

전류가 흐르는 도체의 표면전하밀도 계산

이복용, 이준호**, 이기식**
 *대유공업전문대학, **단국대학교

Calculation of Surface Charge Density on Current Carrying Conductors

Bok-Yong Lee, Joon-Ho Lee**, Ki-Sik Lee**
 *Daeyeu Technical College, **Dankook University

Abstract - This paper deals with calculation of surface charge density on current carrying conductors by FEM. The proposed algorithm is formulated by equation of continuity in conductor region and maxwell's equations outside, respectively. Surface charge density is calculated by electric scalar potential and boundary condition for electrostatic fields.

1. 서 론

산업 발전과 더불어 높은 전력의 수요가 요구되는 시점에서, 전력계통 기구들의 개발, 전력 관리 기술의 발달은 전압의 고압화를 부추기고 있다. 초고압 변압기의 경우 신뢰성 향상이 더욱 중요한 기술로 다루어 지야 하고 이를 위해서는 정확한 분포정수회로의 해석이 뒷받침되어야 한다. 더욱이 송전선의 단락 사고에 의하여 써지전류가 발생할 경우 등의 과도 현상 해석시 모든 권선 사이의 정전 용량이 정확히 계산되어야 한다[1].

본 연구에서는 변압기 권선간의 정전용량을 계산하기 위한 과정으로서 전류가 흐르는 도체의 전하밀도를 유한요소법을 이용하여 계산하였다. 먼저 해석 영역을 도체 부분과 도체가 아닌 부분으로 나누어서 도체 부분에는 전류의 연속방정식을, 도체가 아닌 부분에는 정전장의 맥스웰 방정식을 이용하여 포텐셜을 구하였다. 다음으로 정전장의 경계조건으로부터 도체표면의 전하밀도를 계산하였다.

해석 모델로서 여러 가지 형태의 도체를 선정하여 이것이 공기 중에 놓여 있을 때, 도체에 전류가 흐르는 상태에서 전 영역에서 포텐셜을 구한 다음 이것으로부터 도체표면의 전하밀도를 계산하였다.

2. 해석 이론

본 장에서는 맥스웰 방정식과 전류의 연속방정식으로부터 도체표면의 전하밀도를 계산하기 위한 유한요소법을 도출하는 과정을 기술하였다. 먼저 도체 내부를 해석하기 위한 유한요소법과 도체 외부를 해석하기 위한 유한요소법을 도출하고, 다음으로 도체의 경계에서 이를 결합하여 전체 영역을 해석하는 알고리즘을 설명하였다. 그리고 마지막 절에서는 유한요소법으로 구한 포텐셜로부터 도체표면의 전하밀도를 구하는 방법을 기술하였다.

2.1 도체 외부의 유한요소법

시간적으로 계의 변화가 없는 맥스웰 방정식과 보조 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3)$$

여기서, \vec{E} : 전계의 세기 [V/m]

\vec{D} : 전속밀도 [C/m²]

ρ : 전하밀도 [C/m³]

ϵ : 유전율 [F/m]

전기 스칼라 포텐셜 V [V]를 식 (4)와 같이 정의하면, 식 (1), (2), (3) 그리고 (4)로 부터 식 (5)와 같은 정전장의 지배방정식을 도출할 수 있다.

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (4)$$

$$\nabla^2 (\epsilon V) = -\rho \quad (5)$$

계의 모든 양은 z축 방향으로 변화가 없는 2차원 문제로 하고, 식 (5)에 Gerlekin법을 적용하면 다음과 같다.

$$\iint \epsilon \left(\frac{N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy + \iint \rho N_i dx dy = 0 \quad (6)$$

2.2 도체 내부의 유한요소법

전하의 축적을 무시한 전류의 연속방정식과 전계의 세기와 전류밀도의 관계식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (7)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (8)$$

여기서 σ [Ω/m] 는 도전율이다. 식 (4), (7) 그리고 (8)로 부터 다음과 같은 도체내부의 지배방정식을 얻을 수 있다.

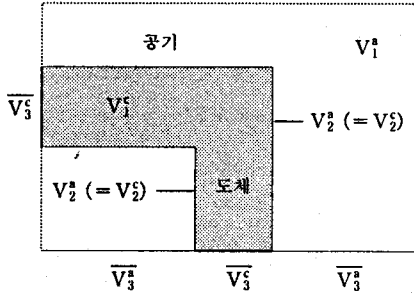
$$\nabla^2 (\sigma V) = 0 \quad (9)$$

식 (9)와 같은 미분 방정식을 풀기 위하여 Gerlekin법을 적용하면 다음과 같다.

$$\iint \sigma \left(\frac{N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{N_i}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (10)$$

2.3 도체 내부와 외부에서 유한요소법의 결합

그림 1과 같이 공기중에 도체가 놓여 있을 때를 고려하자. 이때 도체 내부에는 전류가 흐르는 상태이며, 도체 내부에서 보았을 때 도체의 표면에서는 법선 방향으로 포텐셜의 변화가 없다고 가정하였다.



