

## 표면에 도전율을 갖는 유전체 해석모델의 전계계산에 관한 연구

김형석\*, 이기식\*\*, 한송엽\*\*\*

\* 순천향대학교 전기공학과, \*\* 단국대학교 전기공학과, \*\*\* 서울대학교 전기공학과

## A study on electric field computation of dielectric analysis model with the conductivity on its surface

Hycong-Scok Kim\*, Ki-Sik Lee\*\*, Song-Yop Hahn\*\*\*

\*Dept. of Elec. Eng. Soonchunhyang Univ., \*\*Dept. of Elec. Eng. Dankook Univ., \*\*\* Dept. of Elec. Eng. Seoul Nat'l Univ.

**Abstract** - In this paper, we study the computation of the electric field of dielectric analysis models with the conductivity on its surface. The finite element formulation describes a sinusoidal electrodynamic field computation. One term is added to this functional in order to take the conductivity on its surface into accounts. The electric field computations of the dielectric analysis model are done first with the surface conductivity and second with the volume conductivity. Also, it is shown that a surface conductor with sufficiently large conductivity can be substituted with a floating equipotential line. This method is applied to an insulator in arbitrary shape with the conductivity on its surface.

## 1. 서 론

유한 요소법의 이론은 이미 널리 알려져 있으나, 이 방법을 실제 문제에 적용하는데 있어서는 여러가지 어려움이 있다. 즉, 유한 요소법을 이용하여 해를 구하고자 할 때 인간의 노력을 가장 많이 요구하는 부분이 바로 요소 분할 자료를 만드는 일이다. 이 초기입력 자료를 용이하게 만들 수 있는 초기 요소 분할 방법에 관한 많은 연구 논문이 발표되었다.[1] 이러한 방법만으로는 해석 모델의 해가 변화가 큰 부분을 효과적으로 분할하여 해의 정확도를 높이기 어려우므로 이를 고려한 적응 유한 요소법도 발표되었다.[2]~[4]

국내에서 송전전압이 상승됨에 따라 전력용 기기의 절연 설계에 대한 중요성이 증대됨에 따라, 이러한 수치기법에 의해 초고압 전력용 기기의 전계분포를 해석하여 절연 설계에 널리 사용되어지고 있으며, 설계 기술에 많은 도움이 이루어지고 있다. 그러나 초고압 송전선로의 해자 표면에 바람에 날린 영문이 누적되어 표면에 도전성을 갖게되는 경우에 생기는 문제, 절연제의 표면에 임의로 도전성을 주어 전계분포의 변화를 주어 전계강도가 한부분에 집중되는 것을 방지하고자 하는 경우와 같은 좀더 발전된 설계 기술 개발이 요구 되어지고 있는바, 본 논문에서는 표면에 도전율을 갖는 유전체 해석모델의 교류 전계계산방법을 다루었다.

## 2. 본 론

## 2.1 동전계 (electrodynamic field)

전압과 전하는 항상 계속해서 주고 받으므로 순수한 정전계는 존재하지 않는다. 그러나 도전성(electricity)이 모든 곳에서 영이라면, 정전 해석해는 정확하게 성립한다. 어떤 한 순간에서 전계  $\vec{E}$ 는 그 순간에 전압과 전하에 따른 정전 해석해에 의하여 얻어질 수 있다. 즉, 전계  $\vec{E}$ 는 인가전압에 따라 시간변화율에 의존하지 않는다. 그런데, 해석 대상의 도전율  $\sigma$ 가 고려영역에서 영이 아니라면 정전해석해는 정확도가 떨어진다. 즉,  $\epsilon/\sigma$ 이 전압의 변화주기보다 훨씬 크지 않다면 전계  $\vec{E}$ 는  $\sigma$ 에 의해 변한다. 그러한 경우 즉 동전계(electrodynamic)의 경우에는 전계  $\vec{E}$ 는 영역의 각 위치마다 다른 순간에 최대값이 된다.

## 2.2 기본 이론

전계  $\vec{E}$ 의 미분 방정식은 전류연속방정식

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1)$$

을 기초로 부터 얻어 낼 수 있다.

여기서,  $\vec{j}$ 는 전류밀도,  $\rho$ 는 채적전하밀도이고,  $t$ 는 시간이다. 전류밀도와 전계는 다음의 관계를 갖는다.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2)$$

여기서, 전속밀도는 아래식을 만족한다.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

(3)식을 (1)식에 대입하면 다음식과 같이 주어진다.

