'95 대한전기학회 하계학술대회 논문집(1995. 7. 20~22)

고정자 슬롯과 회전자 슬롯의 상호작용에 의한 공간 고조파

이 은웅*, 조현길*, 김종겸**, 정종호***, 김일중****
충남대학교*, 수자원공사**, 청담중학교***, 주성전문대학****

Space Harmonic Field by Interaction of Stator and Rotor Slots

Lee Eun-Woong, Cho Hyun-Gil, Kim Jong-Gyeum, Jeong Jong-Ho, Kim Il-Jung
Chung Nam Univ, KOWACO, Cheong Dam middle school, Ju Soung Junior College

Abstract

This paper describes the flux density in air gap, harmonic torques occurring by inadequate slot combination of induction motor using the fourier series. The analysis uses DFT(Discrete Fourier transform) to analyze harmonic orders of flux density. It is certified that the harmonic flux density has the same result using Fourier series and FEM

1. 서론

유도 전동기에는 동기토오크와 비동기 토오크, 가청주파수의 분포력이 존재한다. 유도 전동기의 기하학적인 슬롯의 조합과 슬롯의 형상에 따라 진동 소음 및 고조파 토오크가 감소되고 인버터 전원공급에 의한 부수적인 손실도 감소될 수 있다.[1] 따라서, 이와 같은 고조파의 영향을 해석하기 위해서 고정자와 회전자의 슬롯 조합을 고려하여 공극 자속밀도를 해석해서 그로 인한 고조파를 토오크를 계산하여 부적절한 슬롯의 수를 들고 유한요소법을 이용하여 공극의 자속밀도를 해석하였다. 그리고, 유한요소법으로 얻은 공극의 자속성분을 이산퓨리에 변환(DFT : Discrete Fourier Transform)을 적용하여 공간 고조파를 분석하였다.

2. 슬롯에 의한 자계의 분포

2.1 고정자에 슬롯을 가진 경우

z_1의 슬롯을 가진 유도전동기는 권선의 배치에 의한 계단 고조파 뿐만 아니라 슬롯에 의한 슬롯고조파가 존재하게 된다. 슬롯에 의한 고조파는 계단 고조파를 평균치로하고 이를 중심으로하여 맥동하게 된다. 슬롯의 중심을 좌표계의 원점으로 하면 공극의 콘덕턴스 $\lambda(\alpha)$는 식(1)와 같다.

$$\lambda(\alpha)=f(\alpha)=\frac{1}{\delta(\alpha)} \tag{1}$$

여기서 α는 슬롯의 중심으로부터의 거리이고 $f(\alpha)$는 콘덕턴스의 근사함수이다.

기하학적인 공극의 길이는 δ일때 슬롯의 중심에서 자속밀도가 감소하여 한 슬롯 피치에서 평균자속밀도는 감소하여 등가적으로 공극의 길이가 증가하는 것과 같다. 기하학적인 공극의 길이에 대하여 등가적인 공극의 증가 $\Delta(\alpha)$는 식(2)와 같다.

$$\Delta(\alpha)=\delta(\alpha)-\delta=\frac{1}{f(\alpha)}-\delta \tag{2}$$

식(1)에 의하여 유도전동기의 공극 콘덕턴스 근사함수는 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{\delta}-g(\alpha) \\ &= \frac{1}{\delta}[\ 1-\beta(1-\cos z(\alpha))] \end{aligned} \tag{3}$$

β는 o/δ로 구성되는 $(1+m^2-2m)/2(1+m^2)$으로 퍼미언스를 적분한 간략화 수식이다.($m=o/2\delta+\sqrt{1+(o/2\delta)^2}$)

여기서 $g(\alpha)$는 슬롯 개방에 따른 자속밀도의 변화 비를 나타내며 β_s, β_r은 고정자와 회전자를 나타낸다.

$$g_s(\alpha)=(\beta_1/\delta)\times[\ 1-\cos z_1(\alpha)]$$
$$g_r(\alpha-\alpha_r)=(\beta_2/\delta)\times[\ 1-\cos z_2(\alpha-\alpha_r)]$$

고정자와 회전자슬롯의 간섭에 의한 공극의 콘덕턴스는 식(4)와 같다.

