

특성점의 성질을 이용한 다면체 곡면과 평행한 평면들과의 교선

Intersections of a Polyhedral Surface with Parallel Planes Using Characteristic Points

전차수, 김영일

경상대학교 산업공학과

Abstract

Presented in this paper is an algorithm to obtain the intersections of a polyhedral surface composed of triangle facets with a series of parallel planes for extracting machining information from the surface. The change of the topology of the intersection curves is caused by characteristic points of the surface when sectioning the surface with parallel planes. The characteristic points are internal maximum, internal minimum, internal saddle, boundary maximum, boundary minimum, boundary max-saddle, and boundary min-saddle points. The starting points of the intersects are found efficiently and robustly using the characteristic points. The characteristic points as well as the intersection contours can be used to evaluate the machining information for process planning, and to generate NC tool path in CAD/CAM system.

1. 서론

곡면간의 교선을 찾는 문제는 CAD/CAM에 있어서 가장 중요한 문제 중의 하나이다. 교선을 찾는 방법은 대수학적 방법, 래티스 탐색법, 곡면 분할법(subdivision technique)과 추적법(marching) [Barnhill '87, Barnhill '90] 등으로 나눌 수 있으며 이들의 조합에 의한 방법도 많이 개발되었다 [Parikalakis '93, Pratt '86].

곡면간 교선의 특수한 경우인 곡면과 평면간의 교선을 구하는 문제도 많은 연구자에 의하여 다루어져 왔다. Lee와 Fredrics[Lee '84]는 반복적 곡면분할법(recursive subdivision)을 곡면/평면 교차에 적용하였다. Q.Fu[Fu '90]는 양삼차 Bezier 곡면과 평면이 교차(intersection)되지 않을 필요충분 조건을 찾고 이를 이용한 효율적 알고리즘을 소개하였다. Lee와 Chang[Lee'92]은 래티스 탐색법에 의하여 교점들을 찾은 다음 이를 정렬(sorting)하여 연결하는 방법을 제안하였다. Farouki [Farouki '86]는 곡면과 대수 곡면(평면 포함)과의 교차시 교선 상의 특성점을 대수학적 방법으로

발견하고 이를 출발점으로 하여 교선을 추적하는 방법을 제안하였다. Blinn[Blinn '78]은 곡면 상의 국소 극한점을 미리 발견하고 이를 이용해 교선을 찾는 방법을 제안하였으며, Hoitsma와 Roche [Hoitsma '84]는 극한점을 발견하는 대수학적 방법을 제안하고 있다.

하나의 곡면을 두개의 평행한 평면과 교차시킬 때, 한 평면에 대한 교선과 다른 평면에 대한 교선을 비교하여 보면, 교선이 기하학적 형상만 변하는 경우도 있으나 교선의 생성, 소멸, 결합 및 분리 등과 같은 위상(topology)의 변화가 발생할 수도 있음을 알 수 있다. 절단 평면의 평행 이동에 따른 위상의 변화는 곡면 상의 특성점에 의하여 야기된다. 예를 들어, 절단 평면이 곡면 내부에 존재하는 국소 최대점 아래로 이동하면 폐곡선 형태의 교선이 새로 생성된다. 이러한 성질을 이용하면 교선의 개수를 예측할 수 있고 각 교선의 출발점을 매우 쉽게 찾을 수 있다. 본 연구에서는 곡면과 일련의 평행한 평면들과의 교선을 효율적으로 구하는 알고리즘을 제안하고자 한다. 이는 곡면 가공의 자동공정계획(CAPP)에 있어서 곡면으로부터 가공 정보를 추출하기 위하여 일련의 hunting 면과 가공 곡면의 교선을 구하거나, NC 공구 경로의 생성에 많이 이용된다.[Lee '92]

본 연구에서 제안하는 알고리즘은 두 단계의 나누어 진다.

1) 다면체 곡면의 꼭지점을 탐색하여 곡면의 특성점(characteristic points)을 발견하고 이를 절단 평면의 법선 방향으로 정렬한다.

2) 이전 평면의 교선에 대한 정보와 금번 평면으로 이동할 때 지난 특성점의 성질을 이용하여 모든 교선의 출발점을 찾고 출발점들로부터 교선들을 추적한다.

본 논문에서는 특성점의 성질을 체계적으로 분석하고 이를 이용하여 모든 교선의 출발점을 효율적으로 찾는 방법에 중점을 두고 있다. 제 2 장에서는 일반적인 매개변수형 곡면을 대상으로 특성점의 성질을 분석하였으며, 제 3 장 이후에는 삼각형 면으로 구성된 다면체 곡면을 대상으로 특성점을 탐색하고, 교선을 찾는 방안을 기술한다. 또한 본 연구에서 제안하는 방법을 몇 가지 전형적인 예에 적용한 결과를 보여 주고 있다.

2. 특성점의 성질

절단 평면 P_i 와 매개변수형 곡면 S 는 $R, N \in \mathbb{R}^3, h_i \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$P_i = \{ R \mid R \cdot N = h_i \}, i = 1, 2, \dots, N_p$$

$$S = \{ R \mid R = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in U \}$$

여기서, N 은 절단 평면의 단위 법선 벡터,

U 는 매개변수 (u,v) 의 영역

이고, 절단 평면들은 h_i 의 크기에 따라 정렬되어 있다. 즉, $h_1 > h_2 > \dots > h_{N_p}$ 이다.

u,v -정의역 상에서의 교선은

$$C_i = \{ (u,v) \mid S \cap P_i \} = \{ (u,v) \mid R(u,v) \cdot N = h_i \}$$

이다. 이 교선은 여러개의 분리된 곡선의 형태를 띌 수 있는데, 하나의 분리된 교선을 C_{ij} 로 표시

한다.