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) \quad (4)$$

그러므로

$$\nabla \cdot (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \quad (5)$$

(2)식과 오옴의 법칙

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (6)$$

를 이용하면

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E} + \frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t}) = 0 \quad (7)$$

을 얻을 수 있다.

전체  $\vec{E}$ 가 주파수  $f$ 인 각속도  $\omega = 2\pi f$ 를 갖는 경우 아래식과 같다.

$$\nabla \cdot (\sigma + i\omega\epsilon) \vec{E} = 0 \quad (8)$$

자속밀도가  $\vec{B}$ 로 표시되는 Faraday의 법칙

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9)$$

자기 백터 포텐셜  $\vec{A}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (10)$$

(9)식은 아래식과 같다.

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad (11)$$

그러므로 팔호안에 얹은 전기스칼라 포텐셜  $\phi$ 의 구배(gradient)로 나타낼 수 있다.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (12)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (13)$$

(13)식의 우변의 두번재항이 첫번째 항에 비해 충분히 작다고 가정하면

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (14)$$

이라고 나타낼 수 있다.

(14)식을 (8)식에 대입하면

$$\nabla \cdot (\sigma + i\omega\epsilon) \nabla \phi = 0 \quad (15)$$

이 된다. (15)식은 정현동전계(sinusoidal electro-dynamic fields)에 대한 미분 방정식이라 할 수 있다.

## 2.3. 유한요소 정식

식 (15)에 대한 범함수를 구하면 다음과 같다.

$$F = \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv + \frac{1}{i\omega} \int \sigma |\vec{E}|^2 dv - 2 \int \phi \rho dv \quad (16)$$

여기서, 첫번재항은 전계에 저장된 에너지를 의미하고, 두번재항은 저항손(ohmic loss)으로 발산된 에너지이고, 세번재항은 전하(charge)로부터 일련된 에너지를 나타낸다. 실제적으로 세번재 항은 '영'이 된다.

범함수 (16)를 최소화 하면 식(15)의 해가 얻어진다. 그러므로

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \quad (17)$$

식(17)이 유한요소 방법의 기본이다. 해석영역을 먼저 간단한 형상함수인 유한요소(finite element)들로 분할한다. 모든 유한요소들을 모으면 식(16),(17)는 다음의 행렬식 형태로 주어진다.

$$[K]\{\phi\} = \{p\} \quad (18)$$

여기서,  $\{\phi\}$ 는 구해야 할 전위의 미지변수 열벡터이고,  $\{p\}$ 는 전하밀도  $p$ 의 열벡터이다. 값이 '0'이 아니라면  $p$ 는 복소수로 표시되고, 그러므로  $\phi$  역시 복소수값을 갖고 유한요소의 절점값과 같다. 정방행렬인  $[K]$ 는 유한요소의 기하형상과 물질상수로부터 얻어진다.

#### 2.4 표면 도전율을 고려한 경우

해석 대상이 도전성 물질로 코팅(coating) 되어 있는 경우에는 면 도전율(surface conductivity)  $\sigma_s$ 를 고려해야 하는데 식(16)로부터 두번재항에 대응되는 저항순으로 고려할 수 있으므로 범함수는 다음 식과 같이 정의 할 수 있다.

$$F = \int \vec{E} \cdot \vec{D} dv + \frac{1}{i\omega} \int \sigma_s |\vec{E}|^2 dv + \frac{1}{i\omega} \int \sigma_s |\vec{E}|^2 dA \quad (19)$$

식(19)에 대해 3차원 축대칭 해석에 대해 생각하면

$$F = \int \vec{E} \cdot \vec{D} 2\pi r dA + \frac{\sigma_s}{i\omega} \int |\vec{E}|^2 2\pi r dA + \frac{\sigma_s}{i\omega} \int_C |\vec{E}|^2 2\pi r ds \quad (20)$$

여기서,  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ 에 대해 다음식을 이용하자.

