

적용 수렴인자를 갖는 이차원 RLMS에 관한 연구

정영식
인천대학교 전기공학과

A STUDY OF 2-D RECURSIVE LMS WITH ADAPTIVE CONVERGENCE FACTOR

Young-sik Chung
University of Inchon

Abstract

The convergence of adaptive algorithm depends mainly on the proper choice of the design factor called the convergence factor. In the paper, an optimal convergence factor involved in TRLMS algorithm, which is used to predict the coefficients of the ARMA predictor in ADPCM is presented. It is shown that such an optimal value can be generated by system signals such that the adaptive filter becomes self optimizing in terms of the convergence factor. This algorithm is applied to real image.

1. 서 론

DPCM(Differential Pulse Code Modulation)은 가장 보편적으로 많이 쓰이는 영상압축 방법이다. 기본적인 DPCM은 양자기와 예측기의 두 부분으로 구성되어 있다. 예측기와 양자기는 적응 또는 비적용으로 할 수 있으나 이에 관계없이 시스템 안에 양자기가 존재하는 경우에는 언제나 왜곡은 발생하게 된다. 양자기가 많은 단계를 나타낼 수 있다면 양자화 오차는 줄어들게 되고 따라서 양자화 잡음도 감소하게 되어 원래의 값과 재생된 값 사이의 왜곡 역시 감소하게 된다. 따라서 DPCM 시스템의 성능을 개선하기 위해 적응 양자기의 설계에 많은 노력을 기울여 왔다. 대부분의 설계가 양자기의 입력신호의 국부적 변화에 적응하기 위해 양자기의 dynamic range를 조절한다. 그러나 양자기의 입력신호인 예측오차는 어떠한 방식이든 영향을 받게된다. 따라서 이 예측오차를 줄이기 위해서는 어떠한 형식이든 양자화 오차가 포함되어야 한다.

근래에 가중치가 부여된 과거의 출력 값들과 과거의 양자화된 오차 값들의 결합으로 이루어진 DPCM 시스템이 제안되었으며 이 시스템은 32 kbit/s의 음성 부호화의 표준으로 CCITT에서 채택되었다[1]. 이러한 형태의 예측기를 ARMA(auto-regressive moving average) 형태라고 하며 ARMA 예측기를 갖는 DPCM 시스템은 그림 1에 보여진다. 영상압축의 용용에서도 그림 1의 시스템이 기존의 AR 예측기보다 영상의 급격한 변화에 더 잘 적응하며 원래의 영상과 수신 측에서 재구성된 영상과의 오차가 더 줄어들게 된다[2].

적용 ARMA 예측기의 계수를 구하기 위한 다양한 방법들이 제안되었으며 본 논문에서는 영상의 특성을 고려한 이차원 LMS(TLMS) 알고리듬의 일종인 이차원 RLMS(2-D recursive LMS, TRLMS)를 사용한다[3]. Gradient 기법에 근거를 둔 알고리듬들은 수렴인자의 선택에 따라 수렴 또는 발산하게 된다. 본 논문에서는 2차원 입력신호의 변화에 따라 적응할 수 있는 적용 수렴인자를 구하는 알고리듬에 대해 논하고자 한다.

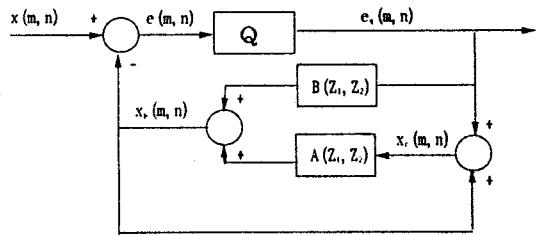


그림 1. ARMA 예측기를 가진 DPCM

2. 2차원 ARMA 예측기

선형 ARMA 예측기의 출력은 다음과 같이 정의된다.

$$x_p(m, n) = \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_j a(i, j)x(m-i, n-j) + \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_l b(k, l)e(m-k, n-l) \quad (1)$$