$$C_i = \bigcup_{j=1}^{N C_i} C_{ij}, \quad \text{여기서 } N C_i \text{ 는 } P_i \text{ 에 의해 형성된 교선 } C_i \text{ 중 분리된 교선의 개수.}$$

$$C_{ij} \cap C_{ik} = \emptyset, \text{ if } j \neq k$$

절단 평면이 이루는 half space H_i 를

$$H_i = \{ R \mid R \cdot N \geq h_i \}$$

와 같이 정의하고, u, v 정의역 상에서 하나의 절단 평면이 형성하는 교차영역은

$$D_i = \{(u, v) \mid S \cap H_i\}$$

로 정의한다. 교선과 마찬가지로 교차영역도 여러 개의 분리된 작은 영역들의 집합이 될 수 있는데, 하나의 분리된 교차영역을 D_{ik} 로 표시한다. 매개변수의 영역 U 에서 D_i 를 뺀 영역을 **비교차** 영역 Q_i 라 하면,

$$Q_i = U - D_i$$

이다. 또한 Q_i 를 구성하는 하나의 분리된 비교차영역을 Q_{il} 로 표시한다. 본 논문에서는 특별한 언급이 없는 경우 하나의 교선, 교차영역, 비교차영역은 각각 C_{ij} , D_{ik} , Q_{il} 과 같이 분리된 것을 뜻한다.

본 연구에서 말하는 특성점(characteristic point)이란 절단 평면이 $-N$ 방향으로 이동할 때 교선의 위상에 영향을 미치는 곡면 상의 점들로 이들의 종류와 성질은 그림 1과 표 1에 정리되어 있다. 표 1은 하나의 특성점이 독립적으로 갖고 있는 성질들이며 이들 특성점은 상호 관계를 갖기도 한다. 특성점에 관계된 일반적인 성질을 알아보면 다음과 같다.

성질 1. 두 절단 평면 사이에 특성점이 없으면 두 평면에 의한 교선은 같은 위상을 갖는다.

성질 2. 경계 상에 있는 특성점은 항상 짝수 개 존재하며, 곡면의 경계곡선을 하나의 폐곡선으로 연결하면 경계최대점(또는 경계최대안장점)과 경계최소점(또는 경계최소안장점)은 교대로 나타난다.

성질 3. 하위 평면 P_i 에 대한 교차영역은 상위 평면 P_{i-1} 에 대한 교차영역을 포함한다. 즉,

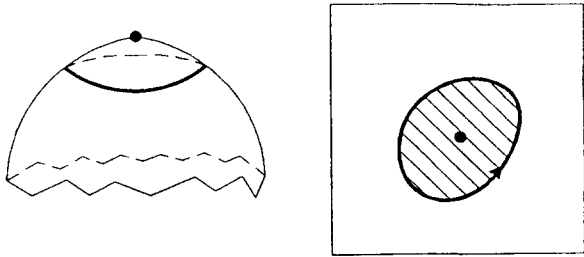
$$D_{i+1} \supset D_i \text{ iff } h_{i+1} < h_i.$$

성질 4. 매개변수 정의역에서 교차영역 내부의 점과 외부의 점을 잇는 정의역 내의 곡선은 그 교차영역의 경계를 이루는 교선과 반드시 한번 이상 만난다.

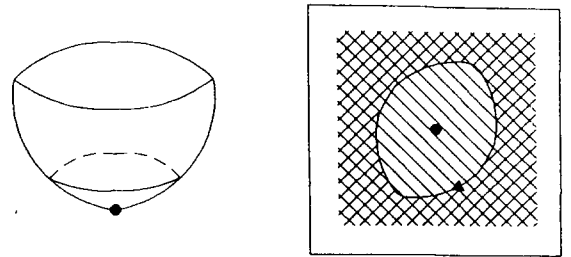
성질 5. 교선 중 개곡선의 양 끝점은 곡면의 경계 상에 있다.

성질 6. 한 폐곡선 상에 2 개 이상의 내부 최대점이 존재하면 그 안에는 1 개 이상의 내부 안장점이 존재한다.

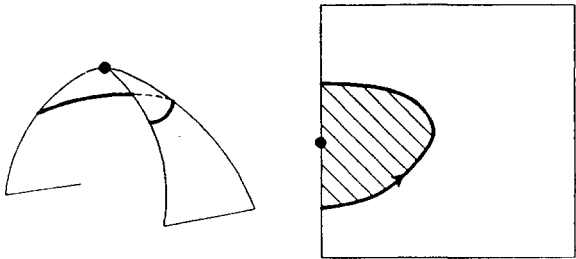
이상의 성질들은 표 1에 정리된 특성점의 개별적 성질과 함께 특성점을 탐색하거나 교선의 출발점을 찾는 데 이용된다.



