비축을 고려한 제품 분배 계획

김 민수, 박 순달

서울대학교 산업공학과

ABSTRACT

본 연구는 비축을 고려하는 경우에 요구되는 제품 분배 계획을 수립하는 것을 목적으로 한다. 비축이란 수요 변동으로 인하여 생산량이 수요량을 충족시키지 못할 때 발생하는 제품 부족량을, 비수기에 생산하여 창고에 보관하는 상황을 말한다.

연구 내용은 다음과 같다. 첫째, 기본 모형인 다기간, 단일 제품, 단일 공장, 다수 수요지 제품 분배 모형에 대하여 최적 해법을 제시하였다. 또한, 기본 모형에 수송 준비 비용을 고려하였을 때에 대한 발견적 기법을 개발하여 최적 해법과의 효율성 분석을 실시하였다. 개발한 기법들은 수행시간에 있어서 선형계획법에 비해 신속하게 해를 제공한다.

1. 서론

수송 체제란 수송 구조를 이용하여 지역적으로 분리된 지점간에 재화나 용역을 운반하는 것이다. 수송 구조의 구성은 도로, 철도, 파이프 라인 등의 고정된 시설과 이 시설을 이용하는 차량 등의 수송 수단, 그리고 이러한 시설과 수단의 체계적인 조직 등으로 이루어진다. 이와 같이 수송 구조의 요소를 분리하였을 때, 고정된 시설은 장기적인 계획에 따른 수송 체계의 설계 과정에서 다루어지는 것이고, 고정된 시설을 이용하는 차량 등은 수송의 대상이며, 조직 체계란 단기적인 계획 하에서 수송 체계를 운용하는 과정에서 다루어지는 것이다. 도시간의 수송 체계는 주로 화물의 운송과 관련하여, 철도를 이용하는 열차, 고속도로 및 일반 도로를 이용하는 정기 화물 트럭, 정해진 항로나 운하 등을 따라 운항하는 콘테이너 선박, 공항을 이용하는 항공기 등을 들 수 있다[1,2,3].

본 연구에서는 이러한 화물 수송 체계에 있어서 특히 창고에서의 비축을 고려하는 경우에, 물류비를 절감하기 위한 효율적인 제품 분배 계획을 수립하고자 한다. 비축이란 수요의 변동으로 인하여 성수기 때는 모자라게 되는 제품을 수요가 적은 비수기에 생산하여 창고에 보관하려 할 때 발

생하게 된다. 비축이 발생되는 근본적인 이유는 생산능력이 한정되 있기때문이다. 본 연구의 제품분배계획에서는 비축이 발생하는 상황 하에서 제품의 분배시기와 분배량을 결정한다. 관련 비용 및 제약조건에 따라 여러가지 분배모형이 발생할 수 있다. 본 연구에서는 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 모형에서 재고유지비용과 수송준비비용만을 고려한다.

본 연구에 관련된 문제는 제품분배와 관련된 자원 제약 문제 및 수송과 재고에 관한 문제로 구분된다.

