 속성그룹으로 $G_p=\{c_1^p, c_2^p, \cdots, c_{n_p}^p\}$, 단 c_j^p = G_p의 j번째 속성 $(j=1,2,\cdots,n_p)$

A_0 : 원문제의 전체 대안들의 집합으로 $A_0=\{a_1, a_2, \ldots, a_{m_0}\}$

A_p : p단계에서 제거되고 남은 대안들의 집합으로 $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_z$

λ_p : 속성그룹의 G_p 전체에 대한 가중치로 그룹의 순서는 중요도의 순서대로 정해지므로 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots, \lambda_z \geq 0$이고 $\sum_{p=1}^{z} \lambda_p = 1$이다.

x_{ij}' : 벡터정규화(vector normalization) 이전의 대안 a_i의 j번째 속성에 대한 평가치로 x_{ij}'의 값이 크면 클수록 좋은 경우로 가정한다 $(i=1,2,\cdots,m_0,\ j=1,2,\cdots,n_0)$.

x_{ij} : 각 속성에 대해서 x_{ij}'를 벡터정규화한 값으로 $x_{ij}=x_{ij}'/(\max_i x_{ij}')$

$\nu_p(a_i)$: 대안 a_i의 G_p에 관한 UVF(utility/value function)

$U_p(a_i)$: 단계 p까지의 $\nu_k(a_i)$들에 그룹별 가중치 λ_k를 고려한 값 $U_p(a_i)=\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \nu_k(a_i)$, 따라서 전체 속성을 모두 고려한 대안 a_i의 UVF는 $U(a_i)=U_z(a_i)$

α : UVF $\nu(\cdot)$들의 모수벡터

$a_i \, P \, a_k$: 대안 a_i를 대안 a_k보다 선호(preference)함

$a_i \sim a_k$: 대안 a_i와 대안 a_k가 무차별(indifference)함

H_p : p단계에서 의사결정자가 제시한 m_p개 대안 간의 쌍비교 결과의 수로 $H_p \leq \binom{m_p}{2}$

ε_h : p단계에서 얻은 H_p개의 쌍비교 결과 중 h번째 쌍비교 결과를 UVF $\nu(\cdot)$가 위반하는 오류의 크기로 최소화 해야 할 값, $h=1,2,\cdots,H_p$

a_*^p : p단계까지의 최적해(current optimal solution)

x_*^p : a_*^p의 p단계까지의 속성들에 대한 정규화된 평가치들의 벡터

C_p : p단계에서 최적해를 보장하는 절단범위(cutting range)

C_p' : 의사결정자가 조정한 절단범위로 $C_p' \geq C_p$

E_p : C_p에 의해 제거되는 대안의 수

E_p' : C_p'에 의해 제거되는 대안의 수

지금까지의 효용함수나 가치함수(utility/value function;UVF)를 이용한 대부분의 연구에서는 p=0으로 한정해서 n_0차원을 갖는 모든 속성에 대한 평가치를 결과공간상의 m_0개의 스칼라 값으로 변환한다고 가정하고 있으나 이것은 매우 어려운 일이고 많은 시간을 필요로 한다[10],[25]. 또한, 지금까지의 접근방법들은 대부분 의사결정자에게 너무 많은 속성에 관한 목표치의 수준과 이

들간의 절충정보(trade-off information)의 제시를 요구하기 때문에 현실적인 적용상의 어려움을 내포하고 있다[7],[14]. 이러한 MADM상황 하에서 속성간의 선호독립(preferential independent)관계를 만족하고 있을 지라도 n_0의 수가 크면 클 수록 최적해를 얻는다는 것이 쉽지 않은 문제이지만 종속적인 경우에는 더욱 어려운 문제이다. 그러나 이러한 문제를 전반적으로 해결하기에는 너무 많은 어려움이 따르기 때문에 일반적인 접근방법을 찾는다는 것은 거의 불가능하다[16].

따라서, 본 연구에서는 그룹간에 선호독립을 가정하여, 다음의 가정 1과 같이 전체 효용함수가 의사오목인 단조증가함수이고 그룹별 효용함수에 대해 가법성질을 만족한다고 가정한다.