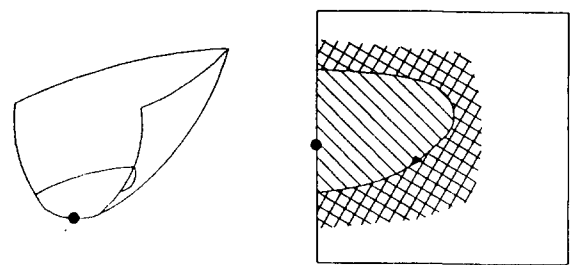
내부 최대점



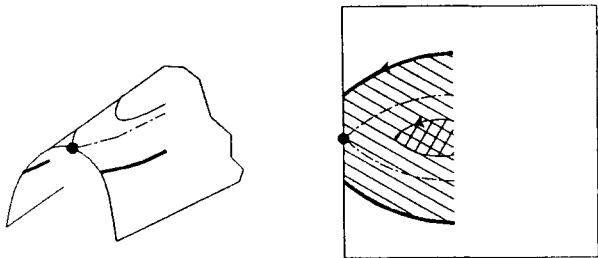
내부 최소점



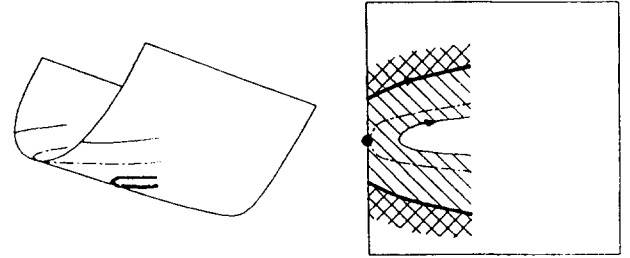
경계 최대점



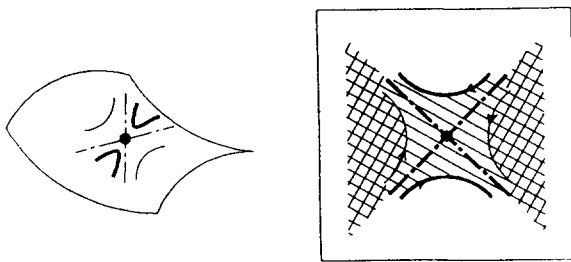
경계 최소점



경계 최대 안장점

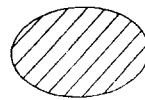


경계 최소 안장점

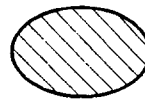


내부 안장점

<범례>



P1에 의한 교차영역



P2에 의한 교차영역
(단, $h_1 > h_2$)

그림 1. 특성점

표 1. 특성점의 종류와 성질

특성점의 종류 \ 성질	절단 평면과 높이 일치	절단 평면이 특성점 아래로 이동	
		교선의 변화	교차영역의 변화
내부 최대점	내부 고립점	폐곡선 생성	교차영역 생성
내부 최소점	내부 고립점	폐곡선 소멸	교차영역 내의 island 소멸
경계 최대점	경계 고립점	개곡선 생성	교차영역 생성
경계 최소점	경계 고립점	개곡선 소멸	교차영역을 이루는 개곡선이 곡면의 경계로 대체됨
경계 최대 안장점	경계와 교선의 접점	곡선의 분리	교차영역을 이루는 곡선에 곡면의 경계가 삽입됨
경계 최소 안장점	경계와 교선의 접점	곡선의 결합	교차영역의 결합(곡면 경계)
내부 안장점	교선간의 교점	곡선의 전환	교차영역의 결합(곡면 내부)

triangle index	Vertex index			Adjacent triangle index		
1	3	1	2	4	2	3
2	4	3	2	1	0	0
3	5	1	3	1	0	4
4	5	2	1	1	3	0

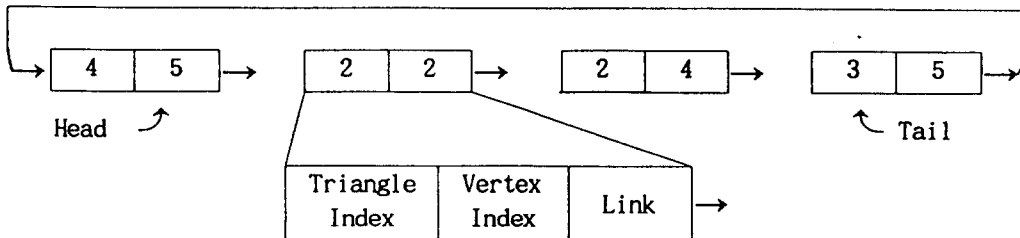
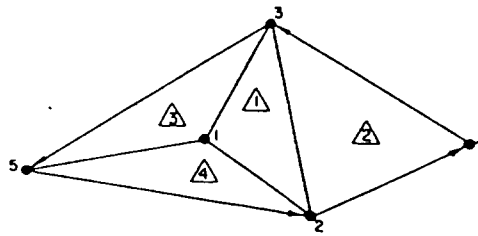


그림 2. 다면체 곡면의 자료구조 [Choi 91]

3. 다면체 곡면 모델과 교차 영역의 자료 구조

다면체 곡면은 기하학적 처리에 있어서 계산의 안정성(robustness)이 높으므로 NC 가공에 널리 이용되고 있다[Duncan 83, Choi 89]. 본 연구에서 다루는 다면체 곡면 모델은 꼭지점 list와 삼각형 list, 경계 곡선 list로 구성되어 있다.[Choi '91]. 그림2는 삼각형 list와 경계 곡선 list를 보여주고 있다.

교차영역은 몇 개의 분리된 단위 영역으로 나누어지며 하나의 단위 영역은 외부 loop와 몇 개(혹은 0개의) 내부 loop로 이루어진다. 비교차영역도 마찬가지이다. 각 단위 교차영역(또는 비교차영역)은 포함하고 있는 특성점의 정보를 갖는다. 교차영역의 외부 loop는 시계 방향, 내부 loop는 반시계 방향을 갖는다. 교선이 폐곡선인 경우는 그 자체가 loop가 되며, 개곡선인 경우는 경계 곡선을 합쳐 폐곡선을 형성한 것이 loop가 된다. 그림3은 교차 영역을 이루는 loop의 자료 구조를 보여주고 있는데 이는 근본적으로 trimmed surface의 경우와 같다.[Choi 91].

본 논문에서는 설명을 간단히 하기 위하여 절단 평면의 법선 벡터는 $N=(0,0,1)$ 인 것으로 가정한다. 일반적인 다면체 곡면에 대해서는 매개변수 곡면에서와 같은 영역(domain)의 개념을 도입하기 곤란하다. 본 연구에서는 다면체 곡면을 Z 축에서 볼 때 그림자가 생기지 않는 3축 가공 가능 곡면으로 제한하고, 다면체 곡면을 xy 평면에 투영한 것을 곡면의 영역(domain)으로 한다. Overhanged 곡면(3축 가공이 불가능한 곡면)에 대해서는 여러 개의 3축 가공 가능 곡면으로 분할한 후 각각의 분할 곡면의 교선을 구하여 결합하면 된다.

