

칼만필터를 적용한 연속생산공정의 SPC(Statistical Process Control)

Statistical Process Control for Continuous Flow Processes Using the Kalman Filter

권상혁 · 김광섭 · 왕지남

아주대학교 산업공학과

ABSTRACT

통계적 공정관리 분야가 점차 컴퓨터를 이용한 관리를 하게 되므로써 공정관리의 온라인화, 실시간화가 되고 있는 가운데, 기존의 관리도는 공정의 파라미터를 기지의 상수값으로 간주하므로 모형이 잘못 설정되었을 경우 상당히 많은 오보(false alarm)를 발생하게 된다. 이에 본 연구는 연속생산공정에서, 칼만필터를 적용하여 공정의 불확실한 파라미터와 모형의 오차에도 불구하고 공정의 변화를 보다 빠르고 정확하게 탐지할 수 있는 관리도를 설계하였다.

본 연구에서 설계한 관리도는 관측치들간에 시간적 종속성이 존재하는 경우에 있어서, 관측치들을 시계열모형으로 묘사를 하여, 파라미터(parameter)를 추정하고, 잔차를 얻어서 만든 잔차관리도로서, 실시간으로 생산공정을 관리하는 경우 효과적임을 보이기 위하여, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 ARL을 구하여 기존에 사용되고 있는 관리도와 수행도를 비교·평가 하였다.

1. 서론

통계적 기법을 품질관리에 활용하기 시작하던 초기에는 완성품을 검사하여 품질이 만족스럽지 못한 제품에 대해서는 선별하여 폐기처분이나 적절한 조치를 취하는 등 사후의 품질통제 기능을 하는 샘플링 검사에 큰 비중을 두었다. 그러나 이것이 품질의 향상에 크게 기여를 하지 못하게 됨에 따라서 완성품에 대한 조치보다는 제조공정을 관리하여 불량품이 생산되지 않도록 예방활동을 하는, 통계적 공정관리(Statistical Process Control : SPC)의 체계적인 활동이 강조되었다. 이것의 대표적인 기법들은 Shewhart가 제안한 관리도법이나 공정능력분석, 샘플링검사법을 들 수 있다. 이 중에서 관리도는 품질을 관리하기 위한 생산공정의 모니터링(monitoring)을 위한 중요한 도구로써 통계적 공정관리에서 공정의 변화를 탐지하기 위해 많이 사용된다.

본 연구에서는 공정에서 얻어진 자료가 시계열모형으로 묘사될 경우에 있어서 칼만필터를 이용하여 공정의 모수(parameter)를 계속 추정하여 예측치를 구하고 관측치와 예측치와의 차이에서 얻을 수 있는 잔차를 통계량으로 사용하여 공정평균의 변화를 보다 빠르고 정확하게 탐지할 수 있고, 온라인화 그리고 실시간화가 가능한 관리도를 설계한다. 관리도의 설계에 있어서는 Crowder(1986,1991)의 관측치를 이용한 반복적인 칼만필터 알고리즘(algorithm)을 사용하여 관리도에 필요한 통계량(공정에서의 관측치들간의 평균과 분산)을 구하여 관리한계선을 계산한다. 그

리고 관리도를 \bar{x} 관리도와 비교·분석한다.

기존의 연구가 AR(1)모형이나 AR(2)모형에 그친데 비해 본 연구는 AR(6)모형까지 확장을 해서 기존의 관리도와 비교해 보았으며, 관리도의 수행도 비교분석에 있어서는 관측치로부터 얻은 통계량이 관리한계선을 벗어날때까지의 평균 관측치 측정 횟수를 나타내는 평균 런의 길이 (Average Run Length : ARL)를 사용하며 이 값은 컴퓨터 시뮬레이션을 사용하여 구한다.

2. 칼만필터

2.1 기호정의

- y_t ; 시점 t 에서의 관측치
- \hat{y}_t ; 시점 t 에서의 예측치
- x_t ; 시점 t 에서의 상태변수
- Φ_t ; 시점 t 에서의 상태전이행렬
- G_t, H_t ; 시점 t 에서의 알고 있는 행렬
- v_t ; $N(0, R_t)$ 의 *white-noise*
- ω_t ; $N(0, Q_t)$ 의 *white-noise*
- $\hat{x}_t(+)$; $E\{x_t | y_t, y_{t-1}, \dots\}$
- $\hat{x}_t(-)$; $E\{x_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$

2.2. 칼만필터

측정 데이터를 연산 처리하여 가장 요망되는 추정치를 만들어내는 알고리즘 그 자체를 필터 (filter)라고 한다. 필터는 신호의 초기 추정치와 오차공분산(error covariance)을 시작으로 하여, 실시간으로 얻은 측정치를 이용하여 수정하고 교체하게 된다. 즉, 실시간으로 측정된 새로운 데이터는 칼만필터의 추정치를 개선시키는데 사용한다.