- V_1^a : 공기 부분의 포텐셜,
- V_1^c : 도체 내부의 포텐셜,
- $V_2^a (= V_2^c)$: 공기와 도체 경계의 포텐셜,
- \overline{V}_3^a : 공기 부분의 Dirichlet 경계조건,
- \overline{V}_3^c : 도체 내부의 Dirichlet 경계조건

그림 1 공기와 도체를 결합하는 유한요소 모델

도체 내부의 계 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^c & S_{12}^c & S_{13}^c \\ S_{21}^c & S_{22}^c & S_{23}^c \\ S_{31}^c & S_{32}^c & S_{33}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^c \\ V_2^c \\ \overline{V}_3^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서 \overline{V}_3^c 는 아는 값이므로 다음과 같이 간소화 할 수 있다.

$$S_{11}^c V_1^c + S_{12}^c V_2^c = -S_{13}^c \overline{V}_3^c \quad (12)$$

$$S_{21}^c V_1^c + S_{22}^c V_2^c = -S_{23}^c \overline{V}_3^c \quad (13)$$

또한 공기 중에서의 계 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^a & S_{12}^a & S_{13}^a \\ S_{21}^a & S_{22}^a & S_{23}^a \\ S_{31}^a & S_{32}^a & S_{33}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^a \\ V_2^a \\ \overline{V}_3^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 F 는 구동벡터이다. 이때에도 \overline{V}_3^a 는 아는 값이므로 다음과 같이 간소화 할 수 있다.

$$S_{11}^a V_1^a + S_{12}^a V_2^a = F_1 - S_{13}^a \overline{V}_3^a \quad (15)$$

$$S_{21}^a V_1^a + S_{22}^a V_2^a = F_2 - S_{23}^a \overline{V}_3^a \quad (16)$$

그런데 $V_2^a = V_2^c$ 이므로 V_2^a 를 도체 내부에서 계산된 V_2^c 로 치환하면 식 (16)을 소거할 수 있게 된다. 그러므로 식 (13)과 식 (14)와 식 (15)로부터 다음과 같은 도체와 공기가 결합된 영역에서의 계 행렬식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^c & S_{12}^c & 0 \\ S_{21}^c & S_{22}^c & 0 \\ 0 & S_{12}^a & S_{11}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^c \\ V_2^c \\ V_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{13}^c \overline{V}_3^c \\ -S_{23}^c \overline{V}_3^c \\ F_1 - S_{13}^a \overline{V}_3^a \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.4 전하밀도 계산

전기장에서 두 매질 사이의 전속밀도에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (18)$$

여기서 D_{1n} 과 D_{2n} 은 각 매질의 경계에서 전속밀도의 법선 성분을 의미하며, ρ_s [C/m^2]는 표면전하밀도이다. 도체 내부에서는 전계의 세기가 없으므로 식 (18)로부터 다음과 같이 표면전하밀도를 계산할 수 있다.

$$\rho_s = \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \quad (19)$$

실제로 유한요소법으로 구한 포텐셜로 전하밀도를 계산할 때에는 도체 표면을 따라 도체 외부에 있는 요소를 찾아 그 요소의 전계의 세기를 구한 다음, 여기에 단위 벡터 성분을 취하여 ϵ 을 곱하면 된다.

3. 적용사례

본 논문에서 제시한 방법으로 전류가 흐르는 도체의 전하밀도를 계산하기 위하여 다음과 같이 두 가지 모델을 설정하였다.

모델 1은 십자 모양의 도체를 고려한 것이다. 대칭성을 이용하여 전체의 1/4을 유한요소해석 하였다. 경계조건으로 도체 왼쪽 부분에 1 [V]을 인가하였고 오른쪽 경계면은 전체 해석 모델의 중앙이므로 0 [V]를 주었다. 인가한 전압과 도체에 흐르는 전류는 선형의 관계가 있고 이를 계산하면 전류밀도는 8.8×10^6 [A/m]이다. 모델 2는 그자 모양의 도체를 고려한 것으로 상하 대칭 구조를 이용하여 전체의 1/2를 해석하였다. 경계조건으로 왼쪽 도체에는 1 [V]를 인가하였고 밑면의 경계에는 0 [V]를 주었다. 모델 2에서 전류밀도는 3.2×10^6 [A/m]로 계산되었다.