4. 다면체 곡면 모델에서의 특성점 탐색

다면체 곡면 모델에서 특성점을 탐색하는 과정은 매우 간단하다. 하나의 꼭지점에 대해서 이웃 점(다면체의 edge로 연결된 점)들과의 높이(z값)를 비교하면 된다. 그림 4에서 \oplus, \ominus, \odot 은 각각 이웃점이 검사점 보다 높은 점, 낮은 점, 높이가 같은 점임을 나타낸다.

그림 4(a)는 경사면에 놓인 점으로 특성점이 아닌 경우이다. 또한 본 연구에서는 접면이 xy평면과 평행한 접면(또는 접선)을 갖는 변곡점은 특성점으로 간주하지 않는다. 그림 (b),(c)는 각각 내부 최대점과 내부 최소점을 나타낸다. 이웃점의 높이가 검사점과 같은 경우는 검사하는 점을 변 또는 면으로 확장하여 생각한다. 그림 (d),(e)는 면과 변의 형상을 갖는 특성점을 보여 주고 있다. 또한 특수한 경우로서 특성점이 loop를 이루는 경우도 있다. 그림 (f)와 (g)는 내부안장점으로 이웃점들의 부호를 일정한 방향으로 조사하면 부호가 4번 또는 6번 변경되고 있다. 부호가 2n번 바뀌는 내부안장점을 n-fold 내부안장점이라 하며 이 점은 n개의 교차 영역을 결합시키는 성질을 갖는다. 그림 4(h)-(j)는 각각 경계최대점, 경계최소점, 경계최대안장점, 경계최소안장점을 보여준다.

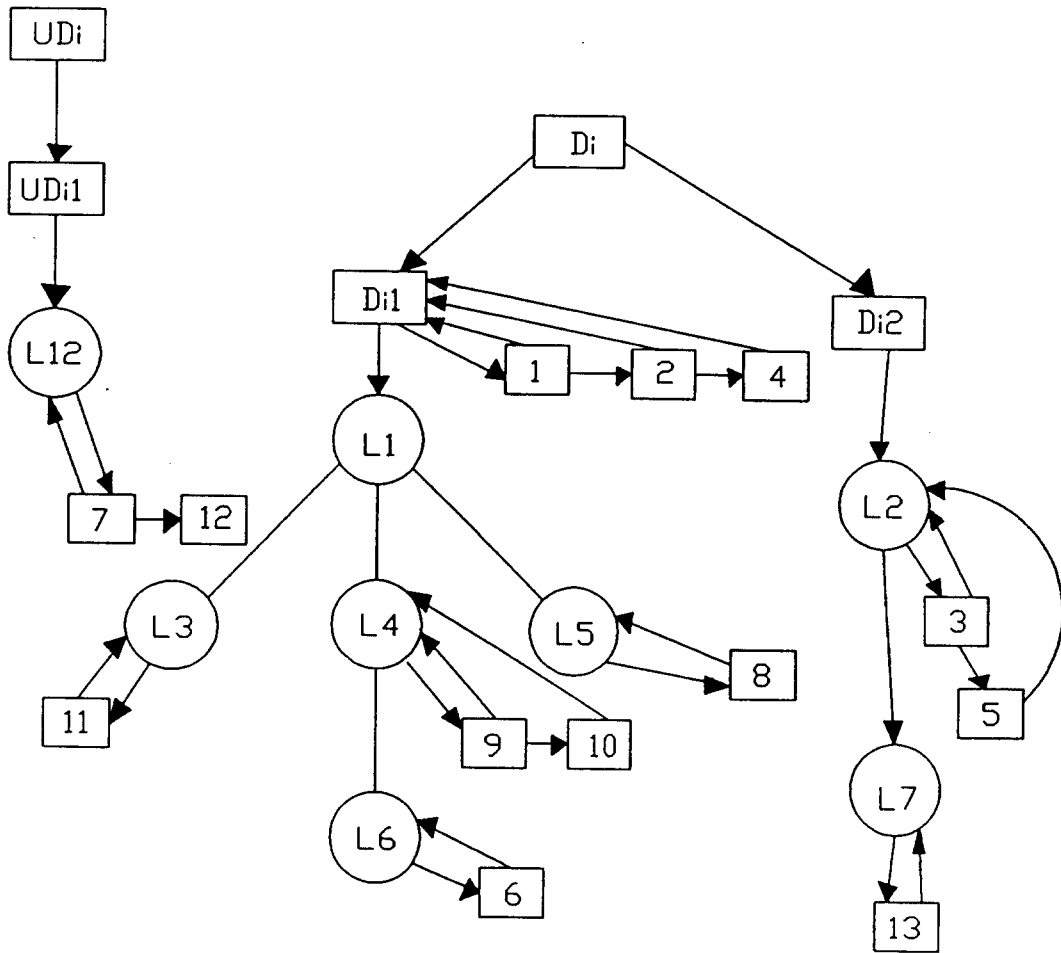
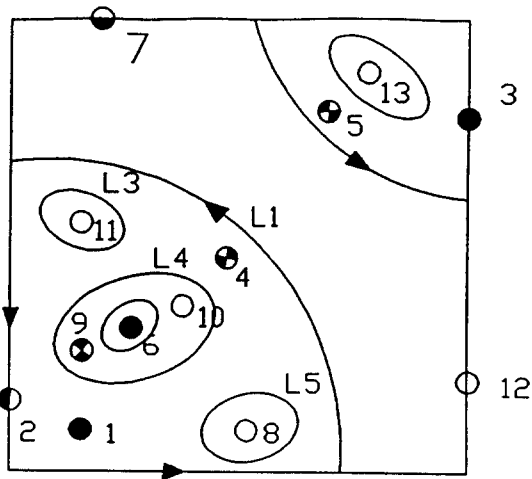
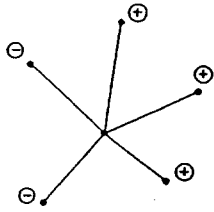
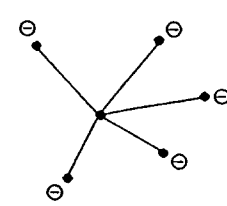
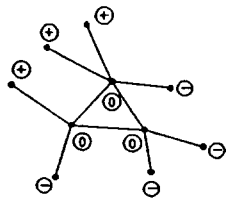