$$\lambda_{s,r}(\alpha)=\delta\lambda_s(\alpha)\lambda_r(\alpha-\alpha_r) \tag{4}$$

식(1), 식(3)을 식(4)에 대입하여 퓨리에 급수로 전개한 공극의 콘덕턴스는 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_{s,r}(\alpha)= \frac{1}{\delta}\Big\{ & \frac{1}{k_{cs}k_{cr}}-\frac{a_1}{k_{cr}}\cos z_1\alpha+\frac{b_1}{k_{cs}}\cos z_2\alpha \\ & +\frac{a_1b_1}{2}[\ \cos((z_1+z_2)\alpha-z_2\alpha_r)+\cos((z_1-z_2)\alpha+z_2\alpha_r] \end{aligned} \tag{5}$$

공극의 합성콘덕턴스는 고정자와 회전자 슬롯에 대응하고 고조파의 합과 차를 포함한다.

고정자 권선은 q의 매상 매극당 슬롯수를 가진다. 평활한 회전자의 임의의 점에서 공극내의 자속밀도는 식(6)과 같다.

$$B(\alpha,t)=\mu H(\alpha,t)=\mu F_s(\alpha,t)\lambda(\alpha) \tag{6}$$

원래의 좌표($\alpha=0$)는 $t=\pi/2\omega$의 순시에서 최대전류 $I\sqrt{2}$가 흐르는 그 사이의 축에 놓인다. 전절권이든 단절권이든 또는 2층권이든 단층권이든 짝수 슬롯을 가지면 상축($\alpha=0$)은 치의 중앙을 통과하게 되지만 홀수의 슬롯을 가지면 상축($\alpha=0$)은 슬롯의 중앙을 지나게 된다.

짝수의 슬롯을 가지는 경우에 $\nu=\nu' p$차 고정자의 계단 고조파 기자력을 $F_{\nu' p}\sin(\omega t\mp\nu' p\alpha)$라고 하면 공극의 자속밀도는 식(7)과 같다.

$$B(\alpha,t)=\mu_0 F_{\nu' p}\sin(\omega t\mp\nu' p\alpha)\lambda_1(\alpha) \tag{7}$$

공극의 콘덕턴스 $\lambda_1(\alpha)$는 슬롯의 중앙을 좌표계의 중심으로하는

좌표계를 형성하고 있다. 계단 고조파 기자력은 치의 중심을 좌표계의 원점으로 하고 있으므로 슬롯 좌표계를 기자력 좌표계 시스템으로 변환은 식(8)과 같다.

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{z_1} \tag{8}$$

공극의 자속밀도 $B_\nu(\alpha, t)$는 계단 고조파와 슬롯 고조파를 퓨리에 급수로 전개하여 정리하면 식(9)와 같다.

$$\begin{aligned} B_\nu(\alpha, t) = \mu_0[& F_{\nu' p}\alpha_0 \sin(\omega t \mp \nu' p\alpha) \\ & - \frac{F_{\nu' p}}{2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_{\mu_1}(-1)^{\mu_1}\{\sin[\ \omega t + (\nu' p \mp \mu_1 z_1)\alpha] \\ & + \sin[\ \omega t - (\nu' p \pm \mu_1 z_1)]\ \alpha)\} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 μ_1: 고정자 슬롯 고조파 차수

μ_0: 공극의 투자율

2.2 회전자에 슬롯을 가진 경우

평활한 고정자의 계단 고조파만이 있고 슬롯을 가진 회전자가 각속도 ω_r로 회전할때 공극의 자속밀도 $B_\nu(\alpha, t)$는 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} B_\nu\ (\alpha, t) = \mu_0[& F_{\nu' p}\sin(\omega t \pm \nu' p\alpha) \\ & - \frac{F_{\nu' p}}{2} \sum_{\mu_2=1}^{\mu=\infty}\{\sin[\ (\omega - \mu z_2\omega_r)t + (\mu z_2 \mp \nu' p)\alpha] \\ & + \sin[\ (\omega + \mu z_2\omega_r)t - (\mu z_2 \pm \nu' p)\alpha]\ \}] \end{aligned} \tag{10}$$

이 경우 고정자 $\nu = \nu' p$ 차의 기자력은 $\pm\frac{(\omega + \mu_2 z_2\omega_r)}{(\mu_2 z_2 \pm \nu' p)}$의 각속도로 $(\mu_2 z_2 \pm \nu' p)$극의 쌍극수를 가지고 표류하는 회전기자력의 군을 발생한다.

