

# 이동통신 교환기의 지연시간 분석방법

백장현\*, 윤복식\*\*, 조기성\*, 이창훈\*\*\*

\*한국전자통신연구소

\*\*홍익대학교 기초과학과

\*\*\*서울대학교 산업공학과

## ABSTRACT

본 연구에서는 현재 개발중인 이동통신 교환기 CMS-MX의 성능 분석에 적용될 수 있는 큐잉 네트워크 모형을 제시하고 부과되는 트래픽에 따른 여러가지 지연시간의 분포를 구하는 분석적인 방법을 제시한다. 전체적인 분석은 메시지들이 교환기내의 여러 프로세서 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고, 이 세마이 마코프 체인에서 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 이루어진다. 이 때 각 프로세서에서의 체류시간 분포는 GPH/GPH/1 큐로 근사화하여 구해진다.

본 연구에서 제시되는 방법은 이동통신 교환기를 포함한 일반적인 교환기의 성능분석 및 일반적인 상황에서의 통신망의 성능분석에 이용될 수 있다.

## 1. 서론

교환기는 전체 통신시스템의 성능을 결정하는 핵심적인 부분이므로 통신망 계획 및 운용에서 교환기 성능의 정확한 평가가 요구된다. 일반적으로 교환기의 성능은 제어계의 호처리 용량(call handling capacity), 통화로계의 통화처리용량(traffic carrying capacity), 그리고 종단용량(termination capacity)의 세 가지 측면에서 정의된다. 제어계의 호처리용량은 여러 지연시간들에 대한 권고값들을 만족하면서 교환기가 처리할 수 있는 호의 수를 말하며 단위는 BHCA(Busy Hour Call Attempts)가 된다. 통화로계의 통화처리용량은 블럭킹 확률에 대한 권고값을 만족시키면서 스위치 네트워크가 수용할 수 있는 트래픽의 양을 말하며 단위는 Erlang이 된다. 종단용량은 교환기가 수용할 수 있는 최대 가입자 회선 및 트렁크의 수를 말한다.

본 연구에서 다루고자 하는 분야는 지연시간에 대한 것으로, 교환기에 일정한 트래픽이 가해졌을 경우에 지연시간이 만족되는지를 파악함으로써 제어계의 호처리용량 평가를 지원하는 것이다. 일반적으로 교환기의 지연시간은 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화하여 주로 평균적인 개념에서 근사적인 분석이 행해진다. 그러나 이질적인 다양한 트래픽이 혼합되는 상황에서는 평균 지연시간보다는 지연시간 분포 자체에 기반을 둔 성능분석이 보다 바람직할 것이다.

곱형태(product form)가 아닌 경우, 큐잉 네트워크 모형의 지연시간 분석을 위한 효과적인 방법은 매우 드물다. 이러한 큐잉 네트워크의 이론을 교환기나 컴퓨터에 적용하여 지연시간 분포를 구하려는 시도는 주로 포아송 도착과정 등과 같은 단순한 가정하에서 진행되어 왔다. 큐잉 네트워크의 지연시간 분석에 대한 대표적인 연구로는, 마코프적인 모형에 근거한 벨연구소의 PANACEA, 보다 일반적인 가정에 근거한 역시 벨연구소의 QNA, 그리고 QNET 등을 들 수 있다[2,3,6]. 그러나 현재까지 일반적인 큐잉 네트워크의 지연시간 분포를 줄 수 있는 효과적인 방법은 매우 드물다고 할 수 있다.

본 연구는 트래픽에 따른 이동통신 교환기의 지연시간의 분포를 구하는 분석적인 방법을 제시하는 것을 목표로 하였다. 먼저 CMS-MX 이동통신 교환기의 구조와 호처리 과정이 조사되어 이를 토대로 큐잉 네트워크로의 모형화가 이루어졌다. 전체적인 분석은 고객들이 큐잉 네트워크 각 노드 사이를

이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해졌다. 이 때 개별노드에서의 체류시간 분포를 GPH/GPH/1 대기시스템으로 근사화하여 시스템에서의 지연시간을 구하는 방법이 제시되었다.

서론에 이어 2장에서는 분석과정에 이용되는 GPH 분포에 대하여 설명하였다. 3장에서는 CMS-MX 이동통신 교환기의 구조와 호처리 과정을 설명하였다. 4장에서는 이동통신 교환기의 지연시간 분포 분석방법을 절차에 따라 설명하였다. 5장에서는 예제를 통하여 제시된 방법의 정확성을 검토하였다.

## 2. GPH(Generalized Phase Type) 분포

지수 분포를 따르는 무작위 갯수의 단위 확률 변수들의 합의 분포로 정의되는 GPH 분포는 연속함수 계산을 이산함수 계산으로 변환시켜줌으로써, 확률분석에 있어서 어려운 계산들을 보다 간편하게 해준다. GPH 분포의 이러한 성질은 대기시스템을 비롯한 여러 분야의 확률적 분석에 폭넓게 응용될 잠재성을 가지고 있으나 아직까지 충분히 응용되지 못하고 있고 근사화의 효율성 및 정확성에 대한 실험적인 연구도 보고되지 않고 있다. 윤복식 등은 임의의 분포 함수를 GPH 분포로 근사화시킬 수 있음을 보인 바 있는데[7] 이 결과를 이용하면 많은 모형의 확률적 분석을 보다 정확하고 간편하게 수행할 수 있다.

### 2.1. GPH 분포의 정의

$(E_n)_0^\infty$ 을 평균이  $1/\lambda$ 인 지수 분포를 따르는 확률 변수열이라 하고(단,  $E_0=0$  w.p. 1),  $L$ 을 분포 함수  $g$ 를 따르는 이산적인 확률 변수라고 할 때,

$$X = \sum_{n=0}^L E_n$$

의 분포함수  $F$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}, \quad x > 0$$

그리고, 이 분포를 GPH( $\lambda, g$ )로 정의한다[4].

하나의 GPH 분포를 표시하는  $\lambda$ 와  $g$ 의 쌍이 무수히 많이 존재하게 되는데, 일반적으로는  $\lambda$ 를 고정시키고, 그에 따라  $g$ 를 확정하는 것이 일반적이다.

