'95 대한전기학회 하계학술대회 논문집(1995. 7. 20~22)

새로운 방식의 BSB(brain-state-in-a-box) 신경망 설계

윤 성 식*, 박 주 영*, 박 대 희**
고려대 대학원*, 고려대 제어계측공학과*, 고려대 전산학과**

A New Design Technique for BSB(Brain-State-in-a-Box) Neural Networks

Seongsik Yoon*, Jooyoung Park*, Daihee Park**
Korea University

Abstract:
This paper presents a new design technique that can be used for brain-state-in-a-box neural networks to realize associative memories. The applicability of the technique is demonstrated by means of a simulation example, which illustrates its strengths.

I. 서 론

뉴우론의 상호결합에 의한 궤환 시스템(feedback system)이 Hebb 규칙에 의해 학습되면 새로운 개념의 기억장치로 활용될 수 있음[1]이 Hopfield에 의해 보여진 이후, 자기연상 메모리(autoassociative memory)는 신경망의 주요 응용분야의 하나로 자리잡아 왔다. 그러나 이미 널리 알려진 바와 같이, Hopfield 신경망[1]은 각각의 원형패턴(prototype pattern)이 전체 시스템의 고정점(fixed point)으로 저장되는 것을 보장하지 못하는 등 현실성있는 자기연상 메모리로 사용되기에는 그 역량이 아직 미흡한 실정이다. 이에 따라, 효과적인 연상기억을 가능하게 해줄 수 있는 대안을 찾기 위해 여러가지 신경망 모델 및 연결강도 결정방법들이 제시되어 왔는데, BSB 신경망(brain-state-in-a-box neural networks)은 이러한 종류의 연구에 있어서 중요한 위치를 차지하는 모델 중 하나이다.

BSB 신경망은 1977년에 Anderson 등에 의해 발표된 모델[2]인데, 그 이후 궤환 및 상호결합을 이용하는 주요한 신경망으로써 주목받아 왔으며[3], 이론적으로도 여러가지 흥미있는 특성들을 가지고 있음이 밝혀져 왔다[4-5]. 그리고 최근에는 자기연상 메모리로써 일정수준의 성능을 보장할 수 있는 BSB 신경망 설계 방법론이 Lillo 등에 의해 제시된 바 있다[6]. 보다 효과적인 자기연상의 구현을 추구하는 이러한 방향의 연구들이 궁극적으로 실용성 있는 대안을 제시할 수 있기 위해서는, 다음과 같은 연상 메모리의 기본요건을 충족시킬 수 있어야 한다[7-8]:

① 각 원형패턴이 점근적 안정인 평형점(asymptotically stable equilibrium point)으로 기억될 수 있어야 함.
② DOA(domain of attraction)가 조절가능하고 충분히 넓어야 함.
③ 원형패턴이 아닌 고정점, 즉 spurious states의 수가 적어야 함.

본 논문에서는 BSB 신경망을 이용하여 효과적인 자기연상 메모리를 설계하는 것을 목적으로, 주요 기본요건을 모두 만족하는 자기연상 메모리의 설계 문제를 일종의 다목적 최적화 문제(multi-objective optimization problem)로 이해하고, 우선 위의 조건 ①을 보장하는 해의 집합을 미리 매개변수화(parametrization) 해두고 나머지 조건들은 매개변수의 변화에 따르는 성능지수의 변화로부터 최적해를 찾는 과정에서 충족시키는 새로운 방법을 모색하였다.

본 논문의 내용전개 순서는 다음과 같다. II장에서는 BSB 신경망의 기본원리를 설명하고 해공간의 매개변수화 방법을 제시하며, III장에서는 유전자 알고리즘을 이용한 탐색방법을 소개하고, II장의 결과와 GA를 결합하여 설계방법론을 완성한다. IV장에서는 구체적인 설계예를 통하여 본 연구의 방법론과 기존의 방법론과의 성능비교를 수행하며, 마지막으로 결론이 V장에서 언급된다.