가정1 : R^z상에 의사오목효용함수를 정의하는 경우, $a_i, a_k \in A_{p-1}$이고 $i \neq k$일 때 다음식을 만족하면 대안 a_i를 대안 a_k보다 선호한다고 할 수 있다.

$$U(a_i) - U(a_k) = \sum_{p=1}^{z} \lambda_p \{ \nu_p(a_i) - \nu_p(a_k) \} > 0$$

그리고 모든 속성 간의 선호독립성을 가정하는 것은 지나친 제약으로 현실성이 부족하므로 최소한 그룹내의 속성간에는 종속관계를 허용하되, 각 속성그룹에 대한 UVF는 속성간에 교호작용으로 발생하는 완전다항식(complete polynomial)으로 표현될 수 있다고 보고 다음과 같이 가정하기로 한다.

가정2 : p번째 속성그룹으로 Gp에 관한 대안 a_i의 UVF

$$\nu_p(a_i) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n_p} \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k>j}^{n_p} \alpha_{jk} x_{ij} x_{ik} + \sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k>j}^{n_p}\sum_{l>k}^{n_p} \alpha_{jkl} x_{ij} x_{ik} x_{il} + \cdots + \alpha_{12\cdots n_p} x_{i1} x_{i2} \cdots x_{in_p}$$

이다. 위의 함수평가는 의사결정자로 부터 얻은 대안 간의 쌍비교 결과를 최대한 만족시키도록 α의 원소 값을 결정함으로써 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 따라서 대안 a_i와 대안 a_k간의 선호관계는 $U(a_i) > U(a_k) \Leftrightarrow a_i \text{ P } a_k$

$U(a_i) = U(a_k) \Leftrightarrow a_i \sim a_k$

$U(a_i) < U(a_k) \Leftrightarrow a_k \text{ P } a_i$

임을 알 수 있다. 위의 $\nu_p(a_i)$에서 확인해야 하는 모수의 수는 고려하고자 하는 종속관계를 갖는 속성의 수에 따라 지수적으로 증가하며, 제약식의 수는 의사결정자가 제시하는 쌍비교의 수와 비례한다. 그런데 M. Paolucci와 R. Pesenti[16]가 제시한 모형에서는 $x^t Hx$을 만족하는 $n \times n$ hessian행렬이 존재함을 가정하고 이를 속성이 2개인 상황에 적용시켜서 α를 구함으로써 효용함수가 대칭인지 혹은 비대칭인지 등에 주안점을 두고 있다. 물론, 속성값의 크기에 따라 재고관리 등의 문제에서는 효용함수가 대칭일 수 있지만 본 연구에서는 대안의 선별을 통해 MADM의 본질적인 측면인 최적대안을 선정하는데 주안점을 두기 위하여 다음과 같이 대화형 접근방법을

구축하고자 한다.

3. 알고리즘의 모형화

본 연구에서는 단계 p에서 m_p개의 대안에 대해 G_p에 속한 n_p개의 속성만을 고려하여 쌍비교를 시켜 얻은 H_p개의 결과를 가지고 그룹 G_p에 속한 UVF $\nu_p(\cdot)$의 모수벡터 α를 결정하기 위해 다음과 같은 목적함수와 제약조건식을 제시하기로 한다

$$\min \sum_{h=1}^{H_p} \varepsilon_h \quad \cdots (3.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \nu_p(a_k) - \nu_p(a_i) \le \varepsilon_h, \quad a_i, a_k \in A_{p-1}, \quad i \neq k \quad \cdots (3.2)$$

$$\sum_{H_p} \nu_p(a_i) - \nu_p(a_k) = c \quad \cdots (3.3)$$

$$\varepsilon_h \ge 0, \quad h = 1, 2, \cdots, H_p \quad \cdots (3.4)$$

$$\nu_p(a_i) \ge 0, \quad p = 1, 2, \cdots, z \le n_0 \quad \cdots (3.5)$$

$$A_z \subseteq \cdots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0 \quad \cdots (3.6)$$