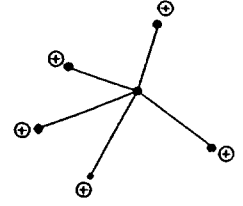
그림 3. 교차영역의 자료구조



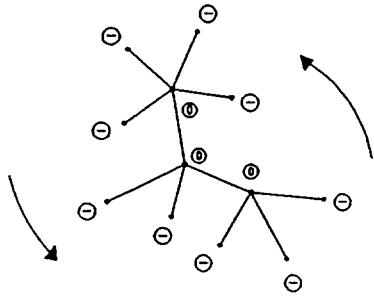
(a) 특성점이 아닌 경우



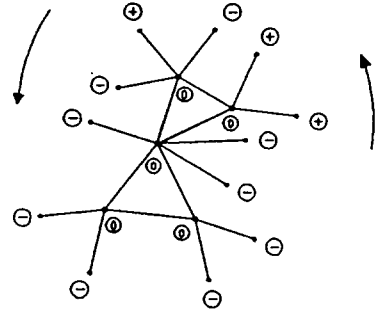
(b) 내부최대점



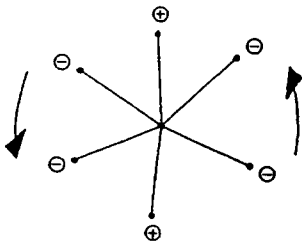
(c) 내부최소점



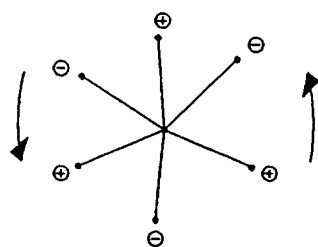
(d) 내부최소점(변)



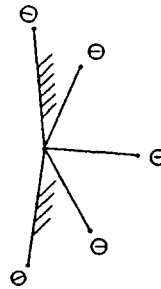
(e) 내부 안장점(면)



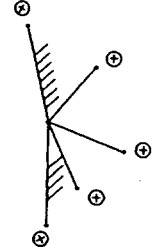
(f) 2-fold 내부 안장점



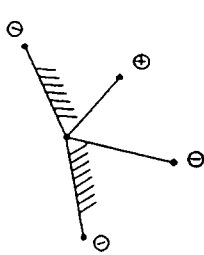
(g) 3-fold 내부 안장점



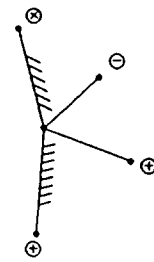
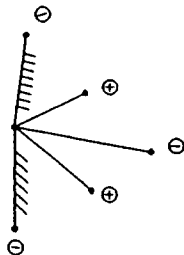
(h) 경계최대점



(i) 경계최소점



(j) 경계최대안장점(1-fold, 2-fold)



(k) 경계최소안장점(1-fold, 2-fold)

그림 4. 다면체 모델에서의 특성점

5. 교선의 출발점 탐색 및 교선의 추적, 교차 영역의 형성

교선 출발점의 탐색을 효율적으로 하기 위하여 특성점들을 절단 평면의 법선 방향(높이 순서)으로 정렬한다. 절단 평면 P_{i-1} 에 대한 교선을 구한 후 다음 평면 P_i (P_{i-1} 보다 낮은 평면)에 대한 교선을 찾기 위해서는 두 평면 사이에 존재하는 특성 점의 성질을 이용한다.

1) 두 절단 평면 사이에 특성점이 없는 경우

이 경우는 교차 영역에 위상의 변화가 없으므로 각 단위 교차 영역을 단순 확장하면 된다. 외부 loop중에서 폐교선 loop의 경우는 임의 점에서 영역의 바깥 쪽을 향하는 교선의 법선 방향으로 출발점을 탐색하고 개곡선 loop는 경계 곡선을 따라 출발점을 탐색한다(그림 5(a)). 내부 loop에서는 경계 곡선의 임의의 점에서 내부 loop에 존재하는 내부최소점 방향으로 출발점을 탐색한다. 출발점으로부터 추적(tracing)하여 교선을 구한다(그림 5(b)).

2) 두 절단 평면 사이에 단 한 개의 특성 점이 존재하는 경우

(1) 내부최대점 : 이 점에서 임의의 방향으로 탐색하여 새로운 교선의 출발점을 찾고, 추적법에 의하여 폐교선을 구한다. 이 폐교선은 새로운 단위 교차영역을 형성한다(그림 5(c)). 기존의 다른 단위 교차영역은 1)에서와 같은 방법으로 단순 확장한다.

(2) 내부최소점 : 두 절단 평면 사이에 1개의 내부 최소점이 존재하는 경우는 이 점이 속한 교차 영역의 내부 loop가 소멸된다. 교차영역에서 내부 loop를 제거하고 외부 loop는 단순 확장한다(그림 5(d)). 다른 단위 교차 영역은 단순 확장한다.