### 2.2. 일반분포의 GPH 분포로의 근사화

$[0, \infty)$ 에서 정의된 임의의 분포를 GPH 분포로 근사화할 수 있다. 즉,  $[0, \infty)$ 에서 정의된 유계함수(bounded function)  $F$ 에 대하여,

$$F_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \lambda > 0$$

라고 정의하면,  $\lambda \rightarrow \infty$  일 때

$$F_\lambda(t) \rightarrow F(t)$$

이 성립한다. 그런데 위 식을 보면 무한 개의 항을 더하는 경우가 발생한다. 실제 계산에서는 오차의 한계를 설정하여, 더하는 항의 갯수를 구한 다음 truncation시켜서 계산을 수행한다.

여러가지 경우에 대하여 임의의 함수를 GPH 함수의 형태로 바꾸어 보고 그 결과를 원래의 함수와 비교해 본 결과를 살펴보면,  $\lambda$ 를 충분히 크게 잡으면 거의 오차없이 임의의 분포를 GPH 분포로 근사화할 수 있음을 알 수 있다[7].

### 3. CMS-MX 이동통신 교환기

#### 3.1. 이동통신 교환기의 구조

CMS-MX 이동통신 교환기는 이동통신망에서 중추적인 역할을 담당할 대용량 전전자 교환기이다. CMS-MX는 이동통신망 구성요소 중에서 MSC(Mobile Services Switching Center) 및 LR(Location Register) 기능을 수행하는 디지털 이동통신 교환기이다. MSC는 호의 교환기능을 담당하며 공중 이동통신망(PLMN, Public Land Mobile Network)과 고정망(PSTN, Public Switched Telephony Network)을 연동시켜 주는 역할도 담당한다. LR은 MS(Mobile Station)에서 발생하는 호를 성립시켜 주기 위해서 MS의 가입자 정보를 저장한다. CMS-MX는 이러한 MSC와 LR 기능을 수행한다.

CMS-MX 이동통신 교환기의 기본구조는 그림 1과 같이 ASS(Access Switching Subsystem), INS(Interconnection Network Subsystem), CCS(Central Control Subsystem)의 세 서브시스템으로 구성되며 CCS는 AMS(Administration & Maintenance Subsystem)과 LRS(Location Registration Subsystem)로 구성된다. ASS는 분산된 호처리 기능 및 유지보수 기능을 수행하며, INS는 집중화된 호처리 기능 및 망동기 관련 기능을 수행한다. 또한 LRS는 이동 가입자에 대한 정보의 저장 및 관리 기능과 루팅 관련 기능을 수행하며, AMS는 운용 및 유지보수의 집중화 기능을 담당한다.

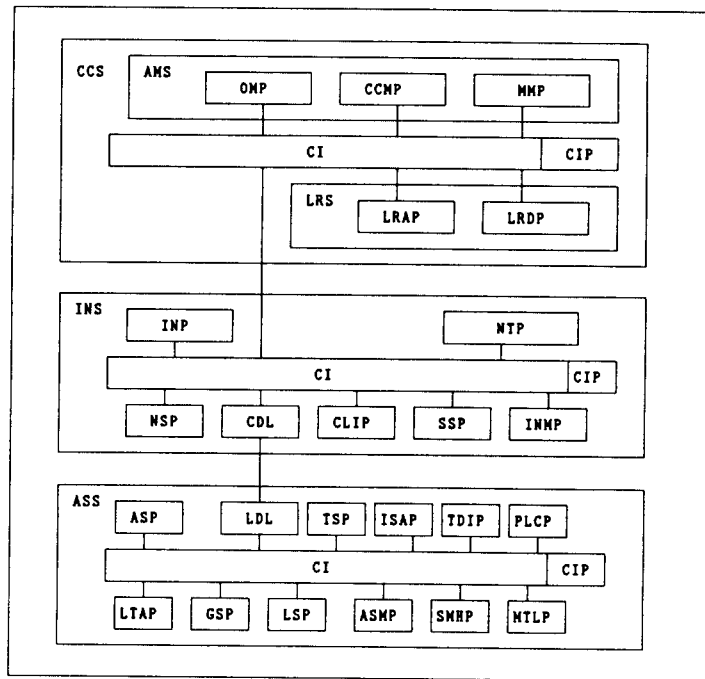


그림 1. CMS-MX의 프로세서 구성

각 ASS, INS, CCS에서 메시지를 처리하게 되는 프로세서들이 그림에 표시되어 있다. 호처리 관련 기능을 수행하는 주요 프로세서로는 ASS내의 모든 제어 및 호처리 기능, 유지보수 기능을 총괄하는 ASP, T-S-T 그룹스위치의 T단을 제어하는 TSP, Space 스위치를 제어하는 SSP, 각종 tone 발생기 등을 제어하는 LSP, 가입자 및 중계선 정합 기능을 담당하는 LTAP, LR 기능을 위하여 이동 가입자에 대한 정보를 저장, 관리하는 LRDP와 LRAP, 스위치 연결 및 해제 기능을 수행하는 INP, 번호번역을 담당하는 NTP, 과금 관련 기능을 담당하는 OMP 등이 있다.