2.3 양쪽면에 슬롯을 가진 경우

고정자와 회전자 슬롯의 간섭이 나타나는 경우 식(9)와 식(10)의 첫번째 세개의 항만을 고려하면 자속밀도 $B(\alpha, t)$는 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned} B_\nu(\alpha, t) = \mu_0[& a_0' F_{\nu' p}\sin(\omega t \pm \nu' p\alpha) \\ & - \frac{a_1' F_{\nu' p}}{2}\{\sin[\ \omega t + (z_1 \mp \nu' p)\alpha] + \sin[\ \omega t \mp (z_1 \mp \nu' p)\alpha]\ \} \\ & - \frac{b_1' F_{\nu' p}}{2}\{\sin[\ (\omega - z_2\omega_r)t + (z_2 \mp \nu' p)\alpha] \\ & + \sin[\ (\omega + z_2\omega_r)t - (z_2 \pm \nu' p)\alpha]\ \}] \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 a_0', a_1', b_1'는 카터계수에 의하면 $a'_0 = \frac{1}{\delta k_{c1} k_{c2}}$, $a'_1 = \frac{a_1}{\delta k_{c2}}$, $b'_1 = \frac{b_1}{\delta k_{c1}}$ 와 같다.

고정자의 권선에 의하여 공극에 발생한 고조파의 기본파 각속도 ω 인 자계가 고정자에 슬롯이 존재하는 계의 각속도는 식(12)와 같다.

$$\omega_1 = \pm\frac{\omega}{z_1 \pm \nu' p} \tag{12}$$

식(12)에 대응하는 고정자 $\nu' p$차 고조파 기자력의 슬롯을 가지는 회전자가 각속도 ω_r로 회전하면 공극 고조파의 각속도 ω_2는 식(13)과 같다.

$$\omega_2 = \frac{\omega - z_2\omega_r}{z_2 \mp \nu' p} \tag{13}$$

회전자가 ω_r로 회전하고 공극 고조파가 각속도 ω_2로 이동하고 있을 때 회전자가 느끼는 계의 상대 각속도 ω_{rel}는 식(14)와 같다.

$$\omega_{rel} = \omega_2 - \omega_r = \frac{\omega \mp \nu' p\omega_r}{z_2 \mp \nu' p} \tag{14}$$

$\nu = \nu' p$차의 고정자의 기자력 고조파에 의하여 발생된 고조파와 회전자의 슬롯 계의 상대속도가 '0'이 되는 회전자 속도는 식(15)에서 같게 된다.

$$\omega_r = \frac{\omega}{\nu' p} \tag{15}$$

이때 공극의 자계 $\nu = \nu' p$차의 고조파와 각속도 ω_r로 회전하는 회전자가 동기가 된다. 공극의 고조파는 고정자의 슬롯수와 극수의 합으로 $\nu' p = z_1 + p$의 쌍극을 가진다. 공극의 고조파에 동기가 되는 회전자의 각속도 $\omega_r = \frac{\omega}{z_1 + p}$이 된다. 이 속도에서 비동기토오크는 '0'이 된다.

$\omega_r < \frac{\omega}{z_1 + p}$ 이면 비동기토오크는 주토오크와 일치하는 방향으로 진행하지만 $\omega_r > \frac{\omega}{z_1 + p}$이면 비동기토오크는 주토오크에 반대방향으로 진행한다. $\nu = z_1 \pm p$의 쌍극을 가진 고정자 계단 고조파가 z_2의 도체에 전류를 유기시킨다면 2차 도체의 상호작용은 $\mu = z_2 - \nu = z_2 - (z_1 \pm p)$차 고조파가 커진다.

3. 고정자와 회전자 토오크에 관한 유도

가상 변위원리에 의하여 고정자와 회전자 사이에 변위 Δ로 인해 발생하는 토오크 M은 식(16)과 같다.