II. BSB 신경망의 기본원리와 해공간의 매개변수화

n개의 뉴우론으로 이루어지는 BSB 신경망의 동특성은 (1)식의 상태방정식(state equation)으로 표현될 수 있다[2].

$$x(k+1) = g(x(k) + \alpha W x(k)), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

이 식에서 $x(k)$는 k번째 시간스텝에서의 상태벡터로써 n차원 실수벡터 공간의 원소가 되고, α는 양수로써 $x(k)$의 하중합(weighted sum) $Wx(k)$가 다음 시간스텝에서의 $x(k+1)$ 값에 영향을 주는 정도를 제어하는 역할을 하며, $g: R^n \rightarrow R^n$는 그 출력의 i번째 원소 $g_i(\cdot)$가 다음과 같이 정의되는 선형포화함수(linear saturating function)이다.

$$g_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y_i \geq 1 \\ y_i & \text{if } -1 < y_i < 1 \\ -1 & \text{if } y_i \leq -1 \end{cases}$$

선형포화함수가 갖는 특성에 따라, BSB 모델의 상태궤적(state trajectories)은 집합 $H_n = [-1, 1]^n$ 위를 움직이게 된다. (1)식으로 표현되는 원래의 BSB 신경망은, 여타의 신경망에서와 마찬가지로 뉴우론 출력값의 하중합에 바이어스(bias)를 더해주는 경우, 더욱 다양한 함수를 나타낼 수 있게 된다. 이러한 효과를 고려하여 바이어스 벡터 b를 도입하면 (1)식의 원모델은 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= g(x(k) + \alpha(Wx(k) + b)) \\ &= g((I + \alpha W)x(k) + \alpha b) \end{aligned} \qquad (2)$$

(1)식의 BSB 모델과 구별하기 위하여, (2)식의 모델은 때로 일반화된 BSB(generalized BSB, GBSB)로 불리우기도 한다. 본 논문에서는 바이어스 벡터 개념이 추가된 (2)식의 모델만을 BSB 신경망이라는 명칭하에 일관되게 사용하기로 한다.

BSB 모델의 평형점(equilibrium point), 점근적 안정성(asymptotical stability) 등의 개념은 다음 식으로 정의되는 매핑 $L: R^n \rightarrow R^n$과 $T: R^n \rightarrow R^n$를 사용하면 좀 더 간략하게 소개할 수 있다[6].

$$L(x) = (I + \alpha W)x + \alpha b,$$
$$T(x) = g((I + \alpha W)x + \alpha b) = g(L(x))$$

벡터공간 R^n에서의 유클리디안 노옴(Euclidean norm)을 $\|\cdot\|$으로 표기하고, 중심 $y \in R^n$과 반경 $\varepsilon > 0$을 갖는 구를

$$B_\varepsilon(y) = \{x \in R^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$$

와 같이 표현하면, BSB의 평형점과 안정성 및 점근안정성 등의 개념은 다음과 같이 정의될 수 있다.

정의: i) $[-1, 1]^n$ 위의 점 x가 $T(x) = x$를 만족하면, "x는 BSB 신경망 (2)의 평형점이다"라고 한다.

ii) BSB 신경망의 평형점 x^*가 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여,

$$x(0) \in B_\delta(x^*) \Rightarrow \forall k \geq 0,\ x(k) \in B_\varepsilon(x^*)$$

를 만족하는 $\delta > 0$가 존재하는 성질을 가지면, "평형점 x^*는 안정이다"라고 한다.

iii) BSB 신경망의 평형점 x^*가 안정이고, $x(0) \in B_\delta(x^*)$이면 $k \to \infty$일 때 $x(k) \to x^*$인 양수 δ가 존재할 경우, "평형점 x^*는 점근적 안정이다"라고 한다.

주어진 원형 패턴들이 점근적 안정인 평형점으로 저장될 수 있도록 해주는 W와 b의 해공간을 일정한 매개변수(parameters)를 이용하여 표현해 주는 작업이 바로 본 논문의 일차 목적인 "해공간의 매개변수화"이다.

