

# 양측식 선형 유도 전동기의 수학적 모델링과 등가 회로 유도

홍 언표<sup>o</sup>, 여 형기, 유지윤, 박귀태  
고려대학교 전기공학과

## Mathematical Modelling of a Double-sided Linear Induction Motor and Derivation of Equivalent Circuit

E. P. Hong<sup>o</sup>, H. G. Eyou, J. Y. Yoo, G. T. Park  
Dept. of Electrical Eng., Korea University

Abstract - A Linear Induction Machine(LIM) is the motor which is developed from an rotary induction machine. Usually, the electromagnetic field of an LIM is analyzed by Maxwell's equations. The structure of an LIM is different from a conventional rotary machine, an LIM has some particular characteristics such as the end effects. Hence, the mathematical analysis of an LIM is very complicated and the implementation of the equivalent model is difficult. In this paper, the dynamic equations and the equivalent model of a Double-sided short primary LIM(DLIM) is obtained by the winding function and a d-q theory. The validity of the proposed methodology is verified by numerical analysis.

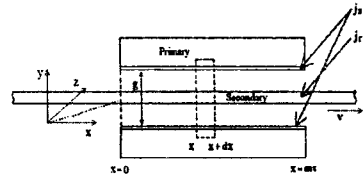


Fig.1 Short Primary DLIM

### 1. 서 론

선형 유도 전동기(Linear Induction Motor : LIM)는 회전기와 달리 보조 장치가 필요없이 직선 운동을 하는 기기로서 자기 부상과 결합될 경우 비접촉 구동이 가능하여 잡음, 진동을 발생하지 않는 저공해의 수송 기관용 구동 장치로서, 그리고 각종 직선 운동용 구동력원으로서 주목되고 있으며 에스컬레이터나 공장의 컨베이어 시스템, 크레인등 많은 분야에서 응용이 시도되고 있다. 그러나, LIM은 불연속인 구조적 특성으로 인하여 전동기가 동작할때 그 입구단과 출구단에서 자계의 급작스런 변화로 인해 일어나는 단효과가 해석되어져야 하기 때문에 아주 복잡하고 어려운 수학적 해석이 필요하게 된다.

LIM의 특성 해석면에 유용한 수법으로 전자계 이론에 기초한 공극 자체 해석 방법이 많이 발표되고 있으며, 제어적인 측면에서 유용한 등가 회로 모델이 유도되어지고 있다. Yamamura[1], Elliott[2], North 등에 의해 자체 구조에 대한 효과적인 해석 방법이 발표되었으나 유용한 결과를 얻기 위해서는 고차의 시스템 방정식을 계산해야 하는 어려움과 매우 많은 계산 시간이 필요하였다. 특히 Lipo와 Nonndahl의 "pole-by-pole" 모델[3]은 2축 모델과 권선 함수를 사용하여 제어 가능한 등가 회로를 유도하였다는 점에서 주목할만한나 2차축의 각 pole들이 서로 독립적이지만 couple되어 있다는 가정과 단효과의 변화를 고려하여 속도와 주파수에 종속되어야하는 2차축 각 pole의 권선 함수들이 정현적이라는 가정으로 인해 정확한 모델을 얻을 수 없다.

본 논문에서는 Short primary Double-sided LIM(이하 DLIM)의 공극 자체를 해석하고 제어의 전단계에서 행해져야 할 등가 회로를 공극 자체로부터 유도하고자 한다. 이를 위하여 공극 자체 방정식으로부터 얻어진 1차축과 2차축의 권선 함수를 회전기의 해석과 제어에 주로 사용되는 2축 모델로 나타내고 이 권선 함수를 이용하여 1차축의 고정 좌표계로 표현된 DLIM의 동태 방정식과 등가 회로 정수를 구한다.

### 2. LIM의 공극 자체 분석

#### 2.1 DLIM의 해석 모델과 전자계 방정식

DLIM은 1차축이 각각 2차축 양면에 위치하여 편측식(Single-sided) 기기에 비해 공극 누설자속은 작기 때문에 그림1과 같은 1차원 모델에 의한 해석이 가능하며 해석시의 가정 사항은 다음과 같다.

- ① 1차축 철심의 투자율은 무한대이며 1차축 폭은 \$lm\$로 가정한다.
- ② 2차축 도체는 비자성체(\$\mu \approx \mu\_0\$)이며 저항률은 평방향 단효과와 표피 효과에 의하여 보정된 값을 갖는다. 그리고 평방향의 overhang은 극간격의 40%이상[1]이며 \$x\$방향으로 무한한 길이를 갖는다.