위의 식(3.2)는 G_p그룹에 대한 h($h = 1, 2, \cdots, H_p$)번째의 쌍비교 결과에서 대안 a_i를 대안 a_k보다 선호한다고 판단한 경우에 이들 대안에 대한 UVF의 차이는 판단상의 오류 ε_h이하이어야 함을 의미한다. 또한, 식(3.3)은 LINMAP(LINear programming techniques for Multidimesional Analysis of Preference)[12]절차에서와 유사하게 모든 α에 관한 계수의 합이 어떤 상수(constants;c)임을 의미하는데, 이는 모든 변수의 값이 0가 되는 자명 해(trivial solution)를 방지하기 위한 제약식이다. 그리고 식(3.4)는 식(3.2)에서 a_iPa_k에 적용되는 것으로 $\varepsilon_h > 0$일 경우 a_kPa_i임을 의미하고, 따라서 $\varepsilon_h > 0$은 오류의 크기를 의미하며, 식(3.5)는 G_p의 모든 m_p개 대안에 대한 UVF가 양(positive)의 값을 갖는 것을 의미한다. 그리고 식(3.6)은 단계 p(p=1,2,$\cdots$,z,$\le n_0$)를 거치면서 최종해에 도달할 때 까지 점차적으로 대안이 감소되어 감을 의미한다. 따라서, 본 알고리즘의 목적은 식(3.1)에서와 같이 m_p개 대안간의 선호비교결과 즉, 의사결정자가 대안 a_i를 대안 a_k보다 선호한다고 판단한 a_iPa_k의 모든 H_p가지 경우에 대해서 이들이 위반되지 않도록 하기 위한 오류 ε_h의 합을 최소화시키는 것이다.

따라서, 어느 의사결정자가 m_0개의 대안과 n_0개의 속성을 갖는 의사결정상황에 대해 그룹화 속성을 이용해 의사결정을 하는 경우 p=1일 때 $n_1 = n_0$ 라면 모든 속성을 한번에 걸쳐서 고려하는 것으로 지금까지 대부분의 접근방법과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 어느 의사결정자로 부터 단계 p를 거치면서 m_p(p=1일 때 m_1=m_0)개의 대안에 대해 속성의 중요성과 유사성에

표 3.1 벡터정규화한 의사결정상황

group 속성 / 대안	G_1			G_2	G_3		G_4		G_5
	c_1^1	c_2^1	c_3^1	c_1^2	c_1^3	c_2^3	c_1^4	c_2^4	c_1^5
a_1	1.000	0.674	0.162	0.808	0.373	0.578	0.121	0.020	0.432
a_2	1.000	0.198	0.573	0.087	1.000	0.500	0.738	0.519	0.571
a_3	0.751	0.234	0.196	0.200	0.016	0.321	0.685	0.000	0.208
a_4	0.437	0.807	0.383	0.394	0.102	0.155	0.000	0.092	0.370
a_5	0.000	0.491	0.108	0.503	0.282	0.212	0.278	0.390	1.000
a_6	0.479	0.354	0.030	0.106	0.000	0.999	0.473	0.069	0.130
a_7	0.625	0.000	1.000	0.000	0.674	0.734	1.000	1.000	0.109
a_8	0.303	0.817	0.061	0.146	0.087	0.120	0.291	0.115	0.755
a_9	0.421	0.594	0.136	0.617	0.321	0.031	0.452	0.013	0.230
a_{10}	0.502	0.495	0.053	0.560	0.034	0.304	0.545	0.090	0.182
a_{11}	0.360	0.997	0.068	0.489	0.014	0.000	0.081	0.028	0.622
a_{12}	0.096	0.120	0.000	0.667	0.413	0.538	0.589	0.031	0.499
a_{13}	0.418	1.000	0.204	0.631	0.001	0.236	0.235	0.009	0.381
a_{14}	0.490	0.182	0.173	1.000	0.153	1.000	0.502	0.208	0.000
a_{15}	0.640	0.705	0.282	0.391	0.304	0.150	0.307	0.262	0.509

a_2Pa_1, a_1Pa_3, a_3Pa_5, a_3Pa_6, a_7Pa_6, a_8Pa_7, a_8Pa_9,
a_8Pa_{10}, $a_{11}Pa_{12}$, $a_{13}Pa_{12}$, $a_{13}Pa_{14}$, $a_{15}Pa_{14}$