문제(해공간의 매개변수화): n개의 뉴우론으로 이루어진 (2)식의 BSB 신경망에 있어서 p개의 원형 패턴 $s^m \in \{-1,1\}^n$, $m = 1, \cdots, p$ 각각이 점근적 안정인 평형점이 되도록 해주는 연결강도 행렬 W와 바이어스 벡터 b를 모은 해공간(solution space)를 구하라.

여기에서 위의 문제의 답이 되는 전체 해공간의 표현을 추구하는 대신 일부 해공간을 다루기 쉬운 형태로 나타낼 수 있는 매개변수화를 생각해 보자. [6]에서 Lillo 등에 의해 얻어진 식은 이러한 전략의 매개변수화의 좋은 출발점을 제공해 준다. 행렬 B와 V가

$B = [\ b \cdots b\ ] \in R^{n \times p}$, $V = [\ s^1 \cdots s^m\ ] \in \{-1,1\}^{n \times p}$

와 같이 정의되고 V의 pseudoinverse가 V^+로 표기될 때, W와 b가 다음 식 (3)을 만족하면 각 원형패턴 s^m, $m = 1, \cdots, p$은 점근적 안정인 평형점이 된다[6].

$$W = (DV - B)V^+ + \Lambda(I - VV^+) \qquad (3)$$

여기서 행렬 D와 Λ, 그리고 벡터 b는

$$\forall i,\ d_{ii} > \sum_{j \neq i} |d_{ij}| \qquad (4)$$

$$\forall i,\ \lambda_{ii} < -\sum_{j \neq i} |\lambda_{ij}| - |b_i| \qquad (5)$$

$$\forall i,\ d_{ii} < \sum_{j \neq i} |d_{ij}| + |b_i| \qquad (6)$$

를 만족한다. (3)식에서는 해공간을 이루는 W와 b가 (4-6) 조건을 만족하는파라메터 d_{ij}, λ_{ij}에 의해 매개변수화되고 있다. 이러한 매개변수를 통한 표현을 곧바로 탐색과정에 이용하고자 할 경우에는 탐색공간이 너무나 고차원이 되는 문제점에 부딪히게 된다(위 경우에는 2n(n-1) 차원의 탐색공간을 갖게 됨). 이러한 문제점을 피하기 위하여 행렬 D와 Λ를 각각 $\tau_1 I$와 $-\tau_2 I$로 대신함으로써, 탐색공간의 차원을 훨씬 축소시킬 수 있다. 따라서, 위이 문제를 만족시키는 행렬 W와 벡터 b들 중 일부는 다음 식에 의해 표현될 수 있다:

$$W = (\tau_1 I - B)V^+ - \tau_2(I - VV^+) \qquad (7)$$

$$0 < \tau_1 < |b_i| < \tau_2\ ,\ i = 1, \cdots, n \qquad (8)$$

위의 표현 중 $0 < \tau_1 < |b_i| < \tau_2$, $\forall i$ 부분은 조건 (4-6)에 $D = \tau_1 I$, $\Lambda = -\tau_2 I$를 직접 대입함으로써 얻어졌다. 이러한 과정을 거쳐 얻은 파라메터 탐색공간은 비록 저차원의 공간을 형성하지만, 충분히 우수한 해를 포함하는 성질을 가진다.

III. BSB 신경망의 상태해석과 유전자 알고리즘을 이용한 우수해의 탐색

(7)식을 이용한 연결강도 행렬 W의 표현에 있어서, 파라메터 τ_1, τ_2, $b = [\ b_1 \cdots b_n\ ]^T$이 조건 (8)을 만족하면, 일단 각 원형패턴이 점근적 안정인 평형점으로 저장됨은 보장된다. 그러나 DOA의 크기 및 spurious states의 수 등의 성능은 파라메터가 조건 (8)으로 표현되는 공간 내의 어떤 위치를 차지하느냐에 따라 달라진다. 다음에서는 (7)에 의해 표현될 수 있는 BSB 신경망 $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$들 중 충분히 큰 DOA와 작은 수의 spurious states를 갖는 신경망을 찾기 위한 우수해 탐색 방법론을 제시하기로 한다. 이 방법론의 기본골격은 i) $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$에 대한 상태전이(state transition)과정 해석 ii) DOA 크기와 spurious states의 갯수를 반영한 성능지수의 정의 및 iii) 유전자 알고리즘[9]을 이용한 우수해의 탐색으로 이루어진다.