- ③ 자계는 \$y\$방향 성분만을 가지며 \$x\$의 함수이고 시간에 대해 정현적으로 변하며 모든 전류는 \$z\$방향이며 공극 자체와 2차축의 운동은 \$x\$방향이다.

- ④ 공극 \$g\$는 카터 계수에 의해 보정된 값을 가진다.[4]

- ⑤ 1차축 권선은 정현적으로 분포되어 있으며 3상의 권선 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_{a1}(x) &= \frac{N_1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x\right) \\ N_{b1}(x) &= \frac{N_1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \frac{2}{3}\pi\right) \\ N_{c1}(x) &= \frac{N_1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (1)$$

권선 함수는 기자력의 분포를 표현한 것이다.

공극 자속을 유도하기 위한 전자계 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times H_z = j_s \quad (2)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = \frac{\mu_0}{g} (j_1 + j_2) \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial b_x}{\partial t} + v \frac{\partial b_x}{\partial x} \quad (4)$$

$$E_x = \rho j_s \quad (5)$$

#### 2.2 공극 자체 밀도

1차축 전류 밀도는 복소 함수 형태로 정의되어질 수 있다.

$$j_1(x, t) = J_1 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right)\right) \quad (6)$$

\$\omega\$는 전원의 전기각 주파수이고 \$\tau\$는 1차축의 극간격(pole pitch)이다. 식(2)를 이용하여 1차축 자체 밀도를 유도해보면 다음과 같이 복소 함수 형태로 표현된다.

$$b_1(x, t) = j \frac{\mu_0 \tau}{\pi g} J_1 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x\right)\right) \quad (7)$$

맥스웰 방정식으로부터 유도된 공극자속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\mu}{\mu_0} \frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_x}{\partial t} = \frac{\partial j_s}{\partial x} \quad (8)$$

\$v\$는 2차축 속도를 나타내고 \$\rho\$는 2차축의 저항율을 나타낸다. 식(8)로부터 공극 자체 밀도를 구하면 다음과 같다.[1]

$$b_x = j \frac{\pi \mu}{\mu_0 \tau} \frac{J_1}{\sqrt{1+(sG)^2}} \quad (9)$$

$$\delta_s = -\tan^{-1} sG \quad (10)$$

$$b_m(x, t) = B_m \exp(-j\frac{\pi}{r}x) \exp(j\omega t + \delta_j) + B_1 \exp((a+j\omega)t) \exp\left\{-\left(\frac{1}{a_1} - j\frac{\pi}{r_s}\right)x\right\} + B_2 \exp((a+j\omega)t) \exp\left\{\left(\frac{1}{a_2} + j\frac{\pi}{r_s}\right)x\right\} \quad (11)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\rho G}{\rho G X - \mu_0 v}, \quad \alpha_2 = \frac{2\rho G}{\rho G X + \mu_0 v}, \quad r_s = \frac{2\pi}{Y} \quad (12)$$

$$X = \text{Real} \left[ \sqrt{\left\{ \left( \frac{\mu_0 v}{\rho G} \right)^2 + \frac{4\mu_0}{\rho G} a \right\} + j \frac{4\mu_0 \omega}{\rho G}} \right]$$

$$Y = \text{Imag} \left[ \sqrt{\left\{ \left( \frac{\mu_0 v}{\rho G} \right)^2 + \frac{4\mu_0}{\rho G} a \right\} + j \frac{4\mu_0 \omega}{\rho G}} \right]$$

s는 슬림을 나타내며 G는 goodness factor[4]이다. a는 과도 상태의 변화를 나타내며,  $\alpha_1, \alpha_2$ 는 공극에 대한 자속의 침투깊이이고,  $r_s$ 는 단효과파의 반파장 길이이다.

식(11) 우변의 첫째 항은 정상 진행파를 나타내고 둘째 항은 입구 단효과파를 나타내며 양의 x방향으로 진행하며 감쇠하고 셋째 항은 출구 단효과파로 음의 x방향으로 진행하며 감쇠한다.