그러면 a_iPa_k를 갖는 $h(h=1,2,\cdots, H_1=12)$번째의 선호관계는 $\nu_1(a_k)\geq\nu_1(a_i)$가 되도록 $\nu_1(\cdot)$가 정해져서는 안된다는 것을 의미한다. 따라서 이러한 경우가 되는 오류의 크기를 ε_h라 할 때 $\nu_1(a_k)-\nu_1(a_i)-\varepsilon_h\leq 0(\varepsilon_h\geq 0)$를 제한식으로 하고 $\sum\varepsilon_h$를 최소로 하는 선형계획법 모형을 세우면 의사결정자의 쌍비교 결과를 최대로 만족하는 $\nu_1(\cdot)$의 α값들이 결정될 수 있을 것이다. 그리고 모든 변수의 값이 0가 되지 않도록 하기 위하여 LINMAP절차에서와 유사한 제한조건식을 추가하면 다음과 같다.

$$\min \sum_{h=1}^{12}\varepsilon_h$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & 0.476\alpha_2-0.411\alpha_3+0.476\alpha_{12}-0.411\alpha_{13}-0.004\alpha_{23}-0.004\alpha_{123}-\varepsilon_1\leq 0.0\\
& -0.249\alpha_1-0.440\alpha_2+0.034\alpha_3-0.498\alpha_{12}-0.015\alpha_{13}-0.063\alpha_{23}-0.075\alpha_{123}-\varepsilon_2\leq 0.0\\
& -0.751\alpha_1+0.257\alpha_2-0.088\alpha_3-0.176\alpha_{12}-0.147\alpha_{13}+0.007\alpha_{23}-0.034\alpha_{123}-\varepsilon_3\leq 0.0\\
& -0.272\alpha_1+0.120\alpha_2-0.166\alpha_3-0.006\alpha_{12}-0.133\alpha_{13}-0.035\alpha_{23}-0.029\alpha_{123}-\varepsilon_4\leq 0.0\\
& -0.146\alpha_1+0.354\alpha_2-0.970\alpha_3+0.170\alpha_{12}-0.607\alpha_{13}+0.011\alpha_{23}+0.005\alpha_{123}-\varepsilon_5\leq 0.0\\
& 0.322\alpha_1-0.817\alpha_2+0.939\alpha_3-0.248\alpha_{12}+0.607\alpha_{13}-0.050\alpha_{23}-0.015\alpha_{123}-\varepsilon_6\leq 0.0
\end{aligned}$$

$$0.118\alpha_1-0.223\alpha_2+0.075\alpha_3+0.002\alpha_{12}+0.039\alpha_{13}+0.031\alpha_{23}+0.019\alpha_{123}-\varepsilon_7\leq 0.0$$
$$0.199\alpha_1-0.322\alpha_2-0.008\alpha_3 \qquad 0.009\alpha_{13}-0.024\alpha_{23}-0.002\alpha_{123}-\varepsilon_8\leq 0.0$$
$$-0.264\alpha_1-0.877\alpha_2-0.068\alpha_3-0.347\alpha_{12}-0.024\alpha_{13}-0.068\alpha_{23}-0.024\alpha_{123}-\varepsilon_9\leq 0.0$$
$$-0.322\alpha_1-0.880\alpha_2-0.204\alpha_3-0.406\alpha_{12}-0.085\alpha_{13}-0.204\alpha_{23}-0.085\alpha_{123}-\varepsilon_{10}\leq 0.0$$
$$0.072\alpha_1-0.818\alpha_2-0.031\alpha_3-0.329\alpha_{12} \qquad -0.173\alpha_{23}-0.070\alpha_{123}-\varepsilon_{11}\leq 0.0$$
$$-0.015\alpha_1-0.523\alpha_2-0.109\alpha_3-0.362\alpha_{12}-0.095\alpha_{13}-0.168\alpha_{23}-0.112\alpha_{123}-\varepsilon_{12}\leq 0.0$$
$$1.388\alpha_1+3.693\alpha_2+1.007\alpha_3+1.724\alpha_{12}+0.866\alpha_{13}+0.740\alpha_{23}+0.426\alpha_{123}=1.0$$
$$\varepsilon_h\geq 0.0, \qquad h=1,2,\cdots,12$$