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \Delta} \tag{16}$$

식(16)에서 토오크는 공극의 자속밀도의 자승을 공극의 길이와 공극의 둘레를 적분할 경우 식(17)과 같다.

$$M = -\frac{\delta}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial \Delta}\int_0^{2\pi}[\ B(\alpha, t)]^2 d\alpha \tag{17}$$

고정자의 계단 고조파 기자력 $F_1(\alpha, t)$와 회전자의 계단 고조파 기자력 $F_2(\alpha, t)$를 합성하면 공극의 고조파 기자력은 $F(\alpha, t) = F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, t)$와 같이 된다. 이를 공극의 기자력으로 하여 토오크를 보면 식(18)과 같다.

$$M = -\frac{l\mu_0}{2\delta}\frac{\partial}{\partial \Delta}\int_0^{2\pi}[\ F_1(\alpha, t) + F_2(\alpha, t)]^2 d\alpha \tag{18}$$

고정자 고조파 차수 $\nu = Q$인 경우에 회전자의 고조파 차수 $\mu = Q$가 발생한다고 하면 고정자와 회전자의 상호작용으로 고조파 동기토오크가 발생하게 된다. 고정자 기자력인 식(18)을 고정자와 회전자의 슬롯을 고려하여 퓨리에 급수로 정리하면 토오크는 식(19)과 같다.

$$\begin{aligned} M = -\frac{\mu_0 l}{\delta}\int_0^{2\pi} F_{m\nu}\sin\ & (Q\alpha \mp \omega t)\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B'_{m\nu}\cos[\ Q(\alpha - \omega_r t) \\ & \mp (\pm\omega - \nu\omega_r)t - \phi]\ d\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

여기서 ϕ는 고정자와 회전자 전류의 위상차이다.

식(19)를 적분하고 모든 Q에 대하여 급수의 합을 취하면 식(20)과 같다.

$$M = M_Q\sum_Q\sum_\nu \sin\{[\ Q\omega_r \pm (\pm\omega - \nu\omega_r) \mp \omega]\ t - \phi\} \tag{20}$$

식(20)의 토오크는 정현적으로 변화하므로 평균값은 '0'이 된다. 식(20)의 우변의 대괄호 안에 시간과 관련된 항이 '0'이 되면 토오크는 시간에 대하여 독립함수로서 식(21)과 같다.

$$Q\omega_r \pm (\pm\omega - \nu\omega_r) \mp \omega = 0 \tag{21}$$

식(21)은 ① $Q=\nu$인 경우와 ② $Q\neq\nu$인 경우에 성립한다. 따라서 회전자의 속도는 식(22)이 된다.

$$\omega_r = \pm\frac{2\omega}{Q\mp\nu} \tag{22}$$

식(22)에서 $Q\mp\nu=cz_2$ 가 성립한다면 회전자의 속도는 식(23)과 같다.

$$\omega_r = \frac{2\omega}{cz_2} \tag{23}$$

식(22)을 만족하는 슬롯의 조합은 합성 동기토오크를 발생하게 하는 원인이 된다. 고정자와 회전자슬롯간의 변위 $\Delta\alpha$와 고조파 차수의 관계는 식(24)와 같다.

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{Q-\nu} = \frac{2\pi}{cz_2} = \frac{t_2}{c} \tag{24}$$

여기서 t_2는 회전자 슬롯의 피치이다. 회전자의 기자력이 고정자의 고조파 기자력과 같은 쌍극수를 가진다면 z_2의 도체봉에 p쌍극을 가진 계단 일고조파(working harmonic)의 영향으로 만들어지는 동기토오크는 식(24)와 같은 조건에서 성립한다.

$$c_1z_1\pm p = c_2z_2\pm p \tag{25}$$

그리고 c_1과 c_2가 1이면 식(25)은 식(26)과 같다.

$$|z_1-z_2| = 2p \tag{26}$$

식(26)이 성립하는 고정자와 회전자의 슬롯의 조합에서는 동기토오크가 발생한다. 유도전동기의 전체의 공극 둘레에서 고정자의 ν차 계단고조파는 식(27)과 같다.

$$\sin(\nu p\alpha\mp\omega t) \tag{27}$$

식(27)과 같은 계단고조파가 공극에 존재하면 공극 콘덕턴스는 전류의 방향과 관련이 없으므로 2배의 주파수로 맥동하는 파가 된다. 식(10)에서 슬롯고조파가 가장 크게 되는 1차와 계단 고조파의 p차만을 고려하면 회전자의 기자력은 $\mu=z_2\pm p$ 차가 되고 계단 고조파와 공극 콘덕턴스에 의한 맥동토오크 성분은 식(28)과 같다.