DLIM의 공극자계는 1차속 자속과 2차속 자속의 합으로 나타낼 수 있다.

$$b_m(x, t) = b_1(x, t) + b_2(x, t) \quad (13)$$

그러므로 2차속 전류에 의해 발생하는 2차속 자속 밀도는 다음과 같이 구해진다.

$$b_2(x, t) = \frac{\mu_0 r}{\pi G} \frac{sG I_2}{\sqrt{1+(sG)^2}} \exp\left\{j\left(\omega t - \frac{\pi}{r}x + \delta_j\right)\right\} + B_1 \exp((a+j\omega)t) \exp\left\{-\left(\frac{1}{a_1} - j\frac{\pi}{r_s}\right)x\right\} + B_2 \exp((a+j\omega)t) \exp\left\{\left(\frac{1}{a_2} + j\frac{\pi}{r_s}\right)x\right\} \quad (14)$$

단효과 자속 성분은 경계 조건[5]으로부터 구할 수 있다.

$$B_1 = \frac{(jkB_r + \frac{\mu_0 v}{\rho G} B_m)(\exp(Dmr) - \exp(-jkmr))}{(C - \frac{\mu_0 v}{\rho G})(\exp(Dmr) - \exp(Cmr))} \quad (15)$$

$$B_2 = \frac{(jkB_r + \frac{\mu_0 v}{\rho G} B_m)(\exp(-jkmr) - \exp(Cmr))}{(D - \frac{\mu_0 v}{\rho G})(\exp(Dmr) - \exp(Cmr))} \quad (16)$$

$$k = \frac{\pi}{r}, \quad C = -\frac{1}{a_1} - j\frac{\pi}{r_s}, \quad D = \frac{1}{a_2} + j\frac{\pi}{r_s}$$

그런데 출구 단효과 성분은 침투 깊이가 매우 짧아서 일반적으로 전자기의 성능에 미치는 영향이 매우 작으므로 무시할 수 있다.[1]

### 3. 동태 방정식의 유도

권선합수를 이용하면 농형 유도기의 동태방정식을 유도할 때와 유사한 방법으로 DLIM의 동태 방정식과 등가회로를 유도할 수 있다.

#### 3.1 권선 합수

회전에서처럼 2축으로 표현된 1차속과 2차속의 권선합수를 구할 수 있다. 식(1)의 1차속 권선합수를  $\alpha - \beta$ 축로 표현하면 다음과 같다.

$$N_m(x) = \frac{3}{4} N_s \cos \frac{\pi}{r} x \quad (17)$$

$$N_m(x) = -\frac{3}{4} N_s \sin \frac{\pi}{r} x$$

식(14)의 2차속 자속은 2차속 권선 합수와 2차속 전류의 곱으로 표현될 수 있다.

$$b_2(x, t) = \frac{\mu_0}{G} N_m(x) I_r(t) \quad (18)$$

식(18)로부터 2차속 권선 합수와 전류는 아래처럼 구해지며 2차속 공극 자속 밀도가 단효과 성분을 포함하므로 정상성분과 단효과성분의 합으로 나타내어진다.

$$N_r(x) = N_{rF}(x) + N_{rT}(x)$$

$$= N_{rF} \exp(-j\frac{\pi}{r}x) + N_{rT} \exp(-\frac{1}{a_1}x) \exp(-j\frac{\pi}{r_s}x) \quad (19)$$

$$I_r(t) = I_r \exp(j\omega t + \delta_j) \quad (20)$$

$$N_{rF} = \frac{3N_s(v_1 - v)}{4\rho \sqrt{\left(\frac{4\pi}{\mu_0 r}\right)^2 + \left\{\frac{1}{\rho}(v_1 - v)\right\}^2}} \quad (21)$$

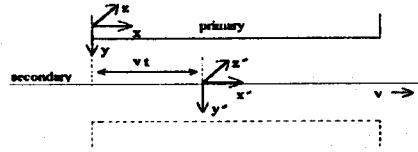


Fig.2 Relation between primary and secondary

$$N_{rT} = \left[ -\frac{3kN_s v_1}{4\rho \sqrt{\left(\frac{4\pi}{\mu_0 r}\right)^2 + \left\{\frac{1}{\rho}(v_1 - v)\right\}^2}} \right] \times \left[ \frac{\exp(-jkmr) - \exp(Dmr)}{(C - \frac{\mu_0 v}{\rho G})(\exp(Dmr) - \exp(Cmr))} \right] \quad (22)$$

권선합수를  $\alpha - \beta$ 축 성분으로 분리하여 나타내면 다음과 같다.

$$N_{r\alpha}(x) = N_{rF} \cos\left(\frac{\pi}{r}x\right) + N_{rT} \exp\left(-\frac{1}{a_1}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{r_s}x\right)$$

$$N_{r\beta}(x) = -N_{rF} \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right) - N_{rT} \exp\left(-\frac{1}{a_1}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{r_s}x\right) \quad (23)$$

### 3.2 전압 방정식과 등가 회로

1차속과 2차속에 고정된 좌표계로 표현된 DLIM의 전압 방정식은 회전기의 전압 방정식과 같게 표현된다.

그림 2에 나타내었듯이 DLIM의 1차속 고정 좌표계(x,y,z)와 2차속 고정 좌표계(x',y',z') 사이의 관계는 다음과 같다.