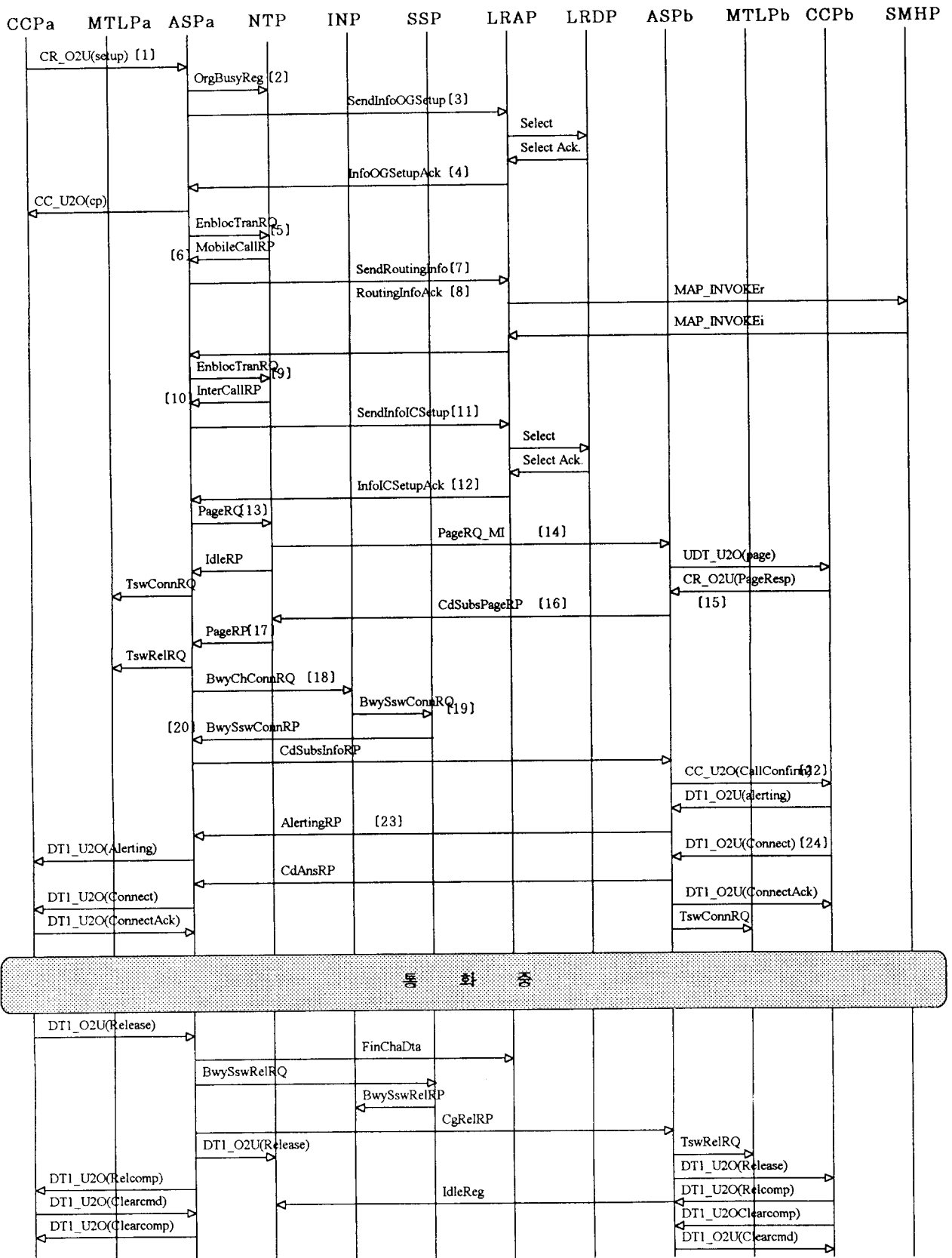


그림 2. 이동국-이동국(M-M)간의 자국호 처리과정

### 3.2. 호처리 과정

두 가입자 사이의 통화가 성공적으로 이루어지기 위해서는 여러 종류의 메시지가 여러 프로세서에서 처리되어야만 한다. 디지털 이동 가입자간(M-M 호)의 자국호 처리과정을 호 설정을 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

어떤 가입자가 수화기를 들어 착신번호를 누르고 send 키를 누르면, 제어국에서는 이를 수신한 후 자신의 MIN, ESN 정보 및 착신번호를 setup 메시지를 통하여 ASP로 전송한다. ASP는 setup 메시지를 수신한 후, LRAP로 발신 가입자의 정보를 요구한다. LRAP는 발신 가입자 정보를 LRDP로부터 수신하여 이를 ASP로 전송한다.

ASP는 발신 가입자 정보를 검증하여 정당한 가입자이면 호처리를 수행한다. ASP는 착신번호를 NTP에 전송, 국번 번역요구를 하여 이동호인지 아닌지를 통보받는다. 만약 착신 가입자가 이동 가입자이면 ASP는 이동 가입자의 현재 위치를 알기 위하여 HLR로 로밍 번호를 요구한다. 로밍 번호를 수신한 ASP는 NTP로 로밍 번호에 대한 번역을 요구하고, 만약 로밍 번호가 자신이 관장하는 위치의 번호이면 NTP로부터 자국호 통보를 받게 된다.

자국호 통보를 받은 ASP는 LRAP로 착신 가입자의 정보를 요구한다. LRAP는 위치영역 정보를 포함한 착신 가입자의 정보를 LRDP로부터 수신하여 이를 ASP로 전송한다. ASP는 착신 가입자의 정보를 검증하여 정당한 가입자이면 호처리를 수행한다. 착신번호에 대한 위치영역 정보를 수신한 ASP는 NTP에 해당 위치영역에 대한 페이징을 요구하고, NTP는 해당 위치영역을 관장하는 모든 ASP에 페이징을 요구한다. 특정 ASP가 페이징에 대한 응답을 수신하게 되면 그 착신 ASP는 NTP로 착신 가입자가 페이징에 응답했음을 보고한다. NTP가 이를 발신 ASP로 보고하면, 발신 ASP는 INP에 스위치 채널 연결요구를 하게 되고 INP는 SSP에게 space 스위치 연결요구를 하게 된다. SSP가 INP에 space 스위치 연결통보를 하면 INP는 ASP에게 스위치 채널이 연결되었음을 알려준다.

발신 ASP는 착신 ASP에게 LRAP로부터 수신한 착신 가입자에 대한 정보를 송신한다. 착신 ASP에서는 착신 가입자 점유요구를 하게 되며 이 ASP는 해당 가입자 상태를 확인한 다음 발신 ASP에게 착신 가입자 점유통보를 한다. 이후 발신 ASP는 발신통화로 연결을 요구하고 착신 ASP는 발신 가입자에게 ring back tone 송출과 함께 착신 가입자에게 ringing signal 송출을 요구하게 된다. 착신 가입자가 응답을 하면 통화중 상태가 되고 과금이 시작된다.