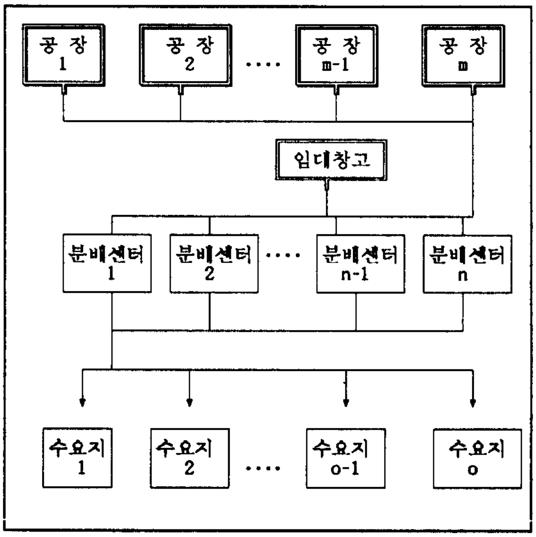
자원 제약 문제는 자원 분배 문제(Resource allocation problem)라고 불리며 주로 탐욕적(Greedy)인 분배 방법인 배낭 문제 유형의 방법을 사용한다. Karmarkar는 단일 제품에 대한 분배 문제로서 재고 고갈 시간(Run out time)을 최대화시키는 분배 전략을 제시하였으며, 준비비가 없는 분배에 대해서는 최적의 분배 방법임을 보였다[8]. Bitran et al.은 단일 제품에 대한 자원 할당 문제를 배낭 문제를 이용하여 계산의 속도를 높였다[5]. Dogramaci et al.은 용량 제약생산량 결정문제에 대한 발견적해법을 제시하였다[6]. Federgruen et al.은 독립 수요에 대한 2개의 수송형태를 기준으로 신선도가 중요시되는 제품의 분배 및 할당을 연구하였다[7]. Tang은 최대 최소 할당 문제에서 단체법을 사용하지 않고 $O(MN^2)$ (M : 제약식, N : 변수)의 복잡도로써 최적해를 제공하는 알고리듬을 개발하였다[11]. Trigeiro et al.는 생산 준비비용을 고려한 생산량결정문제에서 Lagrange완화를 이용한 근사적해법을 구축하였다[12].

수송과 재고에 관련된 연구란 수송비와 재고비용을 동시에 고려한 연구를 말한다. Schwarz는 단일 제품을 대상으로, 다단계 생산과 분배 시스템의 주어진 설계 하에서 전체 시스템의 재고와 시스템 내부에서의 재고 분배, 그리고 생산과 분배 시스템의 설계가 재고관리와 비용에 어떻게 영향을 미치는 가에 대해서 물리적 시스템 설계와 재고관리 시스템간의 상호관계를 다루었다[9]. Benjamin은 생산과 보관 비용, 수송비, 수요지의 재고 비용을 동시에 고려하여 다수의 수요지와 다수의 공급지를 대상으로 생산의 단위 크기와 수송량, 그리고 수요지에서의 경제적 주문량을 구하는 식을 수식화하고, 발견적 기법을 제시하였다[3]. Speranza와 Ukovich는 단일 호에서의 다수제품에 대한 수송과 재고비용을 최소화하기위한 수송빈도를 구하였다[10].

2. 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 모형 - 재고유지비용 고려

비축을 고려한 제품분배 문제는 공장에서 생산된 제품량과 각 창고의 재고량 및 관련비용 등의 제반 여건을 고려하여 공장으로부터 각 수요지까지의 분배량을 결정하는 문제이다. 즉, 각기간의 생산용량은 한정되어있는 상황에서 주어진 수요형태를 만족시키는 최적분배량을 구한다. 목적식은 재고 관련비용과 수송 관련비용 등의 물류비용의 최소화로 나타난다.

본 연구에서 관심을 두는 분배체계의 수송흐름도는 [그림 1]과 같다. 즉, 공장에서 제품을 생산하고, 그것을 최종 수요지에 보내기 전에 임대창고 및 분배센터로 이동시킨다. 분배센터에서는 비축량을 일단 저장하고 당기 판매에 필요한 제품은 담당 수요지로 수송한다.



[그림 1] 수송 흐름도

본 연구에서 다루는 비축을 고려한 분배 모형들의 공통된 특징은 [표 1]과 같다.

[표 1] 비축을 고려한 분배 모형들의 공통된 특징

기간	다기간
기간당 생산량	확정적
수요 형태	확정적
단위당 재고유지 비용	창고마다 다름

분배모형의 기본모형인 기본모형인 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 및 수송모형을 수식화하는데 다음과 같은 가정이 필요하다. 첫째, 공장은 재고를 갖지 않는다. 즉, 모든 생산량은 수요지 창고로 수송돼야한다. 둘째, 모든 기간의 생산량의 합은 모든 기간의 수요량의 합과 같다. 즉, $\sum_{t\in T} P^t = \sum_{t\in T}\sum_{j\in D} D_j^t$이다. 셋째, 모든 수요지의 최초재고 I_j^0와 최종재고 I_j^n을 0으로 놓는다.