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (21)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (22)$$

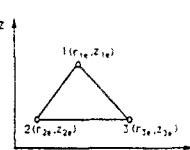


그림 3.1 1차 삼각형 요소

또한 각 요소에 대해 1차 삼각형 형상함수를 아래의 보간함수식으로 표현할 수 있다.

$$\phi^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_{ie} \phi_{ie} \quad (23)$$

$$N_{ie} = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} (b_{ie} + c_{ie} + d_{ie}) \quad (24)$$

여기서,

$$\Delta^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_{1e} & z_{1e} \\ 1 & r_{2e} & z_{2e} \\ 1 & r_{3e} & z_{3e} \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$b_{ie} = r_{je} z_{ke} - r_{ke} z_{je} \quad (26)$$

$$c_{ie} = z_{je} - z_{ke} \quad (26)$$

$$d_{ie} = r_{ke} - r_{je} \quad (26)$$

식(17)을 이용하여 (20)식의 첫번재항과 두번재항은 아래식과 같이 정든된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \phi_{ie}} &= (\epsilon + \frac{\sigma_s}{i\omega}) \int_{S^{(e)}} \int \left\{ \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \phi_{ie}} \left( \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi_{ie}} \left( \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial z} \right) \right\} 2\pi r dr dz \\ &\quad + \frac{1}{\partial \phi_{ie}} \left( \frac{\sigma_s}{i\omega} \int_C |\nabla \phi|^2 2\pi r ds \right) \quad (27) \end{aligned}$$

(19)식의 세번재항은 적분경로가 삼각형의 한변으로 주어진다. 그 변의 양쪽점의 전위를  $\phi_A$ ,  $\phi_B$ 라 하면 전위값이 식

(24)의 형상함수로 보간되므로 점A와 점B 사이에서는 직선적으로 전위가 변한다. 따라서  $\nabla \phi$ 는

$$\nabla \phi = \frac{\phi_B - \phi_A}{L} \quad (28)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 L은 점A와 점B 사이의 길이를 나타낸다. 식(23)의 보간함수와 식(28)을 이용하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \phi_{ie}} &= 2(\epsilon + \frac{\sigma_s}{i\omega}) \int_{S^{(e)}} \int \epsilon \left( \frac{\partial N_{ie}}{\partial r} \frac{\partial N_{ie}}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_{ie}}{\partial z} \frac{\partial N_{ie}}{\partial z} \right) \phi_{ie} r dr dz \\ &\quad + \frac{1}{\partial \phi_{ie}} \left( \frac{\sigma_s}{i\omega} \int_C \left| \frac{\phi_B - \phi_A}{L} \right|^2 r ds \right) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 세번재항의  $\phi_{ie}$ 는  $\phi_A$ ,  $\phi_B$  중의 하나의 함수라 하자. 그리고 식(24)으로부터

$$\frac{\partial N_{ie}}{\partial r} = \frac{c_{ie}}{2\Delta^{(e)}}, \quad \frac{\partial N_{ie}}{\partial z} = \frac{d_{ie}}{2\Delta^{(e)}} \quad (30)$$

이 성립하므로 식(29)는 최종적으로 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{4\pi} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \phi_{ie}} &= (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{1}{4(\Delta^{(e)})^2} \times \\ &\quad \sum_{j=0}^3 (c_{je} c_{je} + d_{je} d_{je}) \phi_{je} \int \int r dr dz \\ &\quad + \sigma_s \frac{\phi_B - \phi_A}{L^2} \int_C r ds \frac{\partial}{\partial \phi_{ie}} (\phi_B - \phi_A) \end{aligned} \quad (31)$$

각요소에 대해 식(31)이 '0'이 되도록 하여 모든 합친 절점수의 크기를 갖는 행렬식의 형태로 표현하여 전위값  $\phi$ 를 구할 수 있다. 위의 적분식은 다음과 같다.

$$\int \int r dr dz = r_0^{(e)} \Delta^{(e)} \quad (32)$$

여기서,  $r_0$ 는 삼각형요소의 중심의 좌표값이다.

$$\int_C r ds = \frac{r_A + r_B}{2} = r_c \quad (33)$$

특히 선적분을 포함하는 두번재항의  $\phi_A$ 와  $\phi_B$ 에 대한 미분결과를 행렬식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_s r_c \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

각 요소에 대해 식(31)이 '0'이 되도록 하여 모든 합친 절점수의 크기를 갖는 행렬식의 형태로 표현하여 전위값  $\phi$ 를 구할 수 있다.