통화해제시에도 통화연결진 상태로 되돌리기 위하여 각 프로세서 사이에 메시지를 교환하게 된다. 이와 같은 메시지의 교환이 수없이 되풀이 되어 착신 가입자와 발신 가입자 사이의 호 흐름이 이루어진다.

그림 2는 블럭 단위의 메시지 흐름을 보여주고 있는데, MSA, LSL, MCC, MSL, CDGM은 ASP에, TSL은 TSP에, SNC는 INP에, SSW는 SSP에, NTR, RCO, MPC는 NTP에, LCC, LLU는 LRAP에 속하며 BSC는 교환기의 외부에 해당된다. 또한 블럭 이름 뒤의 a, b는 각각 발신 가입자에 관련된 블럭(a), 착신 가입자에 관련된 블럭(b)임을 나타낸다.

### 4. 교환기의 지연시간 분포 계산과정

전체적인 분석은 교환기에 대한 큐잉 네트워크 모형에서 고객들이 각 노드 사이를 이동하는 과정을 GPH 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해졌다. 이 때 개별노드에서의 체류시간 분포는 GPH/GPH/1 대기시스템으로 근사화하여 지연시간 분포를 구하는 방법을 따른다.

전체적인 분석과정은 다음과 같다.

- (1) 교환기의 큐잉 네트워크 모형화
- (2) 각 노드에서의 도착 파라메타 계산

- (3) 각 노드에서의 도착 분포를 GPH 분포로 근사화
- (4) 각 노드에서의 서비스 분포를 GPH 분포로 근사화
- (5) 각 노드에서의 지연시간 계산(GPH/GPH/1 대기시스템)
- (6) 세마이 마코프 체인을 이용한 최초 전이시간 계산

첫번째 단계부터 차례대로 살펴보자.

#### 4.1. 교환기의 큐잉 네트워크 모형화

호처리 과정을 보면, 하나의 호를 형성하는 여러 메시지들은 일정한 경로를 따라 CMS-MX 이동통신 교환기내의 프로세서 사이를 이동한다. 그림 2의 호처리 과정에 근거하여 CMS-MX 이동통신 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화한다.

먼저 각 프로세서를 노드(node)로 표시하고 프로세서간 메시지 이동을 링크(link)로 표시한다. 모형화에 필요한 프로세서는, 발신 ASS에 있는 ASPa, TSPa와 착신 ASS에 있는 ASPb, TSPb, INS에 있는 INP, NTP, SSP, 그리고 CCS에 있는 LRAP의 8가지이다. 하나의 CMS-MX 이동통신 교환기에는 최대 63개의 ASS가 가능하나, 본 연구에서는 착신 ASS와 발신 ASS만을 고려한다. 그 다음, 호가 성공적으로 연결되어 완료되기까지 메시지의 경로선택 과정으로부터 각 링크에 확률값을 할당한다. 예를 들어, 하나의 완료호에 대하여, ASPa에서 다른 프로세서로 나가는 메시지의 갯수가 m개라고 하자. 이 중에서 ASPb로 나가는 메시지의 갯수가 n개라면, ASPa에서 ASPb로의 전이확률은  $n/m$ 이 된다. 이러한 과정은 하나의 교환기에 시간당 수십만 호가 발생하기 때문에 가능하다. 이러한 방법에 따라 CMS-MX 이동통신 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화하면 그림 3과 같다.

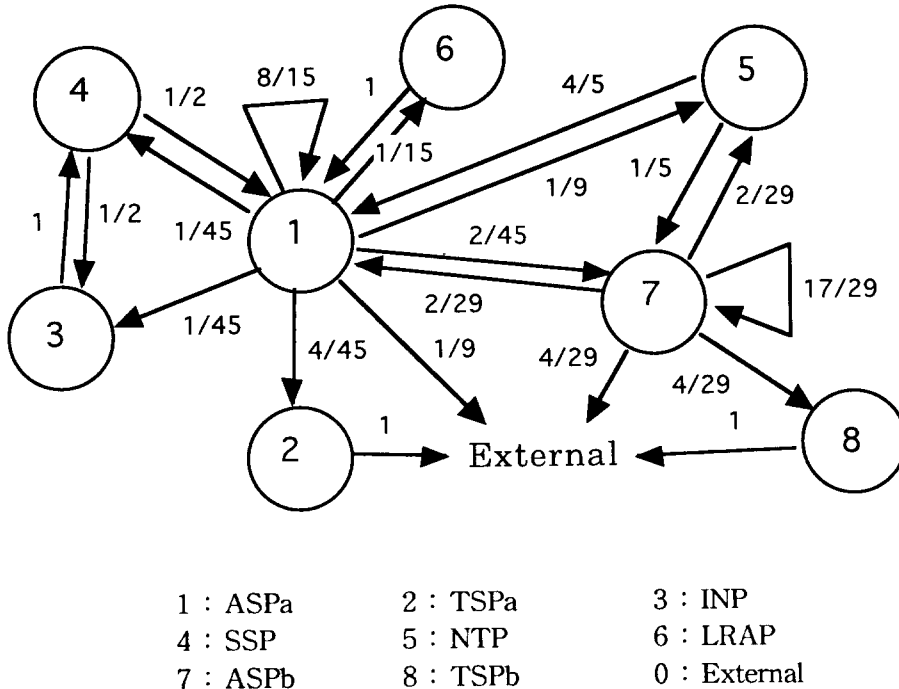


그림 3. CMS-MX의 큐잉 네트워크 모형

각 프로세서에서의 메시지 처리시간(각 노드에서의 서비스 시간)은 메시지 종류에 따라 다르며, 특정 메시지의 처리시간은 특정 상수값을 갖는다. 따라서 한 프로세서에서의 메시지 처리시간은, 그 프

로세서로 들어오는 메시지의 종류와 수를 고려한 확률분포를 따르는 것으로 한다. 예를 들어, ASPa로 들어오는 메시지가 'setup'일 확률이 0.5이고 이 메시지의 처리시간이 20 msec라면, ASPa의 메시지 처리시간은 0.5의 확률로 20 msec가 되는 것이다. 이런 식으로 모든 메시지의 확률값과 처리시간을 고려하면, 그 프로세서의 메시지 처리시간 분포가 주어지게 된다. 결국, CMS-MX 이동통신 교환기를 각 노드간 전이확률 행렬과 노드에서의 서비스 시간 분포가 주어지는 큐잉 네트워크로 모형화할 수 있다.