이와 같은 가정에서는 총 수송비용이 일정하게된다. 이러한 가정하에서의 기본모형은 다음과 같다.

$$Min \sum_{t\in T}\sum_{j\in D} h_j I_j^t \quad (1)$$

$$s.t.\ I_j^{t-1} + X_j^t - D_j^t = I_j^t \quad \forall\ t\in T,\ j\in D \quad (2)$$

$$P^t = \sum_{j\in D} X_j^t \quad \forall t\in T \quad (3)$$

$$X_j^t \geq 0, \quad \forall t\in T,\ j\in D \quad (4)$$

$$I_j^t \geq 0, \quad t=1,\cdots,n-1\ \ \forall j\in D \quad (5)$$

$$I_j^0 = I_j^n = 0, \quad \forall j\in D \quad (6)$$

m : 수요지의 개수

n : 기간의 개수

D : 수요지 집합 { 1, ... ,j, ... ,m }

T : 기간 집합 { 1, ... ,t, ... ,n }

P^t : 기간 t에서의 공장의 생산량

I_j^t : 기간 t에서 수요지 j의 기말재고량 (결정변수)

X_j^t : 기간 t에서 수요지 j로의 반입량 (결정변수)

D_j^t : 기간 t에서 수요지 j에서의 수요량

h_j : 수요지 j에서의 단위당 재고유지비용

위의 모형은 다음과 같은 성질을 갖는다.

성질 1. 기간 t에서 수요지 j의 반입량 X_j^t은 재고비용 h_j및 수요량 D_j^t에 의해 결정된다.

성질 2. 각 수요지 j 에서 기간 t의 기말재고

I_j^t는 $I_j^t = \sum_{k=1}^{t-1} X_j^k - \sum_{k=1}^{t-1} D_j^k$와 같다. 따라서, 전기간 동안 모든 수요지에서 발생하는 재고의 총량은 일정하다.

성질 1과 성질 2를 이용하여 재고유지비용을 최소화하면서 각각의 수요량을 만족하는 해법은 최적해를 보장한다. 수학적 귀납법으로 증명해보자. m = 1일 때는 단일 수요지의 분배 일정이 되어 자명하다. m = 2일 때는 단위재고비용이 최대가 되는 수요지에서 발생하는 재고비용을 최소화하므로 최적이다. m = k일 때, 해법 1이 최적해를 구한다고 가정한다. m = k+1일 때, 모형 1에서 $P^t = \sum_{j \in D} X_j^t \quad \forall t \in T$이므로, j=1, ..., m-1 까지 X_j^t가 정해지면 X_m^t는 결정된다. 따라서, m = 1, ..., k은 최적해를 보인다고 가정했으므로, 단위재고비용이 최소인 수요지 k+1의 분배는 m=1인 경우인 단일 수요지의 분배일정과 같게 되어 최적해를 구하게된다.

해법의 단계는 다음과 같다.

단계 1. 수요지 j를 단위 당 재고비용 h_j의 내림차순으로 정렬한다.

단계 2. 정렬한 순서대로 각 수요지별로 기간 n부터 기간 1로 반입량과 재고량을 다음과 같이 계산한다.

Q^t를 기간 t 의 공장의 반출가능량이라 정의한다.

만약, $Q^t \geq D_j^t$ 이면 $X_j^t = D_j^t$,

$Q^t = Q^t - D_j^t$, $I_j^t = 0$이 된다.

그렇지 않은 경우($Q^t < D_j^t$)에는

$X_j^t = Q_j^t$, $D_j^{t-1} = D_j^{t-1} + D_j^t - Q^t$,

$I_j^{t-1} = D_j^t - Q^t$, $Q^t = 0$이 된다.

해법에 대한 수행시간 비교 실험 결과는 [표 2]와 같다.

[표 2] 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 모형(재고유지비용 고려)에 대한 해법의 실험 결과*

문제	수요지	기간	최적해	수행시간	
				해법	LINDO**
1	20	20	6400	0.01 초	4.12초
2	25	25	8625	0.05 초	8.73초
3	30	30	13950	0.05 초	18.73초
4	35	35	19120	0.01 초	33.65초
5	40	40	24105	0.05 초	58.06초

* 실험환경 : 컴퓨터(486DX 66Mhz), 운영체제(MS-DOS 6.0)

** 선형계획법 프로그램

실험결과를 보면 선형계획법의 수행시간은 수요지 수와 기간 수의 증가에 따라 급격히 증가함을 보이나, 개발된 해법은 환경변화에 따른 수행시간의 차이가 크지 않다.