여기서 $\{e(m, n)\}$ 은 예측오차 순열이며, $\{a(i, j): (i, j) \in R_a\}$ 는 AR항의 예측계수 ($b(k, l): (k, l) \in R_b\}$)는 MA항의 예측계수다. 식 (1)의 적응계수를 구하는 문제는 다음과 같은 최소화 즉 MMSE로 귀결된다.

$$\frac{\partial E[\epsilon^2(m, n)]}{\partial a(i, j)} = 0, \quad (i, j) \in R_a \quad (2a)$$

$$\frac{\partial E[\epsilon^2(m, n)]}{\partial b(k, l)} = 0, \quad (k, l) \in R_b \quad (2b)$$

식 (1)의 적응계수를 구하는 방법으로 Widrow가 제안한 LMS 방법을 사용한다. LMS 방법은 gradient 값을 데이터로부터 직접 얻을 수 있는 순간(instantaneous) gradient 값을 대체한 것으로 식 (2)는 다음과 같다.

$$a_{p+1}(i, j) = a_p(i, j) - 2\mu^a e(m, n) \frac{\partial \epsilon(m, n)}{\partial a_p(i, j)} \quad (3a)$$

$$b_{p+1}(k, l) = b_p(k, l) - 2\mu^b e(m, n) \frac{\partial \epsilon(m, n)}{\partial b_p(k, l)} \quad (3b)$$

여기서 μ^a 와 μ^b 는 AR과 MA 계수의 수렴인자이며 p 는 updating index로 영상의 크기이면 $M \times N$ 이라면 $p = m(M-1) + n$ 의 관계가 성립된다. 위 식에서 도함수는 계수 $a_p(i, j)$ 와 $b_p(k, l)$ 이 예측기의 귀환 계수들 때문에 모든 이전 예측오차와 함수적으로 연결되어 있으므로 매우 복잡한 함수관계를 보여준다. 따라서 본 논문에서는 Feintuch에 의해 제안된 RLMS(recursive LMS) 방법을 도입하였다[4]. RLMS는 단순히 식 (2b)의 오른쪽에 있는 도함수를 다음과 같이 나타낸 것이다.

$$a_{p+1}(i, j) = a_p(i, j) + 2\mu^a e(m, n) x(m-i, n-j) \quad (4a)$$

$$b_{p+1}(k, l) = b_p(k, l) + 2\mu^b e(m, n) e(m-k, n-l) \quad (4b)$$

위의 식을 TRLMS(Two-dimensional RLMS)라고 한다. Gradient 방법 자체가 비선형적이고, 그 해들이 복수의 최소값을 가질 수 있으므로 이 TRLMS 방법은 잘못된 최소점에 수렴할 수 있으나, 오차 함수의 gradient 탐색에서 최적 계수를 필연적으로 찾을 필요가 없으며 다만 작은 예측오차를 얻으면 되는 것이다. Soderstrand은 RLMS 방법이 Stearn이 제안한 방법과 Whites가 제안한 방법과 기능을 비교하여 좋은 결과를 준다는 것을 입증하였으며, 또한 다양한 응용에서 성공적으로 사용되었다[5].

3. TRLMS의 적용 수렴인자

TRLMS 알고리듬의 수렴과 발산은 수렴인자 μ^a 와 μ^b 의 적절한 선택에 달려있다. 일반적으로 수렴인자는 경험에 의해 선택하여 왔으나 근래에 Yassa는 복소 선형과 부분 선형의 경우에 있어서 gradient에 근거를 둔 알고리듬의 수렴인자 선택에 있어서의 최적성을 보였다[6]. Mikhael은 Taylor 급수를 사용하여 적용 수렴인자를 유도하였다[7]. 여기서는 TRLMS의 적용 수렴인자를 유도한다.