최종적으로 얻어지는 네트워크는, N개의 노드로 구성되며 각 노드에서의 서비스 분포는 일반 분포를 따르고 경로이동은 마코프 전이(Markovian routing)를 하는 개방형 큐잉 네트워크가 된다. 이 때 주어지는 입력 데이터는 다음과 같다.

- 각 노드간 전이확률
- 노드별 외부 도착 트래픽의 도착율
- 노드별 외부 도착 트래픽의 변동계수(squared coefficient of variation)
- 서비스 분포함수

#### 4.2. 각 노드에서의 도착 파라메타 계산

도착율과 변동계수만으로 각 노드별 도착 과정을 정확히 구하는 것은 일반적으로 불가능하다. 따라서 각 노드별로 총 도착 트래픽의 도착율과 변동계수를 구하고[6] 두 파라미터로부터 도착 과정을 근사화시킨다.

먼저 각 노드별 도착율  $\lambda_j$ 는 다음과 같은 N개의 식을 풀어서 구한다. 0은 외부를 나타낸다.

$$\lambda_j = \lambda_{0j} + \sum_{i=1}^N \lambda_i q_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, N$$

단,  $\lambda_{0j}$  : 노드 j로의 외부 도착율

$q_{ij}$  : 노드 i에서 j로의 전이확률

그리고 다음의 각 파라미터를 구해낸다.

$$\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij} : \text{노드 i에서 노드 j로의 도착율}$$

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_j} : \text{노드 j로 도착하는 트래픽 중에서 노드 i에서 온 트래픽의 비율}$$

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \text{노드 i의 트래픽 부하량}$$

또한 다음 N개의 식을 풀면 각 노드별 도착 트래픽의 변동계수  $c_{aj}$ 를 구할 수 있다.

$$c_{aj}^2 = a_j + \sum_{i=1}^N c_{ai}^2 b_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, N$$

$$\text{단, } a_j = 1 + w_j \{ (p_{0j} c_{0j}^2 - 1) + \sum_{i=1}^N p_{ij} \{ (1 - q_{ij}) + q_{ij} \rho_i^2 x_i \} \}$$

$$b_{ij} = w_j p_{ij} q_{ij} (1 - \rho_i^2)$$

$$x_i = 1 + (\max \{ c_{si}^2, 0.2 \} - 1)$$

$$w_j = \{ 1 + 4(1 - \rho_j)^2 (\nu_j - 1) \}^{-1}$$

$$\nu_j = \left( \sum_{i=0}^N p_{ij}^2 \right)^{-1}$$

위의 식을 풀어서 구한 각 노드별 도착율과 변동계수를 이용하여, 각 노드별 도착 트래픽의 도착간격의 평균과 분산을 구해낼 수 있다.

#### 4.3. 각 노드의 도착 분포를 GPH 분포로 근사화

평균이  $m$ , 분산이  $v$ 로 주어진 임의의 분포를 GPH 분포, 즉

$$X \sim \text{GPH}(\lambda, g) \quad \text{단, } L \sim G(n)$$

로 근사화 시키면,

$$E(L) = \lambda m$$

$$V(L) = \lambda^2 v - \lambda m$$

이 성립한다. 따라서,  $L$ 의 분포만 근사화시키면 임의의 분포가 GPH 분포로 근사화된다. 적당한  $L$ 의 분포로 negative binomial 분포를 선택한다. negative binomial 분포는 두 개의 파라미터로써 결정이 되고 변동계수의 값이 1보다 클 수도 있고 작을 수도 있기 때문에, 두 개의 파라미터로써 근사화할 수 있는 이산분포로서는 가장 적당하다.

$n$ 과  $p$ 의 파라미터를 갖는 negative binomial 분포의 평균과 분산은 각각

$$E(L) = \frac{n}{p} - n$$

$$V(L) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

로 주어진다. 역으로  $E(L)$ 과  $V(L)$ 을 알고 있을 때의  $n$ 과  $p$ 는 각각

$$n = \frac{E(L)^2}{V(L) - E(L)} \tag{1}$$

$$p = \frac{E(L)}{V(L)} \tag{2}$$

가 된다.  $n$ 은 정수값을 가져야 하므로 식 (1)에서 구한  $n$ 을 반올림하여  $n$ 을 구한 후 식 (2)에 대입하여 다시  $p$ 를 구한다. 이렇게 하면 분산에 약간의 오차가 생기지만 평균은 만족하는 적당한  $n$ 과  $p$ 가 구해진다. 결국, 평균과 분산이 주어진 미지의 이산 확률분포가 negative binomial 분포로 근사화되었다.

#### 4.4. 각 노드의 서비스 분포를 GPH 분포로 근사화

교환기의 큐잉 네트워크 모형화 과정에 따르면, 각 노드에서의 서비스 시간(각 프로세서에서의 메시지 처리시간)은 고객(메시지)에 따라 다르며, 특정 고객에 대한 서비스 시간은 특정 상수값을 갖는다. 즉, 한 노드에서의 서비스 시간은 그 노드에 도착하는 고객의 종류와 수를 고려한 확률분포를 따른다. 따라서 2장에서 설명한 일반분포의 GPH 분포로의 근사화 방법을 이용하여 주어지는 서비스 시간 분포를 GPH 분포로 근사화한다.

#### 4.5. 각 노드에서의 지연시간 계산

각 노드에서의 도착 분포가 GPH 분포로 근사화되었고 각 노드에서의 서비스 분포가 GPH 분포로 근사화되었으므로 각 노드는 GPH/GPH/1 대기시스템으로 표현이 된다. 따라서 GPH/GPH/1 대기시스템에 대한 다음의 결과를 이용하여 각 노드에서의 지연시간 분포를 계산할 수 있다.