이와같은 칼만모형은 다음과 같이 관측방정식(observation/measurement equation)과 상태방정식(state/system equation)으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\text{관측방정식 : } y_t = H_t x_t + v_t \quad (2.1)$$

$$\text{상태방정식 : } x_t = \Phi_t x_{t-1} + G_t \omega_t \quad (2.2)$$

상태벡터의 최소분산 불편추정치(minimum variance unbiased estimator) $\hat{x}_t(+)$ 는 $E\{x_t | y_t, y_{t-1}, \dots\}$ 이 되고, $\hat{x}_t(-) = E\{x_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$ 와 관측치 y_t 를 이용하여 개선된 추정치(updated estimate) $\hat{x}_t(+)$ 를 구할 수 있다. 이와같은 칼만필터는 다음의 방정식들에 의해 구성된다.

개선된 추정치 :

$$\hat{x}_t(+)=\hat{x}_t(-)+K_t[y_t-H_t\hat{x}_t(-)] \quad (2.3)$$

$$\text{여기서, } \hat{x}_t(-)=\Phi\hat{x}_{t-1}(+) \quad (2.4)$$

칼만게인 :

$$K_t=\frac{P_t(-)H_t}{H_tP_t(-)H_t^T+R_t} \quad (2.5)$$

$$\text{여기서, } P_t(-)=\Phi P_{t-1}(+)\Phi^T+GQ_tG^T \quad (2.6)$$

오차공분산 :

$$\begin{aligned} P_t(+)&=P_t(-)-K_tH_tP_t(-) \\ &=[I-K_tH_t]P_t(-) \end{aligned} \quad (2.7)$$

이와같은 방정식을 사용하는 칼만필터의 반복적인 과정은 다음과 같은 단계에 의해 수행되며 <그림 2.1>과 <그림 2.2>는 이를 설명하고 있다.

단계 0 : 시점 0에서의 $x(-)$ 와 $P(-)$ 를 입력한다.

단계 1 : 칼만게인 K_t 를 식 (2.5)에 의해 구한다.

단계 2 : 칼만게인과 관측치 y_t 를 식 (2.3)에 적용하여 개선된 추정치 $\hat{x}_t(+)$ 를 구한다.

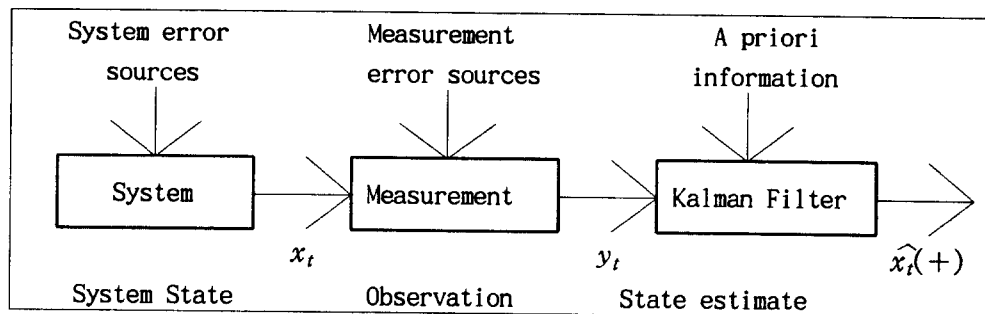
단계 3 : 개선된 추정치에 대한 오차공분산 $P_t(+)$ 를 식(2.7)을 이용하여 구한다.

단계 4 : 시점을 변화시킨다. ($t=t+1$)