(3) 내부안장점 : 내부 안장점은 교차 영역을 결합시키는 역할을 하는데 한 영역의 두 경계를 결합시켜 내부 loop(island)를 만들기도 하고(그림 5(e)) 다른 두 영역을 결합시키기도 한다(그림 5(f)). n-fold 안장점은 n개의 영역 경계를 결합시킨다. n-fold 안장점은 n개의 능선과 n 개의 골을 갖고있다. 내부안장점을 지나는 경우의 처리 절차는 다음과 같다.

① 안장점에서 모든 골에 대해 다음을 수행한다.

① a 골을 따라 출발점을 탐색한다.

① b 이 출발점이 이 안장점에서 구한 교선들과 만나는 가를 조사한다.

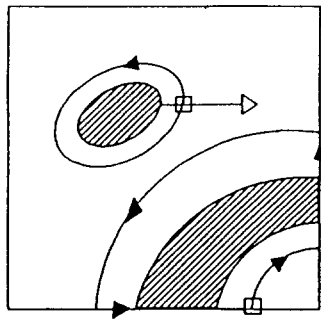
만나면 버리고, 아니면 새로운 교선을 추적한다.

② 이제까지 구한 교선으로 loop들을 형성한다. 이들 중에서 1개는 외부 loop이고, 나머지는 내부 loop들이다. 이를 가려내어 하나의 교차영역을 형성한다.

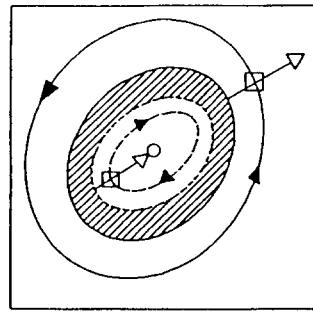
③ 기존(P_{i-1} 에 대한)의 모든 교차영역이 ②의 교차영역에 포함되는가를 검사한다. 포함되는 교차 영역은 제거하고, 그렇지 않은 것은 단순 확장한다.

④ ②의 교차영역에 내부 loop가 있는 경우는 비교차영역이 분할되므로 P_i 아래에 있는 특성점의 소속을 조정한다.

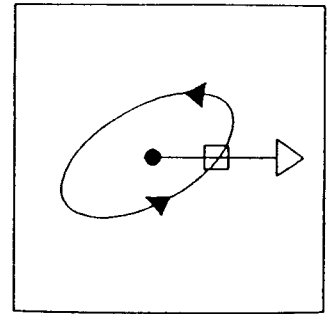
(4) 경계최대점 : 그림 5(g)와 같이 개곡선의 교선이 생성된다. 경계 곡선을 따라 출발점을 탐색



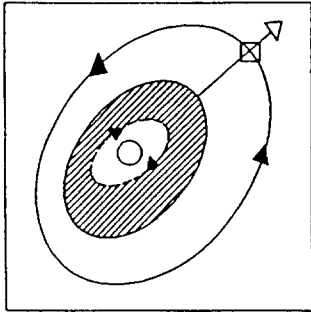
(a)



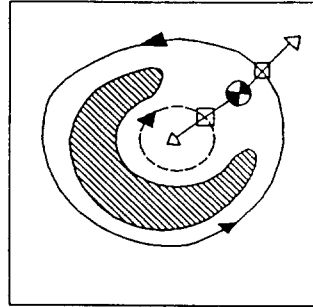
(b)



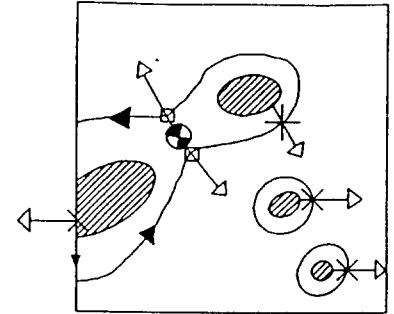
(c)



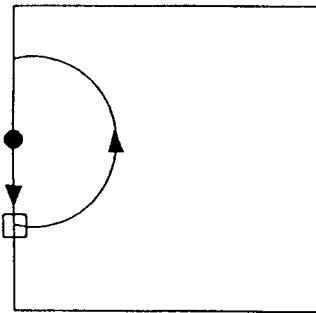
(d)



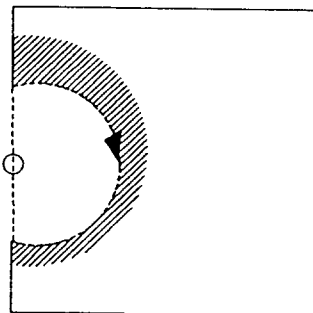
(e)



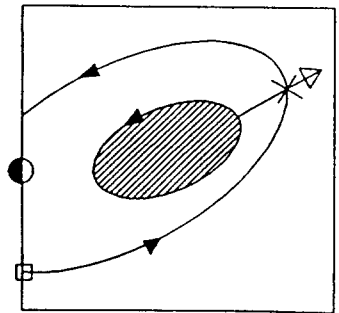
(f)



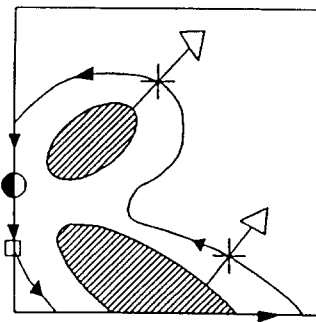
(g)



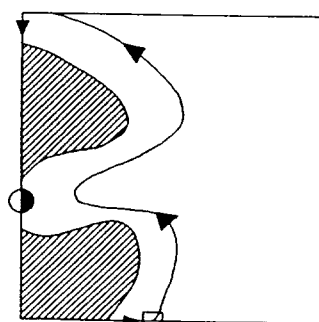
(h)



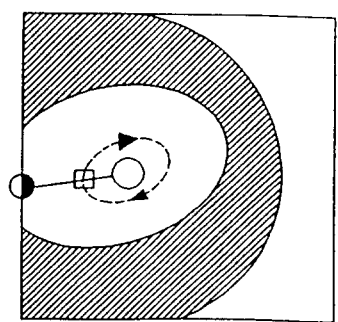
(i)



(j)



(k)



(l)

그림 5. 교선탐색

한다.