## GPH/GPH/1 대기시스템

GPH/GPH/1 대기시스템의 경우 대기시간을 계산할 수가 있다. 먼저 도착간격  $A_n$ 과 서비스 시간  $B_n$ 이 각각 GPH  $(\lambda_1, g_a)$ , GPH  $(\lambda_2, g_s)$  분포를 따른다고 하자. 계산상의 편의를 위해  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 로 놓아도 분포의 일반성은 계속 유지된다.

이 때,  $W_q^0$ 가 GPH  $(\lambda, g_q^0)$  분포를 따른다고 하면,  $n$ 번째 고객의 시스템 대기시간  $W^n$ 과  $n$ 번째 고객의 대기행렬 대기시간  $W_q^n$ 은 각각

$$\text{GPH}(\lambda, g_w^n), \quad \text{단, } g_w^n = g_q^n * g_s, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{GPH}(\lambda, g_q^n), \quad \text{단, } g_q^n = g_w^{n-1} \otimes g_a^*, \quad n=1, 2, \dots$$

$$g^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+k+1} g(k+1), \quad n=1, 2, \dots$$

$$g^*(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} g(k+1) + g(0)$$

를 따른다( $\otimes$ 는 nonnegative condition을 갖는 negative convolution).

이 결과를 이용하여 GPH/GPH/1 대기시스템에서 대기시간의 안정상태 확률분포를 계산하는 방법을 찾기 위해 일단 도착간격의 확률분포가  $g_a^*$ 이고, 서비스 시간의 확률분포가  $g_s$ 인 GI/G/1 대기시스템을 가정하자. 그러면 이  $g_w$ 와  $g_q$ 를 이용하여 GPH/GPH/1 대기시스템에서  $n$ 번째 고객의 시스템 대기시간  $W^n$ 과 대기행렬 대기시간  $W_q^n$ 을 다음과 같이 계산할 수 있다[7].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_q^n \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} G_q(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W^n \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0$$

이상의 과정을 보면, 대기시간을 계산하기 위한 모든 연산은 이산 함수의 연산으로 표현된다. 따라서 대기시스템에서 도착과 서비스가 GPH 분포로 표현되면, 대기시간의 분포를 GPH 형태로 계산할 수 있다.

### 4.6. 교환기 내부에서의 총 지연시간 분포 계산

교환기 내부에서의 총 지연시간을 구하는 과정은 메시지들이 교환기내의 각 프로세서 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 이루어진다. 즉, 큐잉 네트워크의 각 노드에서의 지연시간 분포가 4.5절에서와 같이 계산될 수 있으므로, 각 노드에서의 지연시간이 i.i.d.라고 가정하여 세마이 마코프 체인을 만들고 최초로 외부로 나가는 시간의 분포를 구하면 교환기 내부에서의 총 지연시간의 분포를 구할 수 있게 된다.

먼저 일반적인 세마이 마코프 과정을 간단히 살펴보자. 프로세스  $X$ 의 세마이 마코프 커널 (semi-Markov kernel)  $R_{ij}$ 와 도함수  $r(t)$ 는

$$R_{ij}(t) = P(T_{n+1} - T_n \leq t, X(T_{n+1}) = j \mid X(T_n) = i), \quad t \geq 0, \quad i, j \in S$$

$$= P_{ij} H_{ij}(t) \quad \text{단, } P_{ij} \text{는 전이확률, } H_{ij}(t) \text{는 전이시간의 분포}$$

$$r(t) = \frac{dR(t)}{dt}, \quad t \geq 0$$

로 주어진다. 또한, 상태  $i$ 에 머무르는 시간이  $t$  이하일 확률  $C_i(t)$ 는

$$\begin{aligned} C_i(t) &= P \{ T_{n+1} - T_n \leq t \mid X(T_n) = i \} \\ &= \sum_{j \in S} R_{ij}(t), \quad t \geq 0, \quad i \in S \end{aligned}$$

와 같이 계산된다. 마코프 재생함수  $M(t)$ 와 밀도함수  $m(t)$ 는

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(t), \quad t \geq 0$$

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{(n)}(t), \quad t \geq 0$$

가 된다.

이 때, 전이시간의 분포함수  $H_{ij}$ 가 GPH 분포로 표현되면, 계산시 적분식의 계산없이 여러 함수를 계산해 낼 수 있다. 먼저, 일반 분포를 따르는  $H_{ij}$ 가

$$H_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_{ij}(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad i, j \in S$$

의 GPH( $\lambda, \hat{H}$ ) 함수의 형태를 따른다고 가정하면, 세마이 마코프 커널  $R(t)$ 와 도함수  $r(t)$ 는

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{R}_{ij}(n) = P_{ij} \hat{H}_{ij}(n), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$r(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{r}(n+1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \lambda, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{r}(0) = 0, \quad \hat{r}(n) = \hat{R}(n) - \hat{R}(n-1), \quad n=1, 2, \dots$$

가 된다.

위 식의  $R$ 처럼 행렬의 각 요소함수가 GPH 분포를 따를 때, 이 행렬함수를 GMPH(Generalized Matrix Phase Type)라 하고, GMPH( $\lambda, \hat{R}$ )로 표시한다. 그런데, 행렬함수  $R(t)$ 가 GMPH이면,

$$r^{(k)}(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \hat{r}^{(k)}(u+1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^u}{u!} \lambda, \quad k=2, 3, \dots$$

$$\text{단, } \hat{r}^{(k)}(u) = \sum_{v=0}^u \hat{r}^{(k-1)}(u-v) \hat{r}(v), \quad k=2, 3, \dots$$

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{m}(n+1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \lambda, \quad t \geq 0$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{M}(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{m}(0) = I, \quad \hat{m}(n) = \sum_{v=0}^{n-1} \hat{m}(v) \hat{r}(n-v), \quad n=1, 2, \dots$$

$$\hat{M}(n) = \sum_{v=1}^n \hat{m}(v), \quad n=1, 2, \dots$$

가 되어 GMPH 형태의  $r^{(k)}(t)$ ,  $m(t)$ ,  $M(t)$ 를 얻을 수 있게 된다.