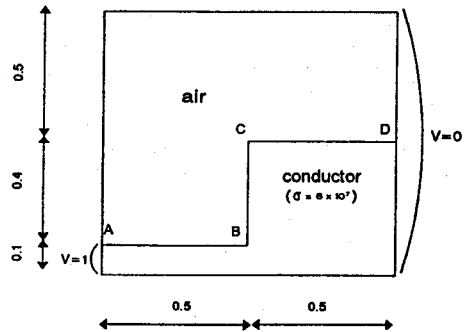


그림 2 모델 1의 구성도

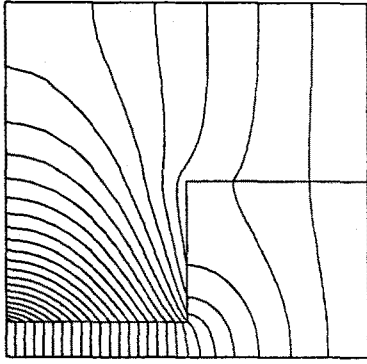


그림 3 모델 1의 등전위선

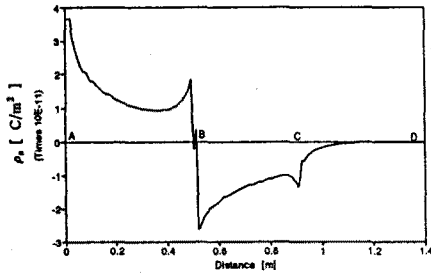
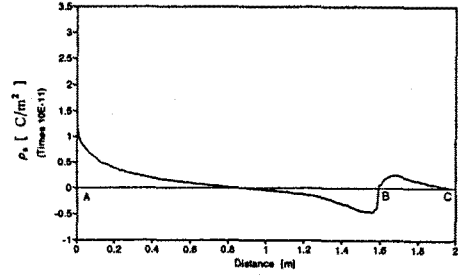
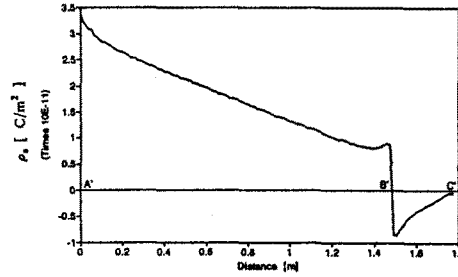


그림 4 모델 1에서 도체표면의 전하밀도



(a) 도체의 윗 부분



(b) 도체의 아래 부분

그림 7 모델 2에서 도체표면의 전하밀도

4. 결 과

맥스웰 방정식과 전류의 연속 방정식으로부터 전류가 흐르는 도체의 표면전하밀도를 계산하는 유한요소해석 알고리즘을 제시하였다. 제시한 방법을 두 가지 도체 모델에 적용하여 전하밀도를 계산하였다. 도체가 굴곡을 가지는 부분에서 전하밀도의 변화가 심하게 나타나고 도체가 유선형일 때는 전하밀도의 변화가 전 부분에서 비교적 완만한 것을 알 수 있었다.

앞으로 계속 진행 되어야 할 연구 과제는 변압기 권선간의 정전용량의 계산이다. 이것은 본 논문에서 제시한 방법으로 변압기 각 권선간의 전하를 구하고 이를 바탕으로 변압기 권선간의 정전용량을 계산할 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] L. F. Blume, A. boyajian, G. Gamilli, T. C. Lennox, S. Minneci, V. M. Monstinger, "Transformer Engineering", John Wiley, 1983.
- [2] Z. Azzouz, A. Foggia, L. pierrat, G. Meunier, "3D Finite Element Computation of the High Frequency Parameter of Power Transformer Windings", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No.2, pp. 1407-1410, March 1993.
- [3] F. de Leon and A. Semlyen, "Efficient Calculation of Elementary Parameters of Transformers", IEEE Transactions on Power Dev., Vol. 7, No. 1, pp. 376-383, January 1992.

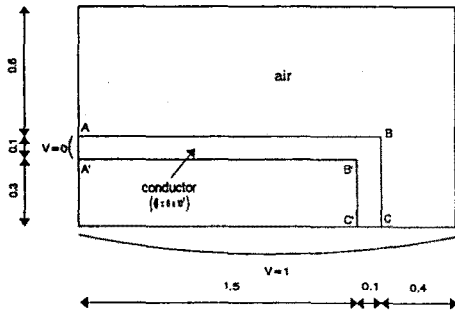


그림 5 모델 2의 구성도

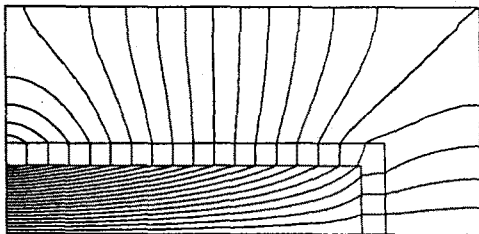


그림 6 모델 2의 등전위선