3. 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 모형 - 재고유지비용와 수송준비비용 고려

수송준비비용을 고려하고 식(3)을 완화하여 $P^t \geq \sum_{j \in D} X_j^t \quad \forall t \in T$와 같이 설정하였을때의 모형은 다음과 같다.

$$Min \sum_{t\in T}\sum_{j\in D}(h_j I_j^t + CY_j^t) \quad (7)$$

$$s.t. \; I_j^{t-1} + X_j^t - D_j^t = I_j^t \quad \forall\; t\in T,\; j\in D \quad (8)$$

$$P^t \geq \sum_{j\in D} X_j^t \quad \forall t\in T \quad (9)$$

$$X_j^t \leq MY_j^t, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (10)$$

$$Y_j^t = 0 \; or \; 1, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (11)$$

$$X_j^t \geq 0, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (12)$$

$$I_j^t \geq 0, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (13)$$

$$I_j^0 = 0, \quad \forall j\in D \quad (14)$$

m : 수요지의 개수

n : 기간의 개수

D : 수요지 집합 { 1, ... ,j, ... ,m }

T : 기간 집합 { 1, ... ,t, ... ,n }

P^t : 기간 t에서의 공장의 생산량

I_j^t : 기간 t에서 수요지 j의 기말재고량 (결정변수)

X_j^t : 기간 t에서 수요지 j로의 분배량 (결정변수)

Y_j^t : 기간 t에서 수요지 j로의 수송발생 변수. (결정변수) 수송이 일어나면 1, 아니면 0.

M : 분배량 X_j^t의 상한. (= $\underset{t}{Max}(P^t)$)

D_j^t : 기간 t에서 수요지 j에서의 수요량

h_j : 수요지 j에서의 단위당 재고비용

C : 수송준비비용

위의 모형은 수송준비비용을 고려하는 용량 제약 분배문제로 Bin-Packing문제의 특수형태가 되어 NP-complete이다. 분배모형이 M개의 수요지와 N개의 분배기간으로 이루어 졌다면, MN개의 0-1변수와 2MN개의 실수변수, N(2M+1)개의 제약식을 갖게된다. 그러므로 분지한계법을 이용한다면 분지의 최대 가능 회수는 2^{MN}이 되어 최적해를 구하는데 많은 시간이 걸리게 된다.

따라서, 본 연구에서는 Lagrange 완화와 후방 및 전방 치환을 통한 조정과정을 사용하는 해법을 개발한다. $P^t \geq \sum_{j\in D} X_j^t \quad \forall t\in T$ 를 목적식으로 올리면, Lagrangian은

$$L(u) = Min \sum_{t\in T} u^t P^t + \sum_{t\in T}\sum_{j\in D}(h_j I_j^t + CY_j^t) - \sum_{t\in T}\sum_{j\in D} u^t X_j^t \quad (15)$$

$$s.t. \; I_j^{t-1} + X_j^t - D_j^t = I_j^t \quad \forall\; t\in T,\; j\in D \quad (16)$$

$$X_j^t \leq MY_j^t, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (17)$$

$$Y_j^t = 0 \; or \; 1, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (18)$$

$$X_j^t \geq 0, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (19)$$

$$I_j^t \geq 0, \quad \forall t\in T,\; j\in D \quad (20)$$

$$I_j^0 = 0, \quad \forall j\in D \quad (21)$$

이 된다. u^t는 Lagrange 승수이고, $u = (u^1, u^2, \cdots, u^n) \geq 0$을 만족한다.

집합 N_j가 L(u)의 제약식을 만족하는

(X_j^t, I_j^t, Y_j^t)의 집합이라고 하자.