위의 결과를 이용해 구한 UVF는

$$\nu_1(a_i)=\alpha_0+0.0579x_1+0.4365x_2+0.0937x_3+0.4119x_1x_3$$

이다. 위의 L.P문제의 결과는 QSB(Quantitative Systems for Business)를 이용해 Big-M방법에 의해 해를 구한 것으로 반복 9단계에서 모든 $\varepsilon_h=0$이어서 목적함수 값이 0를 갖는다. 각 대안에 대한 $U(a_i)=\lambda_1\cdot\nu_1(a_i)$을 계산한 결과는 다음의 표 3.2와 같다. 여기서 $a_*^1=a_{13}^1$이므로 $x_*^1=[0.418, 1.000, 0.204]$이다. 그리고 p=2 이후의 단계에서 얻을 수 있는 최대값은 0.4이기때문에 $U(a_*)=0.30897$에 대해 $C_p<0$이므로 아직 계산에 의한 C_p를 이용할 수 없다. 다음으로

표3.2 $U(a_i)$와 대안선별

대안	$\nu_1(a_i)$	$U(a_i)$	비고
a_1	0.43393	0.26037	
a_2	0.46710	0.26039	
a_3	0.22456	0.13475	
a_4	0.48238	0.28942	
a_5	0.22447	0.13468	
a_6	0.19094	0.11458	
a_7	0.38733	0.23239	
a_8	0.38750	0.23250	
a_9	0.31997	0.19197	
a_{10}	0.26101	0.15660	
a_{11}	0.47249	0.28349	
a_{12}	0.05793	0.03477	
a_{13}	0.51494	0.30897	a_*^1
a_{14}	0.15892	0.09535	
a_{15}	0.44553	0.26732	

표3.3 $U(a_i)$와 대안선별

대안	$\nu_2(a_i)$	$U(a_i)$	비고
a_1	0.8080	0.46237	
a_2	0.0870	0.28214	제거
a_3	0.2000	0.18475	제거
a_4	0.3940	0.38792	
a_5	0.5030	0.26043	제거
a_6	0.1060	0.14108	제거
a_7	0.0000	0.23239	제거
a_8	0.1460	0.26899	제거
a_9	0.6170	0.34622	
a_{10}	0.5600	0.29660	제거
a_{11}	0.4890	0.40574	
a_{12}	0.6670	0.20152	제거
a_{13}	0.6310	0.46672	a_*^2
a_{14}	1.0000	0.34535	
a_{15}	0.3910	0.36506	

표3.4 $U(a_i)$와 대안선별

대안	$\nu_3(a_i)$	$U(a_i)$	비고
a_1	0.49825	0.51220	a_*^3
a_4	0.13439	0.40136	제거
a_9	0.14381	0.36060	제거
a_{11}	0.00544	0.40628	제거
a_{13}	0.14458	0.48118	
a_{14}	0.67049	0.41241	제거
a_{15}	0.20990	0.38605	제거

표3.5 $U(a_i)$와 대안선별

대안	$\nu_4(a_i)$	$U(a_i)$	비고
a_1	0.01174	0.51689	a_*^4
a_{13}	0.02269	0.49025	제거

의해 n_p개의 그룹화한 속성을 단계적으로 고려해 H_p개의 쌍비교 결과를 얻었다면 식(3.1)부터 식(3.6)에 의해 L.P로 모수벡터 α를 구함으로써 모든 m_p개 대안에 대한 $\nu_p(a_i)$를 얻을 수 있을 것이다. 이들 중 최대값을 갖는 최적해(current optimal solution)를 a_*^p라면 m_p개의 대안들에 대한 가치는 $0 \le U(a_1), U(a_2), \cdots, U(a_{m_p}) \le U(a_*)$의 관계를 갖을 것이다. 여기서, $\forall\ x \in [0,1]^{n_0}$이므로 선호하지 않는 대안을 제거시키기 위한 임의의 값