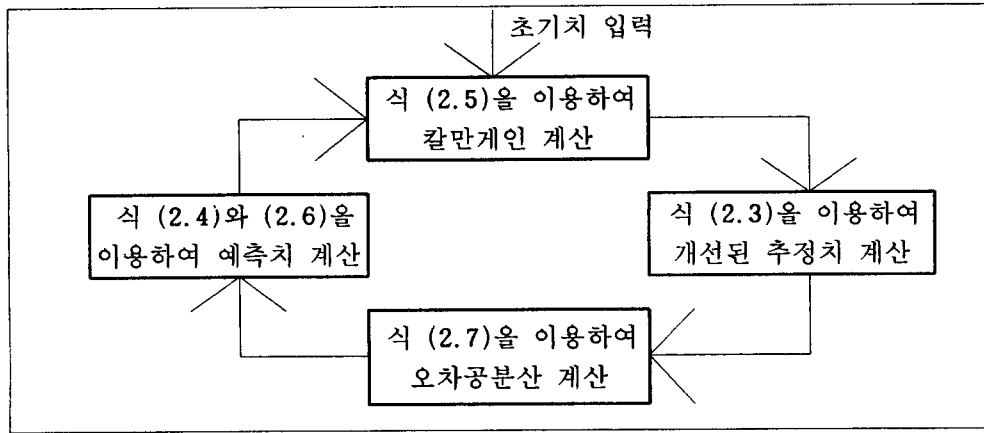
단계 5 : 단계 3에서 얻어진 $\hat{x}_t(+)$ 와 $P_t(+)$ 을 식 (2.4)와 식 (2.6)에 적용하여

$\hat{x}_t(-)$ 와 $P_t(-)$ 를 구한다.

단계 6 : 단계 1로 되돌아 간다.



<그림 2.1>칼만필터의 블록 다이어그램



〈그림 2.2〉 칼만필터의 반복적인 계산과정

3. 칼만필터를 적용한 잔차관리도

3.1. 칼만필터와 AR모형

제조공정으로부터 얻은 관측치가 시간적 종속성을 갖게 되는 경우 공정은 시계열 모형을 사용하여 묘사할 수 있다. 이 중에서 p차의 AR(자기회귀:Autoregressive)모형이 장치산업, 석유화학산업 등과 같은 연속생산공정을 잘 묘사한다는 것은 기존의 연구를 통하여 알 수 있다.

AR(p) 모형으로 묘사되는 공정의 출력은 일반적으로 다음과 같이 묘사된다.

$$y_t = \mu_T + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \dots + \varphi_p y_p + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

여기서, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

공정이 AR(p) 모형으로 묘사되는 경우, AR(p) 모형은 벡터공간의 칼만필터를 이용하여 묘사할 수 있다. 상태방정식의 상태전이행렬을 단위행렬(I)로 설정하면 칼만필터를 이용하여 AR(p) 모형을

$$\text{관측방정식} : y_t = H_t x_t + v_t \quad (3.2)$$

$$\text{상태방정식} : x_t = x_{t-1} + \omega_t \quad (3.3)$$

여기서, $x_t = [\mu_t, \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{p,t}]^T$

$$H_t = [1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}]$$

과 같이 표현할 수 있다.

반복적인 칼만필터 알고리즘의 방정식은

개선된 추정치 :

$$\hat{x}_t^+ = \hat{x}_t^- + K_t [y_t - H_t \hat{x}_t^-] \quad (3.4)$$

$$\text{여기서, } \hat{x}_t^- = \hat{x}_{t-1}^+ \quad (3.5)$$

칼만계인 :

$$K_t = \frac{P_t(-) H_t^T}{H_t P_t(-) H_t^T + R_t} \quad (3.6)$$

$$\text{여기서, } P_t(-) = P_{t-1}(+) \quad (3.7)$$

오차공분산행렬 :

$$P_t(+) = (1 - K_t H_t) P_t(-) \quad (3.8)$$

으로 변환된다.

3.2 관리도의 설계

AR(p) 모형이 연속생산공정을 잘 묘사하는 경우, 예측오차

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - (\varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p}) \quad (3.9)$$

는 *white-noise*가 된다. 예측오차 ε_t 가 *white-noise*인 경우, ε_t 의 추정치는 기존의 관리도로 공정의 변화를 탐지하기 위한 자료로 사용할 수 있다.

Stationary한 조건을 만족하는 AR(2)~AR(6)모형의 초기의 parameter를 임의로 다음과 같이 구해준 후 이 모형에서 얻은 관측치와 칼만필터의 다중과정을 이용하여 공정의 사전 예측치인 \hat{y}_t 은 상태-관측방정식에 의해 추정할 수 있고, 실시간으로 관측치를 받아 보다 정확한 AR 모형의 계수를 반복적으로 제공하게 된다. 관리한계선을 결정하기 위해 필요한 분산은 처음 100개의 관측치로부터 추정한다. 그리고 오차공분산행렬 P_t 는 임의의 값으로 지정하였다.