이러한 함수들을 이용하여, A 집합의 i 상태에서 시작하여 B 집합의 임의의 상태로 전이하는 데 소요되는 시간을 구할 수 있다. 먼저, R이 GMPH( $\lambda, d$ )이면, X의 상태전이확률  $Q_{ij}(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{Q}(0) = I, \quad \hat{Q}_{ij}(n) = \sum_{k=0}^n \hat{m}_{ij}(k) \hat{D}_j(n-k), \quad n=1, 2, \dots$$

$$\hat{D}_j(n) = 1 - \sum_{k \in S} \hat{R}_{jk}(n) = 1 - (\hat{R}(n)1)_j, \quad n=1, 2, \dots$$

상태집합 A에 속하는 상태 i에서 상태집합 B에 속하는 임의의 상태로 최초로 전이하는 데 소요되는 시간을  $T_{iB}$ 라 하면,

$$T_{iB} = \inf\{t : X(t) \in B \mid X(0) = i\}, \quad i \in A$$

로 표현된다. 상태집합 A에 속하는 상태에서 전이를 하는  $X'$ 을 정의하고, 이에 따른 커널을  $R'$ 이라 하면  $P(T_{iB} > t)$ 는

$$P\{T_{iB} > t\} = \sum_{j \in A} Q'_{ij}(t) = (Q'(t)1)_i \quad \text{단, } Q'(t) \text{는 } X' \text{의 전이 확률}$$

가 된다. 그런데, R이 GMPH( $\lambda, d$ )라면, 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$P\{T_{iB} > t\} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}'(n) 1 \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \right)_i$$

$$\text{단, } \hat{Q}'(0) = I, \quad \hat{Q}'_{ij}(n) = \sum_{k=0}^n \hat{m}'_{ij}(k) \hat{D}'_j(n-k), \quad n=1, 2, \dots$$

$$\hat{D}'_j(n) = 1 - \sum_{k \in A} \hat{R}'_{jk}(n) = 1 - (\hat{R}'(n)1)_j, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\hat{m}'(0) = I, \quad \hat{m}'(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{m}'(k) \hat{r}'(n-k), \quad n=1, 2, \dots$$

상태 i에서 상태집합 B로의 최초 전이시간을 T라 하면, 전이시간의 분포는

$$P(T < t) = P(T_{iB} < t) = 1 - P(T_{iB} > t)$$

가 되며 이는 위의 결과를 이용하여 계산할 수 있다. 계산과정이 이산 함수의 덧셈 연산으로 표현되므로 수리적 계산이 가능하다. 따라서 최초 전이시간 T의 분포를 얻게 된다.

따라서, 큐잉 네트워크에서의 노드간 이동과정을 세마이 마코프 과정으로 근사화하면, 4.5절의 결과를 이용하여 각 노드에서의 지연시간 분포를 GPH 형태로 얻을 수 있으므로 위 식을 이용하면 교환기 내부에서의 총 지연시간을 구할 수 있다.

## 5. 교환기에의 적용

이상에서 설명한 지연시간 분포를 구하는 과정을 교환기의 호처리 과정에 대한 큐잉 네트워크 모형에 적용하여 보았다. 여기에서의 지연시간은 체류시간, 즉 교환기에 도착한 메시지가 교환기를 떠나기까지의 시간을 대상으로 하였으며 앞으로 특정 지연시간 항목(call setup delay, handover delay 등)에 대한 분포를 구할 예정이다.

여러가지 파라미터 값을 변화시키면서 지연시간 분포를 계산하고 시뮬레이션을 수행하여 두 값을 비교하였다. 시뮬레이션 패키지로는 SIMAN을 사용하였다. 대상이 되는 큐잉 네트워크 모형은 4.1절