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z' \quad (24)$$

식(24)를 이용하면 1차속의 고정 좌표계에서 본 DLIM의 전압 방정식은 다음과 같이 유도되어진다.

$$\bar{V}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\lambda}_s}{dt} \quad (25)$$

$$\bar{V}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{\partial \bar{\lambda}_r}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{\lambda}_r}{\partial x}$$

2차속 전압 방정식은 저항에 의한 전압 강하와 유도 전압, 그리고 속도 전압 성분으로 이루어짐을 알 수 있다.

1차속의 채교 자속은 다음과 같이 구해진다.[6]

$$\bar{\lambda}_s = \int_0^{m\pi} n_s(x) \int_x^{m\pi} \frac{\mu_0}{G} (N_m(x) i_s(t) + N_{r\alpha}(x) i_r(t) + N_{r\beta}(x) i_r(t)) dx$$

$$= \bar{L}_{ss} i_s + \bar{L}_{sr} i_r + \bar{L}_{sr} i_r \quad (26)$$

인덕턴스는 권선합수를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.[3]

$$\bar{L}_{ss} = \frac{\mu_0}{G} \int_0^{m\pi} N_s(x) N_s(x) dx \quad (27)$$

$$\bar{L}_{sr} = \frac{\mu_0}{G} \int_0^{m\pi} N_s(x) N_{r\alpha}(x) dx \quad (28)$$

$$\bar{L}_{rT} = \frac{\mu_0}{G} \int_0^{m\pi} N_s(x) N_{rT}(x) dx \quad (29)$$

2차속의 채교 자속도 같은 방법으로 구할 수 있으며 2차속의 속도 전압 성분은 다음과 같이 유도되어진다.

$$e_{1,2} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial \bar{\lambda}_r}{\partial x} = v \frac{\partial L_{1,2}}{\partial x} \quad \bar{i}_2 = \frac{\pi}{r} v \bar{G} \bar{i}_2 \quad (30)$$

$$\bar{G} = \frac{r}{\pi} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial x} \quad (31)$$

$(\pi/r)v$ 은 회전기의 회전자 자속도와 같은 방향으로 직선 운동으로 표현된 것이며 G는 속도 전압 인자라서 앞에서 구해진 인덕턴스 성분으로부터 구할 수 있다.[3]

전압방정식을 회전기와 유사하게 공간벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_s \\ \bar{V}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{bmatrix} + \left[ \begin{bmatrix} \bar{L}_{ss} & \bar{L}_{sr} \\ \bar{L}_{sr} & \bar{L}_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{L}_{rT} \\ \bar{L}_{rT} & 0 \end{bmatrix} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{bmatrix} + \frac{\pi}{r} v \left[ \begin{bmatrix} 0 & \bar{G}_{sr} \\ \bar{G}_{sr} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{G}_{rr} & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \bar{i}_s \\ \bar{i}_r \end{bmatrix} \quad (32)$$

DLIM은 권선 합수를 이용하여 유도된 회로 정수들이 정상 자속 성분과 단효과 자속 성분의 합으로 표현되어지게 된다.

식(32)를 이용하여 DLIM의 등가회로를  $\alpha - \beta$ 축 성분으로 표현하면 그림3, 그림4와 같은 결과를 얻을 수 있다. 추력은 회전형 유도기의 토크 식을 구하는 과정과 동일하며 결과는 다음과 같다.

$$F = \frac{3}{2} \frac{\pi}{r} \bar{i}_r^T [\bar{G}_r + \bar{G}_T] \bar{i}_r = F_F + F_T \quad (33)$$

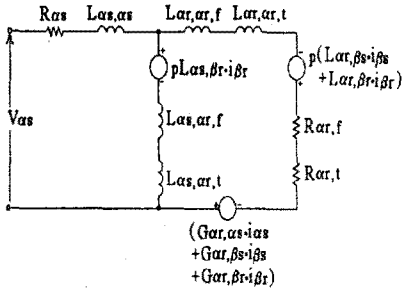


Fig 3 a-axes equivalent circuit

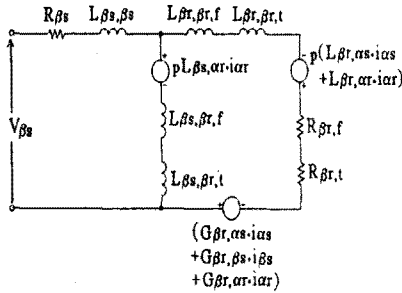


Fig 4 β-axes equivalent circuit

식(33)에서  $F_r$ 는 정상 자속에 의한 추력을 나타내며  $F_T$ 는 단효과에 의한 추력을 나타낸다.