(5) 경계최소점 : 두 절단 평면 사이에 한 개의 경계 최소점만 존재하면 이를 둘러싸고 있는 非교차 영역이 소멸된다(그림 5(h)).

(6) 경계최대안장점 : 이 특성점으로부터 경계 곡선을 따라 출발점을 찾은 후 교선을 추적하여 하나의 교차 영역을 만든다. 기존의 교차영역 중 이 영역에 포함되는 것을 찾아 제거한다. 그림 5(i)는 1-fold의 경우이고 그림 5(j)는 2-fold의 경우이다. 기존의 비교차영역이 분할되는 경우는 평면 P_i 아래에 있는 특성점의 소속을 조정한다.

(7) 경계최소안장점 : 경계 곡선에서 이 점의 양편에 있는 교차영역이 서로 다른 경우는 그 두 영역이 하나의 영역으로 결합된다. 그림 5(k)와 같이 경계 곡선을 따라 출발점을 찾아 교선을 추적한다. 양편에 있는 교차 영역이 하나의 영역이 경우는 그림 5(l)과 같이 내부 loop가 형성된다. 이 특성점으로 부터 내부 loop 속에 있는 최소점 방향으로 탐색하여 내부 loop의 출발점을 찾는다.

3) 두 절단 평면 사이에 여러 개의 특성 점이 존재하는 경우

이 경우는 특성점의 영향이 겹쳐서 나타나므로 매우 복잡하다. 특히 안장점(내부, 경계최대, 경계최소)은 교차 영역을 결합시키므로 복잡도를 가장 크게 한다. 따라서 안장점 부터 고려한다.

① P_{i-1} 와 P_i 에 속하는 모든 안장점에 대해서 가장 낮은 위치의 안장점으로 부터 높은 것의 순서로 다음을 행한다.

ⓐ 이 안장점을 포함하는 새로운 교차영역을 만든다.(2)의 (3),(6),(7) 참고)

ⓑ 이 교차영역에 내부 loop가 생기거나 非교차 영역이 분할된 경우는 P_i 아래에 있는 특성점들의 소속을 다시 정한다.

ⓒ 기존의 교차영역들이 이 교차영역에 포함되는가를 검사한다.

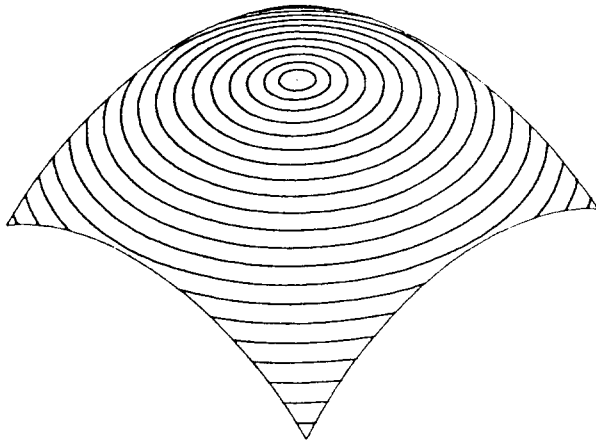
ⓓ P_{i-1} 과 P_i 사이에 다른 모든 특성 점이 이 교차영역에 포함되는가를 검사한다.

② P_{i-1} 과 P_i 사이에 속하는 모든 최대점(내부, 경계)에 대해서 새로운 교차 영역을 만든다.

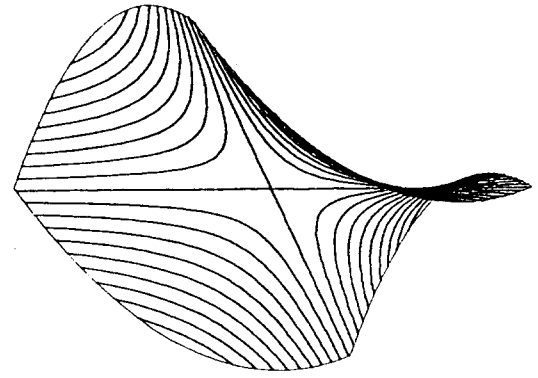
③ P_{i-1} 과 P_i 사이에 속하는 모든 최소점에 대해서 그들이 속하는 교차 영역을 찾는다.

6. 적용 사례

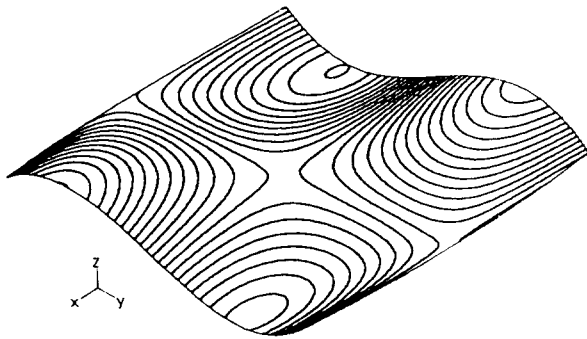
본 연구에서 제안하는 알고리즘을 IBM PC 486에서 C로 프로그램 하였으며 이를 몇 가지 전형적인 곡면에 적용하였다. 그림 6(a)는 구면의 일부이다. 이 경우는 한 개의 내부최대점과 4개의 경계최대안장점, 4개의 경계최소점을 갖고 있다. 그림 6(b)는 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid)의 일부이다. 두개의 경계최대점과 두개의 경계최소점, 한 개의 안장점을 갖고 있다. 절단 평면이 안장점을 정확히 지나고 있는데 여기서 교선간에 교차되고 있음을 보여준다. 그림 6(c)는 3차 Ferguson곡면의 경우이다. 두개의 내부최소점과 한 개의 내부안장점, 두개의 경계최대점, 한 개의 경계최소점, 두개의 경계최대안장점, 3개의 경계최소안장점을 갖고 있다.