초기 AR모형

AR(2)모형 :

$$y_t = 1.63 + 1.49y_1 + -0.653y_2 + \varepsilon_t$$

AR(3)모형 :

$$y_t = 0.645 + 2.146y_1 - 1.598y_2 + 0.409y_3 + \varepsilon_t$$

AR(4)모형 :

$$y_t = 112.2 - 1.876y_1 - 1.781y_2 - 1.201y_3 - 0.373y_4 + \varepsilon_t$$

AR(5)모형 :

$$y_t = 1.940 + 1.84y_1 - 0.893y_2 - 0.613y_3 + 0.879y_4 - 0.310y_5 + \varepsilon_t$$

AR(6)모형 :

$$y_t = 0.45 + 2.4y_1 - 2.414y_2 + 1.889y_3 - 1.586y_4 + 0.9y_5 - 0.207y_6 + \varepsilon_t$$

AR(p) 모형에 칼만필터 이론을 적용하여 얻은 예측오차 ε_t 를 *white-noise*로 가정하면, 다음의 통계량을 이용하여 관리도를 설계할 수 있다.

$$T_t = \varepsilon_t - y_t + \mu_0 \quad (3.10)$$

(μ_0 = target value)

통계량 T_t 의 평균은 '0'이 되므로 다음의 관리한계선을 구해준 후 통계량과 관리한계선을 계속 비교해가면서 관리상태가 안정적일 때 그리고 mean shift를 발생시키면서 AR(2)모형에서 AR(6) 모형까지 ARL을 구해준다.

$$\begin{aligned} UCL &= 3 \sigma_e^2 \\ LCL &= -3 \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3 기존의 관리도

본 연구에서는 칼만필터를 적용한 잔차관리도와 기존의 관리도의 수행도 평가를 위해 기존의 관리도로써 \bar{x} 관리도를 사용하였다. 관리도의 통계량인 평균과 분산은 처음 100개의 data를 이용하여 구했고, 관리한계선은 (3.12)식과 같이 구해서 AR(p)모형에서 얻은 data를 이용하여 컴퓨터 simulation을 사용해서 ARL을 구했다.

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + 3 \sigma^2 \\ LCL &= \mu - 3 \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

4. Simulation결과 및 기존관리도와 의 비교.

ARL을 구하는데 있어 기존의 관리도는 \bar{x} 관리도를 이용하였고, 통계량은 관측치의 평균과 분산을 사용했다. 그리고 칼만필터를 이용한 관리도는 통계량과 관리한계선을 다음과 같이 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 2000번 돌려 ARL을 구하였다.

$$T_t = \varepsilon_t - y_t + \mu_0 \quad (\mu_0 = \text{target value})$$

$$\begin{aligned} UCL &= 3 \sigma_e^2 \\ LCL &= -3 \sigma_e^2 \end{aligned}$$

4.1. AR(2) process인 경우의 관리도

<표4.1> 기존의 관리도와 칼만필터를 적용한 관리도의 ARL 비교.

공정이동	0	0.2	0.4	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
I	1065.44	458.87	85.73	19.14	10.96	5.82	3.74	2.65	1.66	1.29
II	662.17	629.79	97.74	26.59	15.75	11.31	9.79	4.43	2.49	1.91

(I : 칼만필터를 적용한 관리도, II : 기존의 관리도)

4.2. AR(3) process인 경우의 관리도

<표4.2> 기존의 관리도와 칼만필터를 적용한 관리도의 ARL 비교.

공정이동	0	0.2	0.4	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
I	257.59	38.55	15.89	9.59	8.48	7.07	4.94	2.51	1.93	1.48
II	522.13	166.74	80.36	39.81	22.49	17.41	9.74	7.29	4.06	2.17

(I : 칼만필터를 적용한 관리도, II : 기존의 관리도)

4.3. AR(4) process인 경우의 관리도

<표4.3> 기존의 관리도와 칼만필터를 적용한 관리도의 ARL 비교.

공정이동	0	0.2	0.4	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
I	265.85	123.19	15.55	9.2	5.57	3.48	3.35	2.50	2.15	1.75
II	213.02	52.79	29.03	18.03	6.20	4.37	3.07	2.06	1.95	1.26

(I : 칼만필터를 적용한 관리도, II : 기존의 관리도)

4.4. AR(5) process인 경우의 관리도

<표4.4> 기존의 관리도와 칼만필터를 적용한 관리도의 ARL 비교.

공정이동	0	0.2	0.4	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
I	364.44	92.56	60.80	21.59	8.14	4.58	3.31	2.65	1.71	1.63
II	386.16	109.83	65.46	34.39	16.35	9.00	6.44	3.25	2.24	1.91

(I : 칼만필터를 적용한 관리도, II : 기존의 관리도)

4.5. AR(6) process인 경우의 관리도

<표4.5> 기존의 관리도와 칼만필터를 적용한 관리도의 ARL 비교.