$$C_p = U(a_*) - (1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i)$$

에 대해 $C_p > 0$이면 이 값보다 적은 값을 갖는 대안을 제거시킬 수 있을 것이다. 그러나 $C_p \le 0$일지라도 어느 의사결정자가 최적해를 얻는데 필요한 시간과 정신적 노력이 과다하다고 생각되어 p단계까지의 최적해로 만족하고자 하는 경우나 위의 C_p값을 조정하기를 원하는 경우 C_p'에 의해 대안의 수를 더욱 감소시킬 수 있을 것이다. 이러한 과정을 통해 대안의 집합 A_p를 하나의 원소로 결정할 수 있다면 그 단계에서 최종 최적해를 구할 수 있다. 그러나 대안의 원소가 두 개 이상이라면 p+1단계로 하고 n_{p+1}개의 속성을 더 추가시켜서 모든 n_0개의 속성을 고려할 때 까지 이들에 대해 다시 $U(a_i)$을 구하는 과정을 반복하게 된다. 그러면 p단계 보다 p+1단계는 더욱 많은 속성에 관한 정보가 주어졌으므로 대안의 수를 다시 감소시킬 수 있을 것이다.

본 연구에서 C_p와 C_p'의 관계는 각 단계에서 제거되는 대안의 수 E_p와 E_p'에 영향을 미치므로 해의 수렴속도상에 있어서 $C_p < C_p'$이면 $E_p \le E_p'$가 된다.

수치예

다음의 표 3.1은 R.Boyer과 D.Savageau(1981)가 제시한 것을 H.Barron과 C.P.Schmidt (1988)[1]가 민감도분석을 위해 적용한 것으로 15개의 대안과 9개의 속성을 갖는 의사결정상황을 나타낸 것이다. 이 중 9개의 속성은 본 연구에서 제시한 방법들을 적용하기 위하여 선호독립인 $G_1 = \{c_1^1, c_2^1, c_3^1\}, G_2 = \{c_1^2\}, G_3 = \{c_1^3, c_2^3\}, G_4 = \{c_1^4, c_2^4\}, G_5 = \{c_1^5\}$의 5개 그룹으로 나눌 수 있다고 가정하고, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$=(0.6,0.25,0.10,0.04,0.01)와 $C_p' = C_p$을 가정하기로 한다. 여기서 전체 대안간의 쌍비교 횟수를 모두 얻는다면 ${}_{15}C_2 = 105$ 회의 비교를 해야한다. 그러나 어느 의사결정자로 부터 선호종속관계를 갖는 그룹의 속성별 중요성을 고려해 p=1일 때의 G_1에 대해 의사결정자가 확신을 가지고 비교가능한 대안 간의 쌍들만에 대하여 다음과 같은 결과를 얻었다고 하자.

p=2에 대해 n_2의 원소 수는 하나이고 그룹간에는 선호독립관계를 갖기 때문에 가법성질에 따른 $U(a_i) = \lambda_1 \cdot \nu_1(a_i) + \lambda_2 \cdot \nu_2(a_i)$을 계산한 결과는 표 3.3과 같은데, 여기서 p=3 이후의 단계에 얻을 수 있는 최대값은 0.15이므로 $U(a_*) = 0.46672$에 대해 $C_2 = U(a_*) - 0.15 = 0.31672$보다 적은 값을 갖는 대안 $a_2, a_3, a_5, a_6, a_7, a_8, a_{10}$와 a_{12}를 제거시킬 수 있다. 이것은 p=2까지의 그룹속성의 중요도에 의해서 나머지 그룹의 속성값이 어떤 값을 갖더라도 순위가 뒤바뀔 수 없는 대안을 제거시킨 것이다. 따라서 $A_2 = \{a_1, a_4, a_9, a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}$이다. 아직 $a_*^2 = a_{13}^2$으로 변하지 않았으므로 $x_*^2 = [0.418, 1.000, 0.204, 0.631]$이다. 그러므로 A_2에 대해 p=3으로 하고 대안간의 쌍비교를 통해 L.P를 이용해 해를 구하는 과정을 반복하게 된다. 여기서

$$a_1 P a_4,\ a_1 P a_9,\ a_1 P a_{11},\ a_1 P a_{13},\ a_1 P a_{15},$$
$$a_9 P a_{11},\ a_{13} P a_9,\ a_{15} P a_4,\ a_{15} P a_9,\ a_{15} P a_{11}$$