1. BSB 신경망의 상태전이과정 해석

BSB 신경망을 이루는 뉴우론의 수가 많지 않을 경우에는, 실제로 $[\ -1,1]^n$ 위의 각 정점을 초기치로 하여 $x(k)$의 전이과정을 관찰함으로써 신경망 $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$의 성능평가를 위한 기본자료를 제공받을 수 있다. 이러한 전이과정 해석에, 퍼지시스템의 동특성 해석[10]에 유용하게 사용된 바 있는 unravelling algorithm[11]을 일부 수정하여 사용하면 필요한 정보를 효과적으로 표현할 수있는 장점을 취할 수 있다. 즉, $[\ -1,1]^n$ 위의 각 정점에서 출발한 상태궤적(state trajectory)이 궁극적으로 어떠한 평형점 또는 리미트 사이클(limit cycle)에 도달하느냐에 따라 정점들을 그룹(group)으로 나누고, 각 정점 $z \in \{-1,1\}^n$에는 그룹수(group number) $G(z)$를 할당한다. 그리고 최종적으로 평형점 z^*에 도달하는 그룹에 속하는 초기정점 z들에 대해서는 해밍거리(Hamming distance) $HD(z, z^*)$를 기억해 둔다. 이러한 과정을 거친 후에 $[\ -1,1]^n$ 위의 각 정점 z가 갖는 $G(z)$, $HD(z, z^*)$값을 모두 조사하여 분류하면, 각 정점을 출발한 상태궤적이 궁극적으로 어떠한 평형점 혹은 진동모드에 도달했는지를 분명히 나타낼 수 있다. 이러한 정보로 부터 각 원형패턴이 갖는 DOA(domain of attraction)와 spurious state의 위치 등은 손쉽게 얻어진다.

2. 성능지수의 정의

(7)식의 매개변수화 과정에서는 각 원형패턴을 점근적 안정인 평형점으로 기억하게 해주는 BSB 신경망들을 파라메터 τ_1, τ_2, b를 이용하여 매개변수화된 집합으로 표현하였다. 이제 이 집합의 원소 $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$가 자기연상 메모리로써 어느 정도의 우수성을 갖는지를 정량적으로 표현하기 위하여 성능지수 $J(\tau_1, \tau_2, b)$를 다음과 같이 정의한다.

$$J(\tau_1, \tau_2, b) = 0.8 \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{N_i^m}{T_i^m} \right) + 0.2 \frac{1}{1+F} \qquad (9)$$

여기서 T_i^m, N_i^m, F, w_i 등은 다음과 같이 정의된다.

T_i^m: 원형패턴 s^m과 해밍거리 i만큼의 거리를 유지하는 정점들의 갯수.

N_i^m: 원형패턴 s^m과 해밍거리 i만큼의 거리를 유지하는 정점들 중 그 상태궤적이 원형패턴 s^m으로 수렴하는 정점들의 갯수.

F: spurious states의 갯수

w_i: 각 N_i^m / T_i^m에 곱해지는 무게상수(weighting factor):

$$w_1 = 0.6,\ w_2 = 0.2,\ w_3 = w_4 = \cdots = 0.1.$$

위의 성능지수는 각 원형패턴이 갖는 DOA의 크기와 spurious states의 갯수, 즉 서론에서 소개된 바 있는 자기연상 메모리의 기본요건 중 ② 와 ③에 촛점을 마추고 있다. 성능지수 J가 사용자의 주관 및 필요에 따라 다양한 형태로 수정될 수 있음은 물론이다.