계수를 구하는 식 (3)은 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_{p+1}(i, j) = a_p(i, j) + \Delta a_p(i, j) \quad (i, j) \in R_a \quad (5a)$$

$$b_{p+1}(k, l) = b_p(k, l) + \Delta b_p(k, l) \quad (k, l) \in R_b \quad (5b)$$

여기서

$$\Delta a_p(i, j) = -2\mu^a e(m, n) \frac{\partial e(m, n)}{\partial a_p(i, j)} \quad (6a)$$

$$\Delta b_p(k, l) = -2\mu^b e(m, n) \frac{\partial e(m, n)}{\partial b_p(k, l)} \quad (6b)$$

(m, n)번째 확소에서의 예측오차 $e(m, n)$ 은 다음과 같다.

$$e(m, n) =$$

$$x(m, n) - \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_i a_p(i, j) x(m-i, n-j) - \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_k b_p(k, l) e(m-k, n-l) \quad (7)$$

여기서 $x(m, n)$ 은 원래의 영상신호이다. 식 (5)의 $a_p(i, j)$ 와 $b_p(k, l)$ 을 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e(m, n) &= \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_i \Delta a_p(i, j) x(m-i, n-j) - \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_k \Delta b_p(k, l) e(m-k, n-l) \\ &= x(m, n) - \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_i a_{p+1}(i, j) x(m-i, n-j) - \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_k b_{p+1}(k, l) e(m-k, n-l) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 오른쪽 항은 (m, n)번째 확소에서 새롭게 update된 계수로부터 구한 새로운 예측오차로 간주할 수 있다. 이 오른쪽 항을 $\bar{e}(m, n)$ 이라 하자. 만약 예측기가 수렴한다면 $e^2(m, n)$ 은 update된 계수 $a_{p+1}(m, n)$ 과 $b_{p+1}(m, n)$ 을 사용해서 얻은 $\bar{e}(m, n)$ 보다 작게된다. 따라서 만약 $e(m, n) \neq 0$ 라면 다음 조건을 만족하게된다.

$$0 < \bar{e}^2(m, n) < e^2(m, n) \quad (9)$$

식 (8)의 왼쪽 항을 식 (9)의 $\bar{e}(m, n)$ 에 대입하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &< [e(m, n) - \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_i \Delta a_p(i, j) x(m-i, n-j)] \\ &\quad - \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_k \Delta b_p(k, l) e(m-k, n-l)]^2 < \bar{e}^2(m, n) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 TRLMS 알고리듬으로 변환한 식 (4)에서 $\Delta a_p(i, j)$ 와 $\Delta b_p(k, l)$ 에 해당되는 항들을 식 (6)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} 0 &< e^2(m, n) [1 - 2\mu^a \sum_{(i, j) \in R_a} \sum_i x^2(m-i, n-j) \\ &\quad - 2\mu^b \sum_{(k, l) \in R_b} \sum_k e^2(m-k, n-l)]^2 < \bar{e}^2(m, n) \end{aligned} \quad (10)$$

를 얻게되며 이식은 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$0 < \mu^a \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) + \mu^b \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) < 0.5 \quad (11)$$

수렴인자 μ^a 와 μ^b 는 식 (11)의 부등 관계를 만족하는 어떤 값들로 될 수 있다. 이를 만족하는 조건은 다음 3가지로 분류된다.

1. $\mu^a > 0, \mu^b < 0$ 그리고

$$\mu^a \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) > \mu^b \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) \quad (12)$$

2. $\mu^a < 0, \mu^b > 0$ 그리고

$$\mu^a \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) < \mu^b \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) \quad (13)$$

3. $\mu^a > 0, \mu^b > 0$

만약 $\mu^a = \mu^b = 0$ 이면 적용과정이 없어지게 되므로 예측기는 고정된다. 따라서 $\mu^a \neq 0, \mu^b \neq 0$ 이다. 실제 응용에서 $e(m, n)$ 과 $b_p(k, l)$ 의 초기값은 0으로 하므로 오차값 자승의 합은 일반적으로 입력 신호 자승의 합보다 더 작다. 따라서 처음 순환 과정은 초기 설정이므로

$$\mu^a \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j)$$

의 차례를 받게된다. 그러므로 식 (11)을 만족하기 위해서는 μ^a 는 양수이어야 하므로 식 (13)은 배제된다. 식 (12)에서와 같이 μ^b 가 음수이고

$$\mu^a \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) < \mu^b \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l)$$

이라면 하위 경계 밖으로 벗어날 수 있다. 따라서 이러한 이유로 인해 수렴인자 μ^a 와 μ^b 는 식 (14)를 만족해야한다. 그러므로 적용 수렴인자의 제한조건 식 (11)과 (14)를 만족해야만 한다.

