

### 3차원 유한요소법을 이용한 농형유도전동기 단락환의 저항계산

°박 민우\*, 이 복용\*\*, 정 해덕†, 이 기식\*  
 \*단국대학교, \*\*대유공업전문대학, †목포대학교

#### Calculation of Resistance of Cage Rotor End Ring using 3-D Finite Element Method

°Min-Woo Bak\*, Bok-Yong Lee\*\*, Hae-Duk Jung†, Ki-Sik Lee\*  
 \*Dankook University, \*\*DaeYeu Technical College, †Mokpo Nat'l University

**Abstract** - This paper is to describe a method for calculating resistance of cage rotor end-ring, based on 3-D finite element method using magnetic vector potential  $\vec{A}$  and electric scalar potential  $\phi$ . The induced current of a cage rotor flows through the bars of a cage rotor. The current completes their closed paths by passing around the end-ring. The end-ring may contribute a significant influence to the performance of machine. The resistance under consideration of skin effect is calculate by using Joule's loss equation.

#### 1. 서 론

농형 유도전동기의 단락환은 고정자에 가해진 전류에 의하여 회 전자의 붕도체에 유도된 전류가 흐를 수 있도록 폐로를 형성케하 여 토크를 생성시키는 역할을 하게 된다. 폐로를 형성할때 단락환 에서의 표피효과로 인하여 설계치수에 비해 적은 단면적으로 전류 가 흐르게 되어 저항이 커진다. 그러므로 단락환의 저항을 정확 히 계산하는 것은 전동기 제반 특성을 결정하는데 중요한 역할을 하게 된다.

기존의 단락환의 저항을 계산하는 방법은 회전자의 도체와 단락 환의 접합면에서 전류밀도가 균일하다는 가정과 단락환의 두께가 매우 작다는 가정을 하였으므로 단락환의 표피효과를 충분히 고려 하지 못했다.

본 논문에서는 자기벡터포텐셜  $\vec{A}$ 과 전기스칼라포텐셜  $\phi$ 에 의 한 3차원 유한요소법을 이용하여 회전자에서 발생하는 주울손실로 부터 저항을 계산하였다. 가중잔차법에 의한 유한요소 정식화 과 정에서 1차형상함수와 사면체 요소를 사용하였다.

#### 2. 본 론

##### 2.1 유한요소 정식화

변위전류를 무시한 전자기장 Maxwell 방정식과 보조방정식은 다 음과 같다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \vec{J}_m \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \quad (5)$$

여기서,  $\vec{H}$ : 자계의 세기 [A/m]

$\vec{B}$ : 자속 밀도 [Wb/m<sup>2</sup>]

$\vec{E}$ : 전계의 세기 [V/m]

$\vec{J}_e$ : 전위 전류 밀도 [A/m<sup>2</sup>]

$\vec{J}_m$ : 유도 전류 밀도 [A/m<sup>2</sup>]

$\sigma$ : 도전률 [Ω/m]

$\mu$ : 자기 투자율 [H/m]

자기벡터포텐셜  $\vec{A}$ 를 다음과 같이 정의하면,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (6)$$

과 같이 되고, 전계  $\vec{E}$ 는 식 (2)와 식 (6)로 부터 다음과 같이 자 기벡터포텐셜  $\vec{A}$ 와 전기스칼라포텐셜  $\phi$ 에 의해 표현 된다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (7)$$

식 (1)에 상기 식들을 대입하면 다음과 같은 지배 방정식을 도 출할 수 있다.

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J}_e - \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (8)$$

여기서  $\nu (= \frac{1}{\mu})$ 는 자기저항률이다.

식 (8)은 전위 전류  $\vec{J}_e$ 에 의하여 형성되는 자기장을 표현하고

있으나 미지수인 전기스칼라포텐셜  $\phi$ 가 포함되어 있으므로 한 개의 수식이 더 필요하게 된다. 또 하나의 지배 방정식은 전하의 축적을 무시한 전류 연속 방정식에 식 (7)을 대입하여 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot \left( \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \phi \right) = 0 \quad (9)$$

이상에서 도출된 지배방정식 (8)과 (9)를 가지고 Galerkin법을 적용하면 다음과 같다. 이때 지배방정식에서의 시간미분항은 정상상태해석으로 하여 전개하였다.