3. 유전자 알고리즘을 이용한 우수해 탐색

Holland에 의해 제안된 유전자 알고리즘은 자연 생태계의 적자 생존의 원리를 모방한 이론으로써 전역적인 탐색을 통해 주어진 목적함수 Y=G(X)의 최적화 문제를 해결하기 위한 탐색 알고리즘이다[9]. 본 논문이 제시하는 우수해 $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$의 탐색과정은 기본적으로 GA에 의존하며, 변수 τ_1, τ_2, $b_1, \cdots, b_n$이 이진 염색체 $X = [\ T_1\ T_2\ \beta_1 \cdots \beta_n\ ]$로 표현된다. 여기서 T_1, T_2, $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 각각은 10 비트정도의 이진부호로 이루어지는데 이들 중 T_1과 T_2는 음이 아닌 정수(integer) $[\ T_1\ ]_{10}$, $[\ T_2\ ]_{10}$를 표현하는 이진수이다. 그리고 β_i, $i = 1, \cdots, n$는 각각 부호 비트와 [0,1] 사이의 이진 소수로 구성된다. 10진수로의 코드변환 과정에서 T_i는 일정한 상수 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$를 이용하여 $[\ T_i\ ]_{10} \times \gamma_1 + \gamma_2$를 취한 후 작은 수가 τ_1를 생성하고 나머지가 τ_2를 제공한다. 즉,

$$\tau_1 = \gamma_1 \min\{[\ T_1\ ]_{10}, [\ T_2\ ]_{10}\} + \gamma_2$$

$$\tau_2 = \gamma_1 \max\{[\ T_1\ ]_{10}, [\ T_2\ ]_{10}\} + \gamma_2 \qquad (10)$$

그리고 매개변수 b_i는 (10)를 통해 얻어진 τ_1, τ_2와 염색체 X 내의 이진수 β_i로 부터

$$b_i = (\pm 1)[\ (|\beta_i|)_{10}\ \tau_1 + (1-(|\beta_i|)_{10})\ \tau_2\ ] \qquad (11)$$

와 같이 얻는다(여기서 ±부호는 β_i의 부호에 따라 결정됨). 이와 같은 코드변환은 비교적 손쉬울 뿐만 아니라, 교배 및 돌연변이 과정에서 조건 (8)을 만족하지 못하는 염색체가 출현하는 것을 방지해 준다. 그리고, 유전자 알고리즘의 적용과정 중 적합도 값으로는 (9)식에서 정의한 성능지수 $J(\tau_1, \tau_2, b)$를 사용한다.

IV. 시뮬레이션

본 논문을 통해 정립된 설계방법론을 검증하기 위해 10개의 뉴우론을 갖는 BSB 신경망에 6개의 원형패턴을 저장하는 자기연상 메모리 설계문제[6]를 고려하였다. 편의상 각 이진벡터를 그에 대응하는 십진수를 이용하여 표기하면, 즉 벡터의 엔트리(entry) 중 -1을 0으로 바꾼 후 십진수로 바꾸어 주면, 본 메모리 설계문제에서 기억하고자 하는 평형점은 각각 267, 456, 496, 622, 786, 860로 표현된다. 본 논문의 III장에 설명된 방법론에 따라 $\alpha = 0.3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.05$, 집단크기 30, 세대수 1000, 교배율 0.25, 돌연변이율 0.01로 시뮬레이션을 수행한 결과, 가장 좋은 성능을 갖는 신경망을 제공하는 파라메터의 값은 다음과 같았다:

$$\tau_1 = 2.050,\ \tau_2 = 3.900,\ b = [\ -2.915\ 2.546\ -3.831\ 2.999\ 2.774\ -3.245\ 3.498\ -2.369\ 3.266\ -3.683]^T$$

위의 파라메터를 사용했을 때의 $BSB(\tau_1, \tau_2, b)$는, 같은 문제에 대하여 [6]에서 제시한 결과에 비해 월등한 성능을 보여 주었다. spurious states의 수는 각각 2개로 같았고 DOA의 경우에는 표 1과 2의 비교에서 볼 수 있듯이 크게 향상된 결과를 보여 주었다. 표 1, 2의 (i,j) 엔트리는 i-번째 원형패턴으로부터 해밍거리 (j-1)을 유지하는 전체 정점들 중 궁극적으로 원형패턴 s^i에 도달하게 되는 정점들의 수를 의미한다. 따라서 DOA의 관점에서, 각 엔트리의 값이 클수록 우수한 연상메모리가 된다.