식 (11)과 (14)에 updating index를 첨가하여 다시 나타내면

$$0 < \mu_p^a(i, j) \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) + \mu_p^b(k, l) \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) < 0.5 \quad (15)$$

과

$$\mu_p^a(i, j) > 0 \quad (i, j) \in R_a \quad (16a)$$

$$\mu_p^b(k, l) > 0 \quad (k, l) \in R_b \quad (16b)$$

이다. 식 (15)의 가산 항들을

$$\mu_p^a(i, j) \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) + \mu_p^b(k, l) \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) = \sigma \quad (17)$$

이라 하면 $0 < \sigma < 0.5$ 가 된다. 편의상 각 순환에서 예측 계수들에 같은 수렴인자를 적용한다면 식 (17)은

$$\mu^a(m, n) \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) + \mu^b(m, n) \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) = \sigma \quad (17)$$

여기서

$$\mu^a(m, n) = \mu_p^a(i, j) \quad (i, j) \in R_a$$

$$\mu^b(m, n) = \mu_p^b(k, l) \quad (k, l) \in R_b$$

이다. AR항과 MA항 사이의 α 를 β 의 비율로 분배하면

$$\mu^a(m, n) \sum_i \sum_{(i, j) \in R_a} x^2(m-i, n-j) = \alpha\beta \quad (18a)$$

$$\mu^b(m, n) \sum_k \sum_{(k, l) \in R_b} e^2(m-k, n-l) = \alpha(1-\beta) \quad (18b)$$

가되며 여기서 β 는 1보다 작은 양수이다. 식 (18)로부터 수렴 인자

$$\mu^a(m, n) = \frac{\alpha\beta}{\sum_{(i,j) \in R_s} \sum_{k,l \in R_s} x^2(m-i, n-j)} \quad (19a)$$

$$\mu^b(m, n) = \frac{\alpha(1-\beta)}{\sum_k \sum_l e^2(m-k, n-l)} \quad (19b)$$

를 얻으며 여기서 $0 < \alpha < 0.5$ 그리고 $0 < \beta < 1$ 이다. 따라서 식 (19)는 매 순환에서 계수를 update할 때에 동일한 수렴인자를 사용한다면 $\mu^a(i, j)$ 와 $\mu^b(k, l)$ 의 최적값이된다.

ADPCM에 적용시 식(1), (4) 그리고 식 (19)에 나타나있는 $x(m-i, n-k)$ 는 재구성된 신호의 값 $x_r(m-i, n-k)$ 을 사용하며, $e(m-k, n-l)$ 은 양자화된 오차값 $e_q(m-k, n-l)$ 값을 사용한다.

4. 실험 결과

본 실험에서는 그림 2의 256x256 크기의 8 bit 영상에 그림 1의 ADPCM을 적용하였다. 양자기는 2 bit 균등 양자기를 사용하였으며 step크기는 14로 하였다. ARMA예측기의 차수는 AR항이 4차, MA항은 8차이다. 이 실험에서는 3종류의 예측기를 적용하였다. 하나는 AR항만 존재하는 예측기로 예측오차를 활용하지 않는 것이다. 다른 예측기는 ARMA 예측기로 하나는 AR항이 고정되고 MA 항만 적용되는 예측기이며 다른 하나는 AR 및 MA항 모두 적용인 예측기이다. 예측기의 초기값으로 AR항은 [-.653, .440, -.033, -.072]를 사용하고 AR항은 모두 0으로 하였다. 그림 3은 원래의 영상과 재구성된 영상과의 왜곡을 나타내는 그림으로 (a)는 AR 예측기만 사용한 경우이며 (b)는 ARMA 예측기에서 AR항이 고정된 경우이고 (c)는 AR항 및 MA항이 모두 적용인 경우이다. 그림 3(a)에서부터 (c)까지 감에 따라 왜곡의 정도가 감소함을 알 수 있으며 (a)는 15.1 [dB], (b)는 16.15 [dB], (c)는 16.9 [dB]를 갖는다. 위의 결과로부터 예측기가 AR항으로만 된 것보다는 예측오차를 고려한 ARMA 예측기가 더 좋은 결과를 줄 수 있으며 적용하는 항이 많을수록 더 좋은 결과를 나타낸다.