공정이동	0	0.2	0.4	1.0	1.6	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
I	609.54	82.58	16.16	10.68	7.04	4.51	3.43	2.28	2.68	1.07
II	454.83	99.78	48.55	24.15	11.30	8.30	4.00	3.35	2.45	1.45

(I : 칼만필터를 적용한 관리도, II : 기존의 관리도)

5. 결론

본 연구에서는 공정으로부터 얻은 관측치를 실시간으로 처리하여 공정을 관리할 수 있는 잔차 관리도를 설계하였고, 그 수행도 비교를 위해 일반적인 \bar{x} 관리도와 비교하였다. 그리고 잔차 관리도 설계에 있어서는 칼만필터의 상태-관측방정식을 이용하였다.

공정에 이상원인이 존재하는 경우의 ARL은 작을수록 좋고, 공정이 관리상태에 있는 경우의 ARL은 클수록 좋은 것이된다. 4장의 컴퓨터 시뮬레이션의 결과 공정이 관리상태에 있을 경우의 ARL은 기존의 관리도와 큰 차이를 보이지 않았고, 공정평균의 변동이 발생하였을 경우에는 ARL이 기존의 관리도에 비해 짧게 나왔고, 공정평균의 변동이 점차 크게 발생할 경우에도 공정평균의 변동을 민감하게 탐지한다는 것을 알 수 있다. 이것은 본 연구에서 설계한 관리도가 시계열에서 얻은 데이터들 사이에 중속적인 관계가 있을 경우에 공정의 변화를 기존의 관리도보다 빨리 탐지한다는 것을 알수있다. 참고로 기존의 EWMA 관리도나 CUSUM 관리도 그리고 기타 여러 관리도의 통계량을 이용하여 본 연구에서 설계한 관리도를 적용시킬 수 있을 것이다.

관리도의 수행도 향상을 위해서 향후연구대상은 칼만필터를 적용한 관리도와 뉴럴네트워크(Neural Network)의 이노베이션(innovation)을 계산하여 관리도의 수행도를 비교·평가해보는 것이다. 즉, 모델이 확정되지 않은 공정은 이노베이션(innovation)을 뉴럴네트워크에 의하여 모델링하고 계산하여 이것을 통계량으로 관리도를 그린다.

참 고 문 헌

- [1] Alwan, L.C. and Roberts, H.V.(1989), "Times Series Modeling for Statistical Process Control," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.45-65.
- [2] Chatfield, C.(1989), *The Analysis of Time Series An Introduction*, 4th edition, Chapman and Hall.
- [3] Contreras, L.E.(1989), "Implementation Strategies for On-Line Statistical Process Control Systems," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.33-42.
- [4] Crowder, S.V.(1986), "Kalman Filtering and Statistical Process Control," *Unpublished Ph.D dissertation*, Iowa State University Library.
- [5] English, J.R. Krishnamurthi, M. and Sastri, T.(1991), "Quality Monitoring of Continuous Flow Processes," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.20, No.2, pp.251-260.
- [6] Faltin, F.W. and Tucjer, W.T.(1991), "On-Line Quality Control for the Factory of the 1990's and Beyond," *Statistical Process Control in Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.331-354.
- [7] Hubele, N.F. and Chang, S.I.(1990), "Adaptive Exponentially Weighted Moving Average Schemes Using a Kalman Filter," *IIE Transactions*, Vol.22, No.4, pp.361-369.
- [8] Kalman, R.E.(1960), "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,"

Journal of Basic Engineering, Vol.82, pp.35-45.

[9] Keats, J.B.(1989), "Process Control in Automated Manufacturing : Some Key Issues," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.17-31.

[10] Kirkendall, N.J.(1989), "The Relationship Between Certain Kalman Filter Models and Exponential Smoothing Models," *Statistical Process Control in Automated Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.89-107.

[11] Montgomery, D.C.(1991), *Introduction to Statistical Process Control*, 2nd edition, John Wiley & Sons.

[12] Runger, G.C.(1989), "Introduction to the Kalman Filter," *Statistical Process Control and Automated Manufacturing*, Series I-6.

[13] Sastri, T. and English, J.R.(1993), "On Sensitivity Analysis of Kalman-Filter Based Control Charts," *2nd Industrial Engineering Research Conference Proceedings*, p.590-595.

[14] Yourstone, S.A.(1989), "Real-Time Process Quality Control in a Computer Integrated Manufacturing Environment," *Statistical Process Control in Manufacturing*, Marcel Dekker, pp.91-110.

[15] 배도선, 통계적 품질관리, 영지문화사, pp.9-10, 1992.