HD / State	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
267	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
456	1	10	16	15	12	7	0	0	0	0	0
496	1	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0
622	1	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
786	1	7	6	3	0	0	0	0	0	0	0
860	1	7	5	13	13	8	3	1	0	0	0

표 1. Lillo[6] 등에 의해 설계된 BSB 신경망이 갖는 DOA

HD / State	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
267	1	10	37	44	31	15	1	1	0	0	0
456	1	10	35	43	26	3	1	0	0	0	0
496	1	10	32	22	8	3	0	1	0	0	0
622	1	10	41	56	37	11	0	0	0	0	0
786	1	10	35	29	11	0	0	0	0	0	0
860	1	10	32	26	5	1	0	0	0	0	0

표 2. 해공간의 매개변수화와 GA를 이용하여 설계한 BSB 신경망의 DOA

V. 결론

본 논문에서는 BSB 신경망을 이용하여 자기연상 메모리를 설계하는 과정을 다루었다. 이 설계과정이 기존의 접근방법과 구별되는 점은, 전체 메모리 설계과정을 다목적 최적화 문제로 인식하여 단계적인 접근을 시도하였다는 점이다. 즉, 첫 단계에서 우선 가장 주요한 목적요소인 원형패턴들의 점근적 안정성 보장을 해공간의 매개변수화를 통해 확보한 다음, 여타의 목적요소를 고려하여 정의된 성능지수를 GA를 이용하여 최적화함으로써 자기연상 메모리의 기본요건을 전반적으로 반영하는 형식을 취하였다. 따라서 본 논문에서 제시하는 해공간의 매개변수화와 유전자 알고리즘을 이용한 BSB 신경망 설계 방법론은 i) 각 원형패턴이 점근적 안정인 평형점이 됨을 완전히 보장하고, ii) DOA와 spurious states의 갯수 측면에서 극대의 효과를 거둘 수 있는 자기연상 메모리의 설계를 가능하게 해준다. 이와 같은 전략은, 최근에 발표된 바 있는 BSB 신경망 설계 방법론[6]보다 월등한 성능을 제공함이 시뮬레이션을 통해 보여졌다.

참고문헌

1. J. J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," in Proc. Nat. Acad. Sciences, vol. 79, pp. 2554-2558, 1982.

2. J. A. Anderson, J. W. Silverstein, S. A. Ritz, and R. S. Jones, "Distinctive features, categorical perception, and probability learning: Some applications of a neural model," in Neurocomputing: Foundations of Research, J. A. Anderson and E. Rosenfeld, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.

3. S. Grossberg, "Nonlinear neural networks: Principles, mechanisms, and architectures," Neural Networks, vol. 1, pp. 17-61, 1988.

4. H. J. Greenberg, "Equilibria of the brain-state-in-a-box(BSB) neural model," Neural Networks, vol. 1, pp. 323-324, 1988.

5. S. Hui and S. H. Zak, "Dynamical analysis of the brain-state-in-a-box(BSB) neural models," IEEE Trans. Neural Networks, vol. 3, pp. 86-94, 1992.

6. W. E. Lillo, D. C. Miller, S. Hui and S. H. Zak, "Synthesis of brain-state-in-a-box(BSB) based associative memories," IEEE Trans. Neural Networks, vol. 5, pp. 730-737, 1994.

7. A. N. Michel and J. A. Farrell, "Associative memories via artificial neural networks," IEEE Contr. Syst. Mag., vol. 10, pp. 6-17, 1990.

8. G. Yen and A. N. Michel, "A learning and forgetting algorithm in associative memories: Results involving pseudo-inverses," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, pp. 1193-1205, 1991.

9. Z. Michalewicz, Genetic Algorithms + Data Structures = Evolutionary Programs, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1992.

10. Y. Y. Chen and T. C. Tsao, "A description of the dynamical behavior of fuzzy systems," IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics, vol. 19, pp. 745-755, 1989.

11. C. S. Hsu and R. S. Guttalu, "An unravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: An application of cell-to-cell mappings," ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 47, pp. 940-948, 1980.