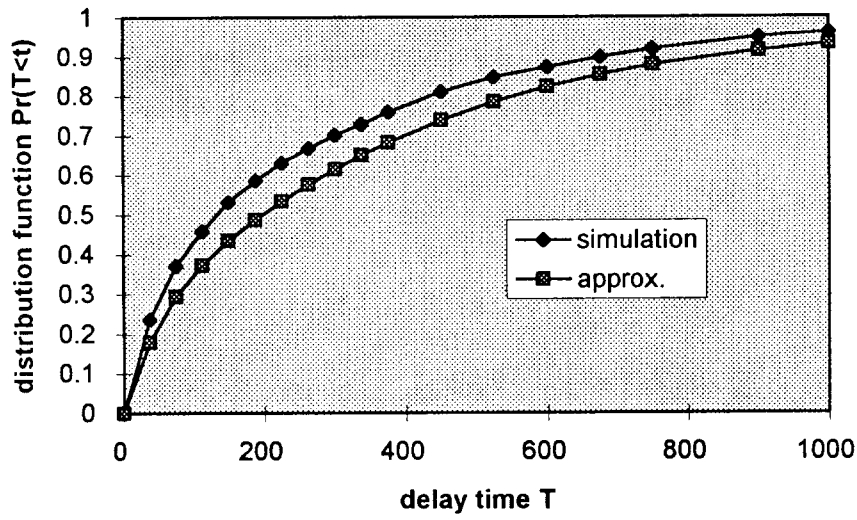


그림 4. 점유율 0.5인 경우의 지연시간 분포

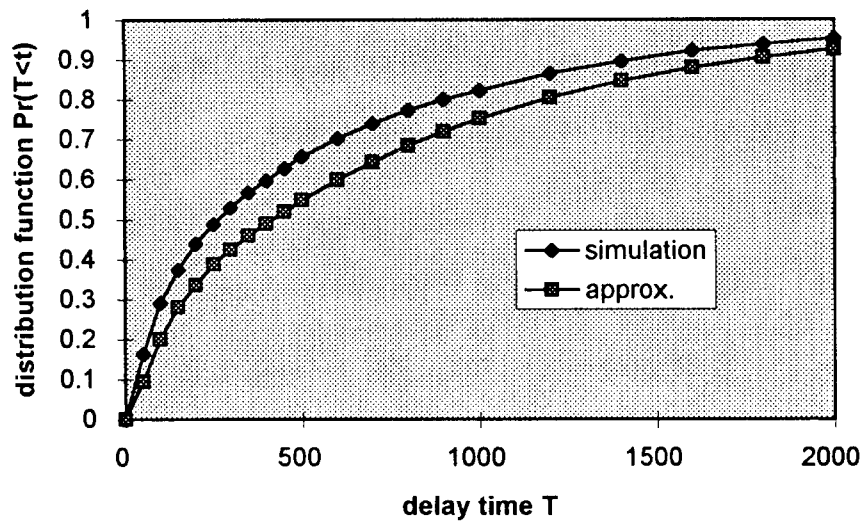


그림 5. 점유율 0.7인 경우의 지연시간 분포

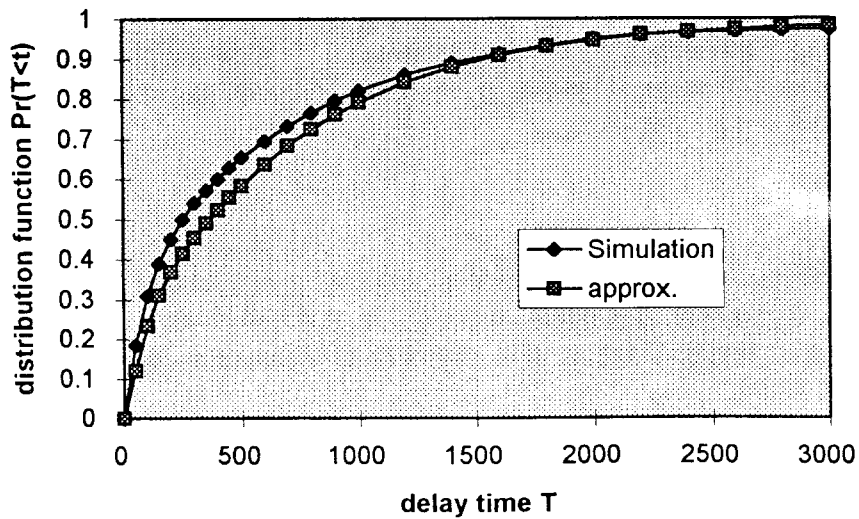


그림 6. 점유율 0.9인 경우의 지연시간 분포

에서 주어졌으며 외부로부터의 도착은 모형의 1, 7번 노드에서만 발생하며 포아송 과정을 따른다고 가정하였다. 각 노드의 서비스 분포는 SIMAN에서 지원이 용이한 분포함수에 맞추어 지수 분포와 Erlang-2 분포를 가정하였다(추후 메시지별 처리시간이 측정되면 그에 따른 서비스 분포가 입력되어야 할 것이다). 이 때 각 노드의 평균 서비스 시간은 모든 노드에서의 점유율이 동일하도록 조정하였다.

그림 4 - 그림 6은 각 노드의 점유율이 각각 0.5, 0.7, 0.9인 경우의 계산결과 및 시뮬레이션 결과를 나타내 주고 있다.

그림 4 - 그림 6에서 보듯이 지연시간 분포가 시뮬레이션 결과와 약간의 차이가 있지만 대체적으로 잘 들어맞는 것을 알 수 있다. 또한 시뮬레이션 값과 계산값의 차이가, 노드의 점유율이 증가하여도 별 차이가 없으며 점유율이 높아도 잘 들어맞는 것을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 연구는 교환기의 지연시간 분포를 구하는 분석적인 방법을 제시하는 것을 목표로 하여, 교환기에 대한 큐잉 네트워크 모형에서의 지연시간 분포를 구하는 방법을 이론적인 근거하에서 제시하였다. 전체적인 분석은 고객들이 큐잉 네트워크 각 노드 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해졌다. 이 때 개별노드에서의 지연시간 분포를 GPH/GPH/1 대기시스템으로 근사화하여 시스템에서의 지연시간을 구하는 방법이 제시되었다.

타당성 검증을 위해 교환기에 대한 큐잉 네트워크 모형을 대상으로 지연시간 분포를 계산하고 이를 시뮬레이션 결과와 비교하였는데, 본 연구의 방법이 지연시간 분포를 근사적으로 잘 표현하는 것을 알 수 있었다. 이러한 계산과정을 이동통신 교환기의 특정 지연시간 항목에 대하여 적용하기 위한 방법과 근사화 오차를 줄이기 위한 방안에 대한 연구가 진행중이다.

본 연구에서는 종합적인 교환기 성능분석에 필요한 방법론적인 토대를 제시하였으며, 이는 복잡한 트래픽하의 통신망 분석에서도 성능분석 도구로 활용될 수 있을 것이다. 또한 GPH 분포를 이용한 근사화는 다양한 유형의 대기시스템을 분석하는 데에 적절하게 사용될 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- [1] Boxma, O.J. and H. Daduna, "Sojourn Times in Queueing Newtworks", in Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems(ed. H. Takagi), Elsevier, 1990.
- [2] Harrison, J. M. and Nguyen, V., "The QNET Method for Two-Moment Analysis of Open Queueing Networks", Queueing Systems, vol. 6, pp. 1-32, 1990.
- [3] Robertazzi, T. G., Computer Networks and Systems : Queueing Theory and Performance Evaluation, Springer-Verlag, 1992.
- [4] Shanthikumar J. G. , "Bilateral Phase-Type Distributions", Naval Research Logistics Quarterly, vol. 32, pp. 119-136, 1985.
- [5] Shanthikumar, J. G. and U. Sumita, "Approximations for the Time Spent in a Dynamic Job Shop with Applications to Due-Date Assignment", Int. J. Prod. Res., vol. 26, pp. 1329-1352, 1988.
- [6] Whitt, W. , "The Queueing Network Analyzer", B. S. T. J., vol. 62, pp. 2779-2814, 1983.
- [7] 윤복식, 박광우, 이창훈, "GPH 분포에 의한 확률적 근사화", 한국경영과학회지, 19권 1호, pp. 85-98, 1994.
- [8] 윤복식, "일반적인 큐잉 네트워크에서의 체류시간 분포의 근사화", 한국경영과학회지, 19권 3호, pp. 93-109, 1994.