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 = & - \int_V \nabla N_i \times (\nu \nabla \times \vec{A}) dV + j\omega \sigma \int_V N_i \vec{A} dV \\ & + \sigma \int_V N_i \nabla \phi dV - \int_V N_i \vec{J}_0 dV \end{aligned} \quad (10)$$

$$\vec{R}_\phi = \int_V \nabla N_i \cdot (j\omega \sigma \vec{A} + \sigma \nabla \phi) dV \quad (11)$$

식 (10)과 (11)을 이산화하기 위해 해석영역을 유한개의 사면체로 분할하고 요소내의 미지함수를 일차함수로 근사시킨 다음 이것을 식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 요소행렬을 구성할 수 있게 된다.

$$[K] \{A\} = \{F\} \quad (12)$$

여기서,  $[K]$ 는  $16 \times 16$  행렬이고,  $\{A\}$ 와  $\{F\}$ 는  $16 \times 1$  벡터이다.

## 2.2 저항 계산

단락환의 저항은 다음과 같이 주울 손실의 식으로부터 구해진다.

$$P = I_e^2 R_e \quad (13)$$

또한  $P$ 는 다음 식과 같은 주울의 법칙으로부터 표현된다.

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv \quad (14)$$

식 (5)와 식 (7)에 의하여,

$$\begin{aligned} P &= \int_V \vec{E} \cdot \sigma \vec{E} dv \\ &= \sigma \int_V \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) \cdot \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right) dv \\ &= I_e^2 R_e \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $P$  : 주울 손실 [ Watt ]  
 $I_e$  : 단락환 유도전류 [ A ]  
 $R_e$  : 단락환의 저항 [  $\Omega$  ]

식 (15)를 유한요소 정식화하면 단락환 저항의 식은 다음과 같

이 전개된다.

$$\begin{aligned} P &= \sigma \int_V \left\{ -\omega^2 (A_x + A_y + A_z) \right. \\ &\quad - 2j\omega (A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} dv \\ &= I_e^2 R_e \end{aligned} \quad (16)$$

윗식을 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 변수로 하는 식으로 정리하고 각 요소에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_e = & \sigma \left\{ -\omega^2 \frac{V}{4} \sum_{i=1}^4 (A_{xi} + A_{yi} + A_{zi}) \right. \\ & - 2j\omega \frac{V}{4} \sum_{i=1}^4 (b_i A_{xi} \phi_i + c_i A_{yi} \phi_i + d_i A_{zi} \phi_i) \\ & \left. + \frac{1}{36V} \sum_{i=1}^4 (|b_i \phi_i|^2 + |c_i \phi_i|^2 + |d_i \phi_i|^2) \right\} / I_e^2 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $V$ 는 각 요소의 체적이다.

## 3. 시뮬레이션 및 검토

그림 1은 농형유도전동기 해석을 위해 한 피치만을 대상으로 한 것을 나타낸 것이고, 그림 2는 해석모델에 대한 설명이다.

시뮬레이션 모델은 회전자 도체를 중심으로 한 피치를 근사시킨 것으로서 단락환의 두께를 15[mm]로 한 모델 1과, 단락환의 두께를 10[mm]로 한 모델 2를 설정하였다. 고정자에 가한 전원전류에 의해 유도된 전류가 회전자 봉도체를 통해 단락환으로 유입되고, 유입된 유도전류가 단락환을 통해 폐로를 형성하게 된다. 또한 모델 1과 2의 변형으로 고정자의 권선이 회전자 봉도체를 약간 지나간 모델 3과 4를 설정하여 시뮬레이션하였다. 각각의 모델에서 회전자 권선과 고정자 권선은 선형이라고 보아서 도전율을 없다고 보았고, 비투자율은 1000으로 했으며, 비선형성을 고려하지 않았다. 고정자에 가해지는 전류밀도는  $10 \times 10^5$  [ A/m<sup>2</sup> ] 을 하였고, 단락환은 알루미늄으로 도전율  $3.54 \times 10^7$ 로 하였다. 유한요소법을 적용하기 위한 요소분할도는 그림 4에 나타내었다. 그림 5와 6은 모델 1과 2에서 회전자 유도전류의 일부 나타낸 것이다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 자기벡터포텐셜과 전기스칼라포텐셜을 이용한 농형유도전동기의 3차원 해석을 통하여 단락환의 저항을 계산하는 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘으로 3차원 해석을 하여 단락환에서의 표피효과를 고려하였고, 해석대상의 두가지 모델에서 유도전류와 단락환의 설계치수에 따른 저항의 변화를 얻을 수 있었다. 각 모델에 대한 출력값의 비교는 표 1에 나타내었다.

제시된 알고리즘은 농형유도전동기의 설계·제작시 많은 도움을 줄 수 있다고 사료된다.