$$\begin{aligned}\sin[(z_2\pm p)-(\omega\pm z_2\omega_r)t]\ \sin 2(p\alpha-\omega t)\\ = \pm\frac{1}{2}\cos[(z_2\mp p)\alpha\pm(\omega\mp z_2\omega_r)t]\\ \mp\frac{1}{2}\cos[(z_2\pm 3p)\alpha\mp(3\omega\pm z_2\omega_r)t]\end{aligned} \tag{28}$$

3상 유도 전동기의 권선 전류에 의해 발생하는 계단고조파는 $\nu=6c\pm1$ 이고, 회전자의 고조파 차수와 같은 차수이면 동기토오크가 발생한다. 식(28)의 우변 첫번째항은 회전자에 의한 고조파와 동일한 차수가 되고 두번째항의 공간 고조파가 고정자의 계단 고조파와 차수가 같으면 식(29)은 조건이 성립하여야 한다.

$$z_2\pm 3p = (6c\mp1)p \tag{29}$$

식(29)가 성립하면 식(27)과 식(28)의 시간항이 식(30)과 같다.

$$\mp(3\omega\pm z_2\omega_r) = \pm\omega \tag{30}$$

식(30)에 의하면 회전자의 각속도는 식(31)과 같이 회전자의 슬롯수로 전기각 속도를 나눈 값의 4배가 되는 속도에서 동기토오크가 존재하게 된다.

$$\omega_r = \pm 4\frac{\omega}{z_2} \tag{31}$$

식(28)의 우변 제2항의 공간 고조파항과 고정자의 슬롯의 고조파의 차수가 같아지면 식(31)을 확장하여 식 (32)와 같이 표현할수 있다.

$$\omega_r = \pm\frac{2c_1\omega}{c_2z_2} \tag{32}$$

식(32)를 성립하는 슬롯의 조합 $z_2\mp6pq\pm2p$ 로 하여야 한다.

슬롯 수의 조합이 $z_1=z_2$ 일 경우 고정자의 $z_1\pm p$차 계단 고조파, 회전자의 $z_2\pm p$차 계단고조파가 크게 나타나며 이 고정자와 회전자 고조파의 간섭은 기동시에 동기토오크를 발생한다.

고정자의 $(6c_1\pm1)$차 계단고조파에 의해 회전자에 발생하는 고조파는 식(29)와 같이 $z_2=6c_2p$를 갖는 슬롯 수의 조합은 부적절하다. 유도전동기에서 매상 매극당의 슬롯 수가 정수 슬롯수를 가지고 회전자가 $z_2=2g+1$의 홀수 슬롯을 가진다면 z_1과 z_2 사이에는 공통 인수가 존재하지 않으나 소음과 진동을 일으키는 원인이 된다.(g=정수)

4. 유한요소법에 의한 해석

유한요소법은 요소의 세분이 자유로워 계의 포텐셜이 급변하는 곳에서 정밀해석이 가능하고 경계조건의 설정이 용이하여 유도전동기의 해석에 이용된다. 2차원 유한요소해석에서 전동기는 z 방향으로 무한히 연장되어 있고 전류밀도 분포는 J_z만 존재한다. 해석을 위한 기본 방정식은 맥스웰의 전자방정식에서 식(33)과 같다.[3]

$$\nabla\times\overline{B} = -\nabla\times\nabla\times A_z = -J_z \tag{33}$$

공기에 비하여 철심의 투자율이 상당히 크므로 고정자의 외곽 경계에는 고정 경계조건 $A=0$를 적용한다. 경계조건 식(34)를 적용한다.

$$\nabla\cdot B = 0 \tag{34}$$

이상을 적용하여 해석영역에서 해를 구하고 식(35)를 적용하여 자속밀도를 구하였다.

$$\nabla\times A = B \tag{35}$$

식(35)를 적용하여 공극의 중앙에서 이산적인 자속밀도를 구하였다. 그리고 시간함수의 크기와 주파수를 구하는 이산퓨리에 변환[3]을 식(36)과 같이 적용하여 임의의 시간에서 공간적으로 분포하는 고조파의 크기와 차수를 구하였다.