의 쌍비교 결과를 얻었다면 $\nu_3(a_i) = \alpha_0 + 0.3890x_1 + 0.6110x_2$에 대해 $U(a_*)=0.51220$과 $C_3 = 0.46220$을 이용해서 표 3.4와 같이 $A_3 = \{a_1, a_{13}\}$을 다시 구할 수 있을 것이다. 여기서 $a_*^3 = a_1^3$으로 변하였음을 알 수 있다. 그리고 p=4에 대해 $a_{13} P a_1$을 얻었다면 $\nu_4(a_i) = \alpha_0 + 0.9646x_1 + 0.0354x_2$이다. 이들로 부터 구한 $U(a_i)$는 표 3.5와 같다. 여기서 $U(a_*)=0.51689$와 $C_4 = 0.50689$를 이용해 $A_4 = \{a_1\}$을 구할 수 있다. 따라서 $a_*^4 = a_1^4$ 이다. p=5에 대해 G_5의 원소 수는 하나가 더 있지만 이미 A_4의 원소 수가 하나인 최적해를 구했으므로 대안 a_1이 최종의 최적대안(final optimal solution)이어서 $x_*^5 = [1.000, 0.674, 0.162, 0.808, 0.373, 0.578, 0.121, 0.020, 0.432]$임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구는 대안과 속성의 수가 매우 많은 경우의 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making;MADM)문제에 대해 속성의 그룹화를 이용해 대안의 수를 점차적으로 감소시켜 나가는 경우의 대화형 접근방법을 구축하는데 목적이 있다.

이러한 의사결정상황하에서 모든 대안과 속성을 고려한다는 것은 시간적으로나 정신적으로 많은 어려움이 따를 수 있다. 그러나 현실적으로 접하게 되는 대부분의 MADM문제들은 대안과 속성의 수가 매우 많은 것이 보통이기 때문에 이것들을 모두 합리적으로 고려하여 최적대안을 선정한다는 것은 매우 어려운 일이다.

그러나 지금까지의 주요한 연구·개발기법들 중 수리적 방법들은 주어진 문제에 대한 모형이나 선호구조에 제약을 가하여 최적해(optimal solution)를 구할 수 있지만 의사결정자의 입장을

거의 반영할 수 없으며, 이를 개선하기 위한 기존의 대화형 접근방법 역시 전체의 대안과 속성을 고려해야 하기 때문에 이들의 수가 많으면 많을 수록 쌍비교등으로 발생하는 경우의 수가 기하급수적으로 많아져서 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 매우 많아 진다는 어려움을 내포하고 있다. 또한, 지금까지의 방법들은 대부분 속성 간의 선호독립성(preferential independence)을 가정하고 있기 때문에 현실성이 부족하다.

따라서, 본 연구에서는 대안의 수와 속성의 수가 많을 지라도 속성의 그룹화를 통해 최적해일 가능성이 희박한 대안을 제거시킴으로써 경우의 수를 대폭 줄일 수 있어서 해에 훨씬 빨리 수렴(convergence)할 수 있으면서도 해가 얻어지는 과정을 쉽게 알 수 있다. 반면, 절단범위(cutting range) C_p'를 C_p보다 너무 크게 설정하면 최적해를 놓칠 가능성이 있다. 이러한 가능성은 빨리 해에 도달하는 잇점과 비교하여 의사결정자가 감수 할 만한 위험이라고 판단하였다면 별 문제가 없을 것이다. 사실 이것이 의사결정자의 입장을 더 잘 반영하는 방법이라고 생각된다.

【참 고 문 헌】

1.Barron,H., and C.P. Schmidt, "Sensitivity Analysis of Additive Multiattribute Value Models", *Operations Research Society of America*, Vol.36(1988), PP.122-127.