L(u)를 정리하면,

$$L(u) = \sum_{t \in T} u^t P^t + \sum_{j \in D} L_j(u),$$

$$L_j(u) = Min \sum_{t \in T} (h_j I_j^t + CY_j^t - u^t X_j^t) \quad (22)$$

$$s.t. \ (X_j^t, I_j^t, Y_j^t) \in N_j \ \forall \ j \in D \quad (23)$$

이 된다.

각각의 $L_j(u)$는 단일 수요지의 분배모형과 같다. 결국, 단위당 재고비용 h_j와 수송준비비용 C 및 단위당 분배비용 u^t에 의해 분배계획이 결정된다.

Lagrangian 구축과정에서 도출되는 성질은 다음과 같다.

성질 3. (최적 판정) L(u)에서의 최적해인 $(X_j^t(u), I_j^t(u), Y_j^t(u))$는 식 (24)를 만족하면 모형 2에서도 최적이다.

$$P^t \geq \sum_{j \in D} X_j^t(u) \qquad \forall t \in T \quad (24)$$

성질 4. 어떤 $u \geq 0$에 대해서도,

$$L(u) \leq v$$

(v : $Min \sum_{t \in T} \sum_{j \in D} (h_j I_j^t + CY_j^t)$)를 만족한다.

성질 5. 만약 $u \geq 0$이 성질 3에 준한 모형 2의 최적해를 구하면, u는

쌍대문제 $d = Max \quad L(u)$

$s.t. \qquad u \geq 0$ 에 대해서도 최적이다.

또한, 최적조건이 만족되면 v = d이다.

$L_j(u)$에 의해 결정된 각 수요지 j의 분배계획은 $X_j^t I_j^{t-1} = 0$을 유지하므로 식 (24)를 만족하지 못하는 경우가 발생한다. 따라서, 이러한 비가능성을 없애기위해서 효율적인 분배량 조정과정이 필요하다.

본 분배모형을 위한 발견적 해법의 절차는 다음과 같다.

단계 1. Lagrange 완화 및 초기화

모형 2를 Lagrange 완화하여, 식 (15)와 같은 형태로 목적식을 바꾸고, Lagrange 승수(쌍대 비용)의 초기값

$u_0 = (u_0^1, u_0^2, \cdots, u_0^n) = (0, 0, \cdots, 0)$을

설정한다.

단계 2. 동적 계획법

완화된 모형 L(u)를 동적계획법으로 해결한다.

단계 3. 조정

구해진 분배일정에서 $P^t < \sum_{j \in D} X_j^t(u)$인 기간 t의 분배량을 조정한다. 조정과정은 최대로 4개의 치환과정을 거치게 된다.

단계 4. 종료 판정

구해진 해가 종료조건 식 (24)를 만족하거나 주어진 연산회수에 도달하면 종료, 아니면 단계 5로 간다.

단계 5. Lagrange 승수 개선

Lagrange 승수를 개선한 후에 단계 2로 간다.

subgradient 기법으로 개선을 실행한다.

$$u_{k+1}^t = \max\left\{0, u_k^t + \frac{\alpha_k(d - L(u_k))}{\|\tau_k\|^2}\tau_k\right\} \text{ for } t=1,\cdots,n \quad (25)$$

α_k : $\alpha_1 = 2$. 만약 $L(u_{k+1}) \geq L(u_k)$이면

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k/2,$$

τ_k : 다음과 같은 원소를 갖는 벡터.

$$\tau_k^t = P^t - \sum_{j\in D} X_j^t(u_k) \qquad \forall t \in T$$

d : L(u)의 쌍대문제의 상한.

해법에 대한 실험결과는 [표 3]과 같다.