$$H(\nu) = \sum_{\alpha=0}^{N-1} h(\alpha)e^{-j2\pi\nu\alpha/N} \tag{36}$$

5. 해석 모델과 결과

해석모델은 표1과 같고, 퓨리에 급수 전개로 얻은 식(11)에 의하여 $z_1\pm p$인 공간고조파 17차와 19차 고조파가 계단고조파와 슬롯에 의하여 발생하고 회전자에 의하여 $c_2z_2\pm p$차 고조파가 발생한다. 유한요소법으로 해석하는 영역을 4588절점으로 하고 공극에서 data를 1024개를 얻어 충분히 얻었다. 그리고 일반적으로 시간 영역과 주파수영역을 해석하는 이산퓨리에 변환을 임의의 시간에 적용하여 공간 고조파를 해석하였다. 선정한 모델에 퓨리에 급수로 전개하여 고정자 슬롯과 계단 고조파의 간섭으로 얻은 17차 고조파는 p고조파 크기의 0.084이고 유한요소법에 이산퓨리에 급수를 전개한 결과는 그림1에서 0.11정도 두양은 근사하게 얻어졌고 19차 고조파는 퓨리에 급수에 의하여 0.13정도로 얻어 유한요소법에 의한 양은 0.12정도로 얻어졌다.

6. 결론

공극의 자속밀도를 퓨리에 급수를 전개하여 계단 고조파와 슬롯의 간섭을 고려하고 고정자와 회전자를 분리하여 고조파를 계산하고 다시 합성하여 분석하였다. 그리고, 슬롯의 조합에 따라 다르게 발생하는 고조파의 영향을 분석하여 고조파 토오크를 발생하는 슬롯의 조합을 구하므로서 부적절한 슬롯의 조합을 구분하였고, 퓨리에의 급수로 복잡한 식을 전개하였으나 유한요소법을 해석영역에 적용하여 자속밀도를 구하고 이산퓨리에 변환을 적용하여 공간 고조파를 해석하는 새로운 알고리즘을 시도하여 타당성을 조사하였다.

표 1 해석모델

구분	해석모델
고정자 슬롯수	18
회전자 슬롯수	16, 18
공극의 길이	0.5[mm]
고정자 슬롯	개방 슬롯 ($o/t_d=0.5$)
회전자 슬롯	반폐형 슬롯 ($o/t_d=0.2$)
고정자의 내부 반경	49[mm]

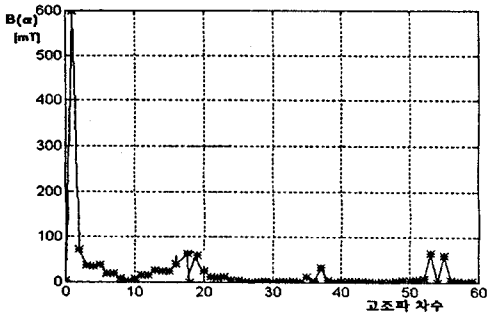

그림1. 고정자의 회전자 슬롯이 18인 경우

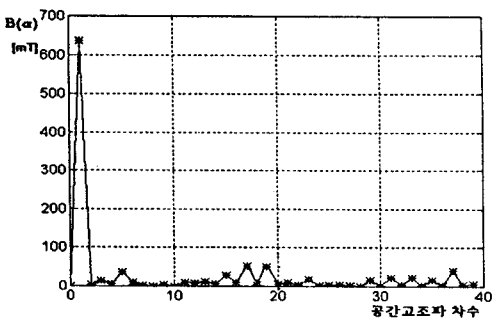

그림 2. 고정자 슬롯 18 회전자 슬롯 22

참 고 문 헌

[1] Paul W. Franklin, Advanced Theory and Design of Rotating Electrical Machinery, The College of Engineering the University of Missouri-Columbia, pp.87-92, 1986.

[2] 이은웅, 이상호, " 농형유도전동기의 자기적 진동 분포력", 충남대학교 산업기술연구소 논문집, Vol. 3, No. 2, 1988, pp 96-104

[3] E. Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform and its Applications" Prentice-hall Editions, pp.121-128, 1988.