#### 4. 모델의 검증

지금까지 권선 함수와 2축 모델을 이용하여 회진기와 유사한 DLIM의 전압 방정식과 등가 회로를 유도하였다. 제시된 모델의 타당성을 검증하기 위하여 표1의 파라미터를 사용하여 동기 속도가 150[m/s]인 고속 기기에 적용하였다.

표 1. System Parameter

1 차 축 길이	5 [m]
1 차 축 전압	150 [V]
1차축 전류 밀도	50000 [A/m <sup>2</sup> ]
극간격(pole pitch)	0.5 [m]
전원 주파수	150 [Hz]
극 수	10 [pole]
공극 길이	0.04 [m]
2 차 축 도전율	2.071×10 <sup>7</sup> [Ω/m]
2 차 축 두께	0.01 [m]
권선 분포 계수	2 [phase]

그림 5와 그림 6은 일정 전압 인가시 맥스웰 방정식과 식(32)의 전압 방정식으로부터 구한 추력-속도 곡선을 나타내고 있으며, 단효과로 인하여 추력의 undulation과 함께 동기 속도 이전에 추력이 크게 감소하여 영이 되어짐을 알 수 있다. 그림 7은 동기 속도가 다를 때의 추력-속도 곡선을 나타내며 그림 8은 주파수 변화에 따른 추력의 변화를 나타낸 것으로 단효과를 포함하는 추력이 정상 추력보다 크게 되어지는 구간이 있으며 이것은 저속도 기기에서 슬립이 부( $s < 0$ )인 경우에도 정방향 추력이 나타남을 보여준다.

#### 5. 결론

본 연구에서는 DLIM의 동특성을 정확히 나타낼 수 있는 등가 제어 모델을 권선 함수와 2축 이론을 사용하여 유도하였다.

제안된 모델은 맥스웰 방정식에서 얻은 결과와 거의 일치하였고 속도 변화에 대한 공극 자계의 변화를 2차축 권선 함수로 표현함에 의해 단효과가 등가 모델에 포함되어졌으며 회로 정수를 쉽게 구할 수 있었다.

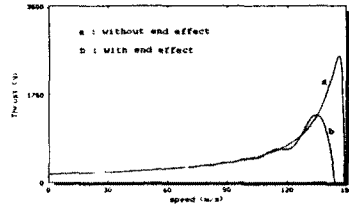


Fig.6 T-S curve of dynamic eq. in constant voltage

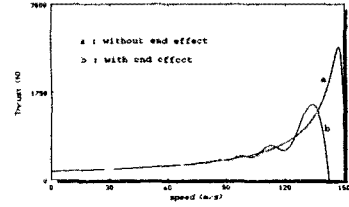


Fig.6 T-S curve of dynamic eq. in constant voltage

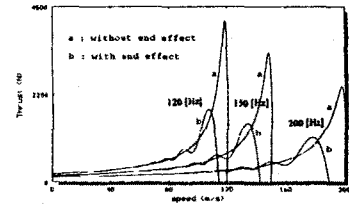


Fig.7 T-S curve in each synchronous speed

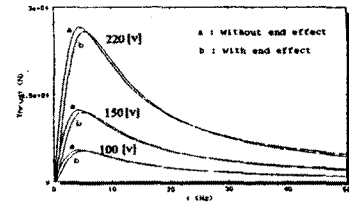


Fig.8 Thrust curve in variable frequency

향후, 회진기의 제어 이론을 바탕으로 실제적인 응용 분야에 등가 제어 모델이 적용될 수 있기를 기대한다.

#### 6. 참고문헌

- [1] Sakae Yamamura, Theory of Linear Induction Motors, University of Tokyo Press, 1978.
- [2] G. B. Kliman and D. G. Elliott, "Linear Induction Motor Experiments in Comparison with Mesh/Matrix Analysis," IEEE PES Winter Meeting, New York, pp. 1624-1633, 1974.
- [3] T. A. Lipo and T. A. Nondahl, "Pole-by Pole d-q Model of a Linear Induction Machine," IEEE trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, no. 2 March/April, pp. 629-642, 1979.
- [4] S. A. Nasar and I. Boldea, Linear Motion Electric Machines, A Wiley-Interscience Publication, 1976.
- [5] Michel Poloujoff, The theory of Linear Induction machinery, Clarendon Press · Oxford, 1980.
- [6] P. C. Krause and C. H. Thomas, "Simulation of Symmetrical induction machinery," IEEE trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-84, pp. 1038-1053, 1965