[표 3] 단일제품, 단일공장, 다기간, 다수 수요지 분배 모형(재고유지비용와 수송준비비용 고려)에 대한 실험 결과*

수요지 수	기간 수	해법			LINDO**			
		수행시간 (초)	근사해	오차 (%)	수행시간 (시:분:초)	분지 회수	선회 회수	최적해
6	3	2.25	8230	0.61	12.09	551	1707	8200
6	4	1.43	7965	0.00	1.05	32	58	7965
6	5	1.46	13625	5.50	1:20.42	2268	9124	12915
6	6	2.26	6825	4.76	32:25.79	48725	150234	6515
7	3	1.21	3060	0.00	39.60	1503	5919	3060
7	4	1.53	6075	1.33	4:00.63	7109	26609	5995
7	5	7.30	4290	0.00	2:21.71	3338	14770	4290
7	6	6.32	15925	5.08	2:23.03	3103	14341	15155
7	7	9.94	17180	1.15	41:55.26	49994	15567	16985
8	3	0.33	12620	0.32	55.04	1881	7589	12580
8	4	0.50	17690	0.00	11.15	294	1252	17690
8	5	3.68	16585	5.60	11:37:25.06	905290	3693417	15705
10	5	6.32	7830	1.23	11:01:57.29	753574	2462146	7735

* 실험환경 : 컴퓨터(486DX 66Mhz), 운영체제(MS-DOS 6.0)

** 선형계획법 프로그램

실험 결과를 보면 혼합 정수 선형계획법의 수행시간은 수요지 수와 기간 수의 증가에 따라 급격히 증가함을 보인다. 발견적 해법은 수요지 수와 기간 수의 증가에 따른 수행시간의 변화가 크지 않다. 또한, 오차도 최대 6%인 것을 알 수가 있다. 즉, 해를 구하는 시간을 비용으로 환산하면 대형문제를 해결할 때, 오차로 인해 발생하는 비용보다 해를 적시에 구하지 못해 발생하는 비용이 클 수가 있다. 따라서, 개발된 발견적해법은 대형문제를 신속하게 해결할 필요가 있을 때, 효용성이 증대된다.

5. 결론

본 연구에서는 분배 체계에서 비축을 고려한 제품분배모형에 대한 기본모형에 대해 최적해법을 제시하고 증명하였다. 또한, 수송준비비용을 고려한 문제에 대한 효율적인 해법을 개발하였다. 각각의 해법들은 실험을 통하여 그 효율성을 입증하였다.

본 연구에서 제시한 해법들은 특히, 대형분배 문제에서 선형계획법보다 빠른 시간내에 해를 제시한다. 추후연구방향으로는 관련제약식 첨가 및 다제품 다공장 분배모형으로의 확장 등이 있다. 이러한 모형의 확장에 대한 해법은 해법 2에서 제시된바와 같이 제약식의 완화 및 조정 단계를 수반한다.

참고문헌

[1] 당택풍, 시택수웅, 「물류관리 매뉴얼」, 한국 생산성본부, 1990.

[2] 안태호, 「물류개론」, 한국물류관리협의회, 1991.

[3] 옥선종, 「물류관리론」, 기술, 1993.

[4] Benjamin, J., "An analysis of inventory and transportation costs in a constrained network", *Trans. Science*, Vol.23, No.3(1989), pp.177-183

[5] Bitran, G.R., E.A.Haas and A.C.Hax, "Hierarchical production planning : a single stage system", *Operations Research*, Vol.29, No.4(1981), pp.717-744.

[6] Dogramaci A., J.C.Panayiotopoulos and N.R.Adam, "The dynamic lot-sizing problem for multiple items under limited capacity", *AIIE Transactions*, Vol.13, No.4(1981), pp.294-303

[7] Federgruen, A., G.Prastacos and P.H. Zipkin, "An allocation and distribution model for perishable product", *Operations Research*, Vol.34, No.1(1986), pp.91-104

[8] Karmarkar, U.S., "Equalization of runout times", *Operations Research*, Vol.29, No.4(1981), pp.757-762

[9] Schwarz, L.B., "Physical distribution : the analysis of inventory and location", *AIIE Transactions*, Vol.13, No.2(1981), pp.138-150

[10] Speranza, M.G. and W.Ukovich, "Minimizing transportation and inventory costs for several products on a single link", *Operations Research*, Vol.42, No.5(1994), pp.879-894

[11] Tang, C.S., "A Max-Min allocation problem : its solutions and applications", *Operations Research*, Vol.36, No.2(1988), pp.359-367

[12] Trigeiro, W.W., L.J. Thomas and J.O. McClain, "Capacitated lot sizing with setup times", *Management Science*, Vol.35, No.3(1989), pp. 1443-1453