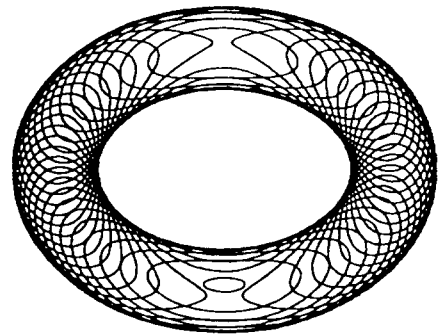
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 6. 적용사례

그림 6(d)는 torus면인데 3축 NC가공 가능 곡면이 아니므로 두개의 곡면으로 분할하여 교선을 구한 후 결합하였다.

7. 결론 및 토의

본 연구에서는 두 절단 평면에 의한 교선들의 위상 변화에 영향을 미치는 특성점의 성질을 체계적으로 분석하였으며 이를 삼각면으로 구성된 다면체 곡면과 다수의 평행 평면과의 교선을 찾는 문제에 적용하였다. 특성점은 교선의 생성, 소멸, 결합 및 분리에 관여하는데, 교차영역의 관점에서 보면 교선의 위상 변화를 보다 명확히 파악할 수 있다. 본 알고리즘에서는 특성점에 의하여 교선의 개수와 개(open).폐(closed)의 속성을 파악할 수 있으므로 곡면/평면의 교차 문제를 매우 효율적이며 견고(robust)하게 해결할 수 있다. 본 연구의 결과는 다면체 곡면뿐 아니라 일반적인 매개변수형 곡면에 대해서도 쉽게 응용할 수 있다.

본 알고리즘에서는 각 절단 평면에 대한 곡면의 단면 곡선의 기하 정보 뿐만 아니라 단면곡선의 위상 정보와 특성점을 같이 얻을 수 있는데, 이들은 곡면으로부터 가공 특징(machining feature)를 추출하는데 유용하게 쓰일 수 있다. 예를 들어, 곡면의 가공 소재의 높이를 파악하는데는 최대.최소점이 이용되며, 깊이가 깊은 cavity를 가공하기 위해서는 cavity의 가장 깊은 위치에 드릴 구멍을 미리 뚫고 center-cut이 없는 황삭용 밀링 공구로 가공하는 것이 일반적인데 cavity 내의 최소점이 이용된다. 또한 공구가 가공 곡면 위를 급속으로 이동할 때 이동 경로 근방에 있는 국소 최대점을 알고 있으면 최적의 이동 높이를 구할 수 있다.

참고문헌

- Choi, B.K., (1991) *Surface Modeling for CAD/CAM*, Elsevier.
- Lee, R.B. and Fredricks,D.A. (1984) Intersection of parametric surfaces and a plane, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(8),112-117.
- Lee, Y-S. and Chang T-C. (1992a) A contour method for intersections of hunting-planes to evaluate machining information, *Journal of Design and Manufacturing*, 2, 119-133.
- Lee, Y.S., Choi,B.K. and Chang,T.C. (1992b) Cutter distribution and cutter selection for sculptured surface cavity machining, *International Journal of Production Research*, 36(6), 1447-1470.
- Barnhill, R.E. and Farin,G., Jordan,M. and Piper,B.R.(1987), Surface/Surface Intersection, *Computer Aided Geometric Design*, 4(1-2), 3-16.
- Barnhill, R.E. and Kersey, S. N. (1990) A marching method for parametric surface/surface intersection, *Computer Aided Geometric Design*,7(1-4),257-280.
- Blinn,J. (1978) *Computer Display of Curved Surface*, Ph.D. thesis, University of Utah, 1978.
- Duncan, J.P. and Mair, S.G. (1983) *Sculptured Surface in Engineering and Medicine*, Cambridge Univ. Press.
- Farouki, R. (1986), The characterization of parametric surface sections, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33, 209-236.
- Farouki, R. (1987), Direct surface section evaluation, in *Geometric modelling*, Farin,G.(ed), SIAM, Philadelphia.
- Fu,Q. (1990), The Intersection of a bicubic Bezier patch and a plane. *Computer Aided Geometric Design*, 6(1-4), 137-153.
- Hoitsma, D.H. and Roche,M. (1984) The computation of all plane/surface intersections for CAD/CAM applications, in *Computer Aided Geometric Modelling*, NASA C.P. 2272, 15-18.
- Houghton,E.G., Emmett,R.F., Factor,J.D. and Sabharwal,C.L. (1984), Implementation of a divide-and-conquer method for intersection of parametric surface, in *Surfaces in Computer Aided Geometric Design '84*, Barnhill,E.(ed.), North Holland, Amsterdam.
- Choi, B.K. and Jun, C.S. (1989) Ball-end cutter interference avoidance in NC machining of sculptured surfaces, *Computer-Aided Design*, 21(6), 371-378.
- Patrikalakis,N.M. (1993) Surface-to-surface intersections, *IEEE Computer Graphics and Applications*, January, 89-95.
- Pratt,M.J. and Geisow,A.D. (1986) Surface/Surface intersection problem, in *The Mathematics of Surface*, Oxford University Press, Oxford, pp.117-142.