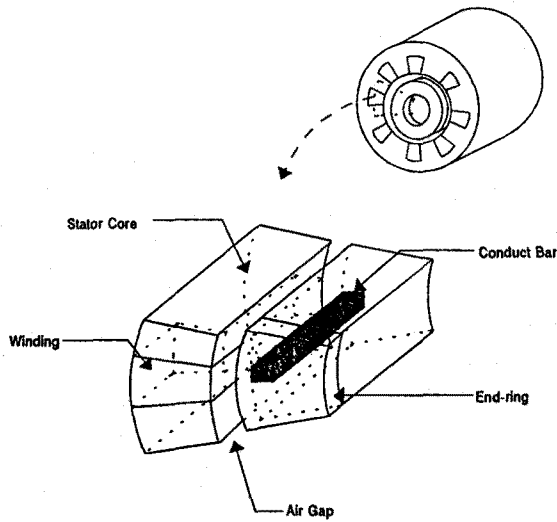


그림 1 해석모델의 구조도

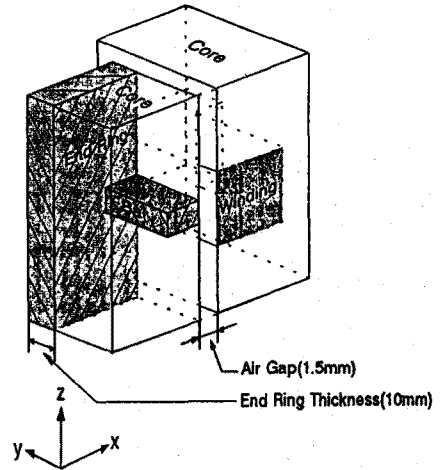


그림 2 농형유도전동기의 한 피치 모델

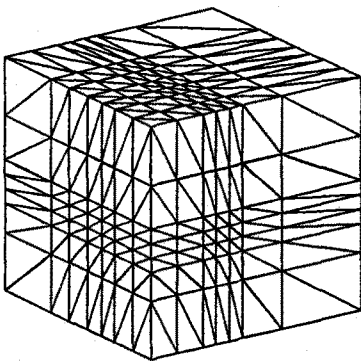


그림 3 모델 1의 요소분할도

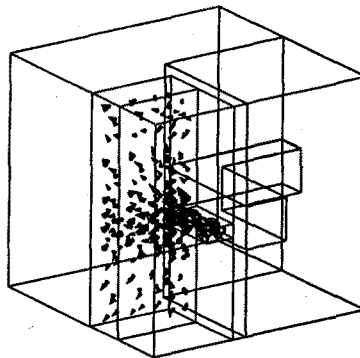


그림 4 모델 1의 유도전류 실부수

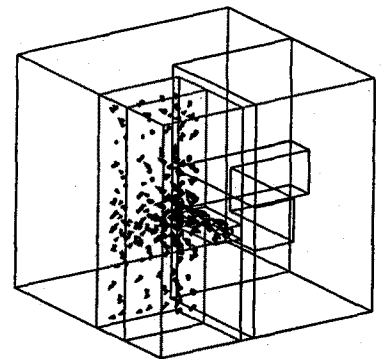


그림 5 모델 1의 유도전류 허수부

표 1 4가지 모델의 비교

모델	모델 1	모델 2	모델 3	모델 4
출력값				
최대자속밀도 [Wb/m <sup>2</sup> ](실부)	$4.152 \times 10^{-2}$	$5.471 \times 10^{-2}$	$5.75 \times 10^{-2}$	$6.59 \times 10^{-2}$
최대자속밀도 [Wb/m <sup>2</sup> ](허부)	$1.078 \times 10^{-2}$	$1.535 \times 10^{-2}$	$1.352 \times 10^{-2}$	$1.444 \times 10^{-2}$
최대유도전류 [A/m <sup>2</sup> ](실부)	$4.129 \times 10^{-5}$	$5.053 \times 10^{-5}$	$5.233 \times 10^{-5}$	$5.155 \times 10^{-5}$
최대유도전류 [A/m <sup>2</sup> ](허부)	$2.570 \times 10^{-5}$	$2.65 \times 10^{-2}$	$3.279 \times 10^{-2}$	$3.307 \times 10^{-2}$
단락환의 저항 [ $\mu \Omega$ ]	28.40637	36.26476	9.622455	1.198031

## 참 고 문 헌

- [1] 임달호, "전기계의 유한요소법", 동명사, 1987.
- [2] P.P.Silvester, "Finite element for electrical engineers", Cambridge Univ. Press, 1990.
- [3] 이준호, "3차원 유한요소법에 의한 Can Stack 형 PM 스택 모터의 자장해석", 석사학위논문, 단국대학교, 1994.
- [4] S.Williamson, "Calculation of the bar resistance and leakage reactance of cage rotors with closed slots", IEE Proc. Vol 132, Pt. B. No. 3. May 1985.
- [5] S.Williamson, "Calculation of the resistance of induction motor end rings", IEE Proc. Vol 133, Pt. B. No. 2. March 1986.