### 3. 사례 연구

#### 3.1 도전율을 갖는 평행판 커패시터의 경우

그림3.2의 (a)와 같이 간단한 평행한 커패시터에 적용해 보자. 그럼에서 알 수 있듯이 평행판 사이에 폐질이 다른 물질로 된 두개의 층으로 이루어 진 경우로써 한 폐질의 폐질상수는 도전율이  $0.6667 \times 10^5 [\text{mho}/\text{m}]$ 이고, 다른 층은  $0.3333 \times 10^5 [\text{mho}/\text{m}]$ 로 이루어져 있다.

주파수가  $60[\text{kHz}]$ 이고, 전폭의 크기는  $|V|$ 인 교류전압을 평행판 양단에 가한 경우에 대해 해석해 보았다. 그 해석 결과의 절대값, 실수부, 허수부 각각의 동전위 분포도가 그림3.2의 (b), (c), (d)에 나타나 있다. 두 폐질이 접하는 중간 부분의 전위값은  $V_{mid} = 0.38471 + j0.07697 [V]$ 이다. 두 물질의 유전율이 모두 공기의 유전율  $\epsilon_0$ 와 같은  $8.854 \times 10^{-12} [\text{F}]$ 이 된다. 그러면 각층의 리액턴스는  $X_c = \frac{1}{2\pi f C}$ 가 되므로

$2.996 \times 10^5 [\Omega]$ 이 된다. 각 리액턴스에 병렬로 저항이 각각  $300[K\Omega]$ 과  $1500[K\Omega]$ 이 연결되어 있는 것으로 간주할 수 있으므로 이에 대해 회로 해석 방법에 의해 두충사이의 전위값은 유한요소 해석 결과와 일치한다.

#### 3.2 평행판도체 사이에 도체가 존재하는 경우

표면도전율을 고려한 예제로써 평행판 사이에 면도체가 존재하는 경우에 대해 생각해보자. 도체 사이의 모든 영역은

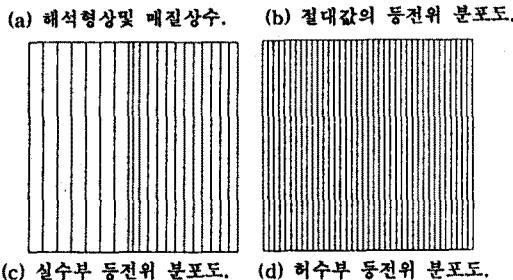
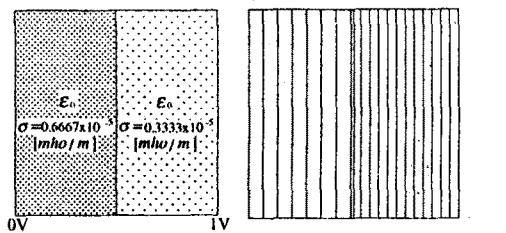


그림 3.2 평행판 커패시터 해석모델.

공기로 보고 단지 중간에 얇은 도체가 놓여 있는 경우에 대해서 보았다.

사용주파수는  $60[\text{Hz}]$ 로 하였다. 그러면  $\omega\epsilon$ 의 값은  $3.338 \times 10^9$ 이 되므로 중간의 면도체의 도전율  $\sigma_s$ 가  $10^9$ 인 경우에 대해 복소전위의 크기에 대해 동전위 분포도가 그림 3.3에 나타나 있다. 그림에서 알 수 있듯이 상하 대칭을 이루고 있으므로 해석 결과가 타당함을 확인할 수 있다. 중간의 면도체를 얇은 채로 대체하여 유한 요소 해석한 결과의 전계 분포도가 그림 3.4에 보여진다.

도전율의 값이  $\omega\epsilon$  값에 비해 충분히 크면 그 도체는 전위값이 같은 미지의 동전위 선으로 간주하여 해석할 수 있다. 중간의 면도체를 부유 동전위선(floating equipotential line)으로 미지의 같은 값을 갖도록 하여 유한 요소 계산한 결과가 그림 3.5에 나타나 있다.

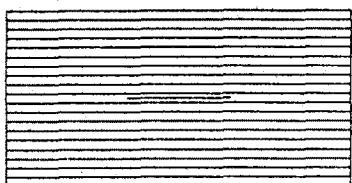


그림 3.3 평행판도체 사이에 면도체가 있는 해석모델( $\sigma_s=10^9$ )의 절대값의 동전위 분포도.

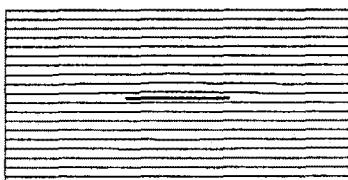


그림 3.4 평행판도체 사이에 채적도체 있는 해석모델( $\sigma=10^9$ )의 절대값의 동전위 분포도.