2.Benayoun, R.,J.D.Montgolfier, J.Tergny and O.Larichev, "Linear Programming with Multiple Objective Functions: STEp Method(STEM)", *Mathematical Programming*, Vol.1(1971), PP.366-375.

3.Costa,C.A.,*Reading in Multiple Criteria Decision Aid*,Springer-Verlag,New York,1990.

4.Dyson,R.G., "Maximum Programming, Fuzzy Linear Programming, and Multi -Criteria Decision Making", *Journal of Operations Research Society*, Vol.31(1980), PP.263-267.

5.Ecker,J.G., N.S.Hegner, and I.A. Kouada, "Generating all Maximal Efficient Faces for Multiple Objective Linear Programs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.30(1980), PP.353-381.

6.————, and I.A.Kouada, "Finding Efficient Points for Multiple Objective Linear Programs", *Mathematical Programming*, Vol.8(1975), PP.375-377.

7.Evans,J.P., and R.E.Steuer, "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs", *Mathematical Programming*, Vol.5(1973), PP.54-72.

8.Gal,T.A., "General Method for Determining the Set of All Efficient Solutions to a Linear Vector Maximum Problem", *European Journal of Operations Research*, Vol.2(1977), PP.307-322.

9.Geoffrion,A.M., J.S.Dyer, and A. Feinberg, "An Interactive Approach for Multicriterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department", *Management Science*, Vol.19(1972), PP.357-368.

10.Goicoechea,A., D.R.Hansen, and L. Duckstein, *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Application*, John Wiley and Sons, New York,1982.

11.Haimes,Y.Y., W.A.Hall, and H.T. Freedman, *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems : The Surrogate Worth Trade-off Method*, Elsevier, The Netherlands, 1975.

12.Hwang,C.L. and K.S.Yoon, *Multiple Attribute Decision Making*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, New York, 1981.

13.Keeney,R.L., and H.Raiffa, *Decision with Multiple Objectives : Preference and Value tradeoffs*, John Wiley and Sons, New York,1976.

14.Korhonen,P., H.Moskowitz, P.Salminen, and J.Wallenius, "Further Developments and Tests of a Progressive Algorithm for Multiple Criteria Decision Making", *Operations*

Research, Vol.41, No.6(1993), PP.1033-1045.

15.————————, and J.Talavage, "A Tradeoff Cut Approach to Multiple Objective Optimization", *Operations Research*, Vol.28(1980), PP.225-232.

16.Paolucci,M., and R.Pesenti, "Assessing a New Utility/Cost Function for Multiattribute Decision Making", *Operations Research Letters*, Vol.12(1992), PP.331-336.

17.Rosinger,E.E., "Interactive Algorithm for Multiobjective Optimization", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.35(1981), PP.339-365.

18.Steuer,R.E., "Multiple Objective Linear Programming with Interval Criterion Weights", *Management Science*, Vol.23(1976), PP.305-316.

19.——————, and E.U.Choo, "An Interactive Weighted Tchebycheff Procedure for Multiple Objective Programming", *Mathematical programming*, Vol.26(1983), PP.326-344.

20.Wallenius,J., "Comparative Evaluation of Some Interactive Approaches to Multicriterion Optimization", *Management Science*, Vol.21(1975), PP.1387-1396.

21.Wehrung,D.A., "Interactive Identification and Optimization using a Binary Preference Relation", *Operations Research*, Vol.26(1978), PP.322-331.

22.White,D.J., "Multi-Objective Interactive Programming", *Journal of Operations Research Society*, Vol.31(1980), PP.517-523.

23.Yu,P.L., "Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.7(1974), PP.319-377.

24.————, and M.Zeleny, "The Set of all Non-dominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.49(1975), PP.430-468.

25.Zeleny,M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.

26.Zionts,S., and J.Wallenius, "An Interactive Programming Method for Solving the Multiple Criteria Problem", *Management Science*, Vol. 22(1976), PP.652-663.

27.——————, and ——————, "An Interactive Multiple Objective Linear Programming Method for a Class of Underlying Nonlinear Utility Functions", *Management Science*, Vol.29(1983), PP.519-529.