5. 결론

본 연구에서는 gradient 알고리듬의 일종인 TRLMS의 적용 수렴인자의 제한조건과 이를 바탕으로 적용 수렴인자를 유도하였다. 최적값은 적용 필터가 스스로 최적값을 갖게끔 시스템 신호들에 의해 생성된다. 이 적용 수렴인자를 갖는 예측기를 DPCM 시스템에 적용하여 실 영상에 적용한 결과 AR 예측기보다 예측오차를 고려한 ARMA 예측기가 더 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있었으며 적용 항이 많을수록 더 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있다.

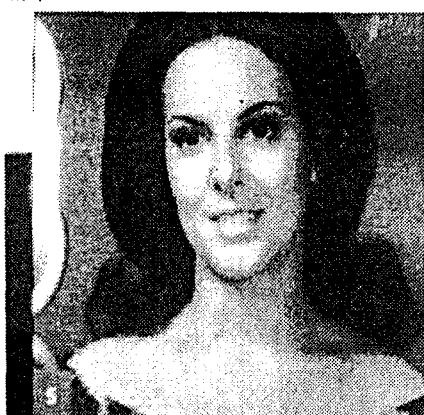
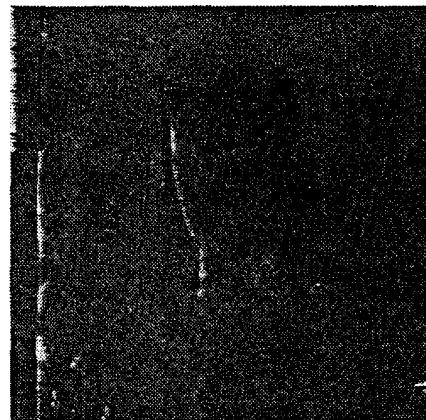
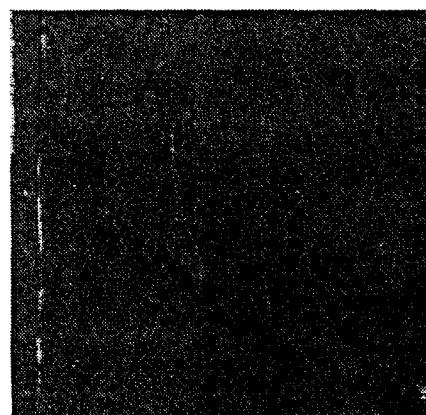


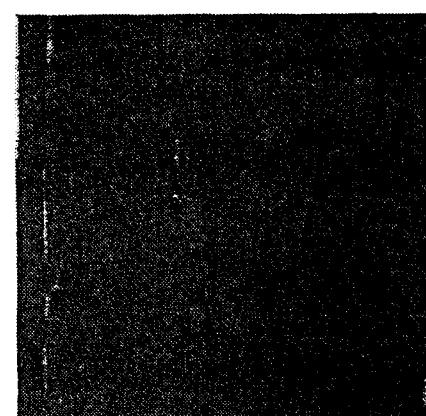
그림 2. Test 영상



(a)



(b)



(c)

그림 3. (a) AR 예측기 ($\alpha=0.05$) (b) ARMA 예측기(AR항 고정, $\alpha=0.05$) (c) ARMA(AR항, MA항 적용, $\alpha=0.05$ $\beta=0.26$)

참고 문헌

- [1] CCITT, "Red book, digital networks, transmission system and multiplexing equipment.", Vol. -III. Geneva, 1985
- [2] K. Saywood and S. M. Schelcail, "Use of ARMA predictor in the differential encoding of images," IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., Vol. ASSP-36, Nov. 1988, pp. 1791-1795.
- [3] C. R. Johnson, Jr., "Adaptive IIR filtering: Current results and open issue," IEEE Trans. Information Theory, Vol. IT-30, Mar. 1984, pp. 1151-1162.
- [4] P. L. Feintuch, "An adaptive recursive LMS filter," Proc. IEEE, Vol. 64, Nov. 1976, pp. 1622-1624.