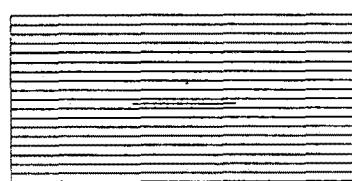
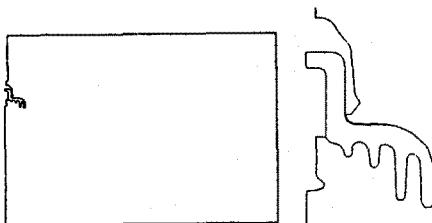


그림 3.5 평행판도체 사이에 부유동전위선이 있는 해석모델

### 3.3 임의로 설정한 초고압 애자의 해석 예

유전체 모델 표면의 일부분에 면도체가 존재하는 해석 모델의 전계 분포를 구해보았다. 초고압 애자의 윗 부분으로 그림 3.6에서 굽은선으로 표시된 부분을 면도체로 간주하여 취급하였다. 그럼 3.6의 초고압 애자 해석모델의 초기요소 분할도에 적용 유한요소 알고리즘에 적용하여 세분된 요소망중 애자부분 확대도가 그림 3.7에 나타나 있다. 면도체  $\sigma_s$ 의 값을  $10^{11}$ 으로 하였다. 이때 애자 부분의 비유전율  $\epsilon_r=5.5$ 로 하였다. 애자부분 도전율의 값은  $0.95 \times 10^{11}$ 으로 하였다. 해석 결과로 부터 면도체의 영향을 확인할 수 있다. 실제 애자의 오손 부분에 대한 구체적인 자료가 확립된다면 실제 상황과 같은 전계 해석이 가능하므로 어느 부분에 전계가 집중되는지를 확인할 수 있고, 이 결과로 부터 애자의 형태를 바꾸거나 표면의 적당한 부분에 도전율을 바꾸어 줌으로써 전계의 집중을 줄일 수 있을 것으로 사료된다.



(a) 전계 해석모델 (b) 애자부분 확대도  
그림 3.6 축대칭을 고려한 간단한 애자의 해석 모델.

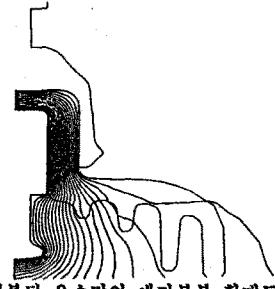


그림 3.6 축대칭을 고려한 간단한 애자의 해석 모델.

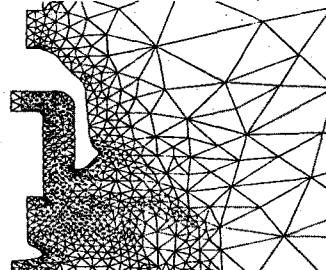


그림 3.7 세분된 요소망의 애자부분 확대도

### 4. 결론

본 논문에서 표면에 도전율을 갖는 유전체 해석 모델의 전계 해석 방법에 대해 다루어 보았다. 도전율이 충분히 크면, 교류 전계 해석을 하지 않고, 면도체를 미지의 동전위 분포로 간주하여 해석함으로써 전계 해석이 가능함을 확인하였다. 본 논문에서는 향후 관심의 대상인 임의의 초고압 애자 표면의 오손도를 임의의 면도전율로 대체하여 전계 분포를 해석해 보았다. 표면이 오손되어 도전성을 갖는 초고압 애자의 전계 분포를 해석함으로써 송전전압이 상승됨에 따라 요구되는 전력용기기 절연설계에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

### 증 고 문

- [1] 김형석 외 3인, "3차원 자동요소 분할방법", 대한 전기학회, 논문집, 37권, 12호, PP.847-853, 12월, 1988
- [2] J. Perman and M.D. Grieve, "An approach to self adaptive mesh generation", IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-21 No. 6, PP. 2567-2570, Nov., 1985.
- [3] 김형석 외 2인, "정전차장의 저용융한 요소해석을 위한 오차 추정", 전기학회논문지, 38권, 1호, PP. 22-28, 1월, 1989년
- [4] Song-yop Hahn et al, "A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation", IEEE Trans. on Magnetics, Vol.24, No. 1, PP. 315-317, 1988.