

Bonhoeffer - van der Pol 오실레이터 모델에서의 미소 파라미터 섭동에 의한 카오스 제어

배 영 철^{**o} · 고 재호* · 임 화영*

광운대학교 공과대학

*제어 계측 공학과

**전기 공학과

The study of Controlling chaos for Bonhoeffer-van der Pol oscillation model by small parameter perturbation

Bae yeong - cheol*, Ko jae - ho*, Yim wha - yeong*

*Dept. of control and instrumentation Eng. ** Dept. of electrical Eng. Kwangwoon Univ.

Abstract

Applied by periodic Stimulating Currents in Bonhoeffer-Van der Pol(BVP) model, chaotic and periodic phenomena occurred at specific conditions. The conditions of the chaotic motion in BVP comprised $0.7182 < A_1 < 0.792$ and $1.09 < A_1 < 1.302$ proved by the analysis of phase plane, bifurcation diagram, and Lyapunov exponent. To control the chaotic motion, two methods were suggested by the first used the amplitude parameter A_1 , $A_1 = \varepsilon((x-x_s) - (y-y_s))$ and the second used the temperature parameter c , $c = c(1 + \eta \cos \Omega t)$ which the values of η, Ω varied respectively, and x_s, y_s are the periodic signal. As a result of simulating these methods, the chaotic phenomena was controlled with the periodic motion of periodicity. The feasibilities of the chaotic and the periodic phenomena were analysed by phase plane and Lyapunov exponent.

I. 서론.

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다[1, 2]. 많은 생물학적 리듬과정들은 리미트 사이클 거동을 보여주는 비선형 미분방정식으로 표현되는 발진 시스템과 밀접한 관계를 갖고 있으며 이 발진들은 안정한 범위에서 제어파라미터 값의 변화에 대응하여 보다 안정화 할 수 있다. 외부에서 주기적인 힘을 인가할 때 비선형 시스템은 주기 배증 과정을 거쳐 카오스 현상으로 전이된다[3, 4].

2개의 변수를 가진 여기된 신경막과 신경 세포막에 전기적 임펄스와 전압 폴스의 지연을 다음과 같이 2개의 방정식으로 나타낼 수 있으며 이를 Bonhoeffer-Van der pol(BVP) 모델이라 부른다[5, 6].

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + I(t) \quad (1)$$

$$\dot{y} = c(x + a - b y) \quad (2)$$

여기서 x 는 막전위, y 는 자극으로 부터 막의 회복을 나타내는 시정수에 관련된 변수, $I(t)$ 는 외부에서 가한 주기적 자극전류를 나타낸다.

BVP모델에 대한 연구로서 Kawato와 Suzuki[6], Okuda[5]는 주기적 자극전류가 없는 상태 ($I=0$)에서 In-phase와 Anti-phase의 안정도, Threshold와 Shaping의 활동, 잡음의 영향에 대한 연구, 주기적 자극전류를 인가하여 카오스 신호를 생성[10]한 연구가 있었다.

본 논문에서는 BVP 모델에 주기적 자극전류를 인가하여 카오스 신호를 생성하고 미소 파라미터 섭동에 의하여 카오스 신호를 주기신호로 바꾸어 주거나 그 크기를 줄여 주는 제어를 행하였으며 이에 대한 타당성을 위상 공간과 Lyapunov exponent로 증명하였다.

II. BVP모델에서의 주기 배증과정과 카오스 현상 해석

식(1)과 식(2)에서 주기적 자극전류 $I(t) = A_1 \cos \omega t$ 를 인가하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + A_1 \cos \omega t \quad (1a)$$

$$\dot{y} = c(x + a - b y) \quad (2a)$$

식(1a)과 식(2a)에서 a, b, c 는 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다. [5, 6]

$$b < 1 \quad (3)$$

$$3a + 2b \geq 3 \quad (4)$$

$$b < c^2 \quad (5)$$

1. A_1 값의 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동 해석

식 (1a)와 식 (2a)에서 주기적 자극전류 $I(t) = A_1 \cos \omega t$ ($\omega = 1.0$)을 $A_1 > 0$ 의 조건이 되는 A_1 의 크기를 변화하였을 때 위상 공간을 조사하였다.

(1) $0 < A_1 < 0.6070$ 일 때

$0 < A_1 < 0.6070$ 범위에서는 그림1에 나타난 것과 같이 1주기 운동을 하고 있다.

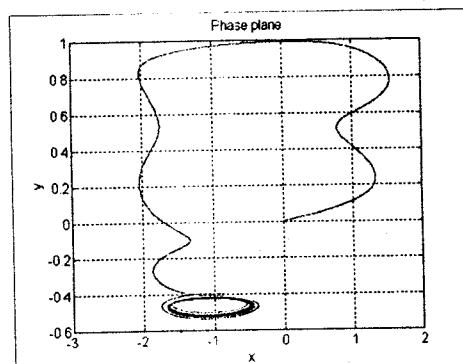


그림1. $A_1 = 0.6070$ 일 때 위상공간

(2) $0.6070 < A_1 < 0.7182$ 일 때

$0.6070 < A_1 < 0.7182$ 범위에서는 그림2에서 보는바와 같이 2주기 운동이 이루어짐을 확인 할 수 있으며 A_1 의 값이 커질수록 4주기, 8주기 등의 주기배증 과정이 이루어진다.

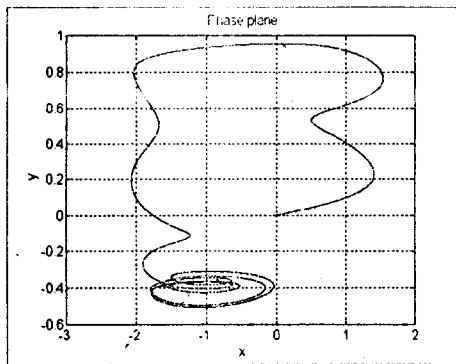


그림2. $A_1 = 0.7181$ 일 때 위상공간

(3) $0.7182 < A_1 < 0.792$ 및 $1.09 < A_1 < 1.302$ 일 때
 $0.7182 < A_1 < 0.792$ 및 $1.09 < A_1 < 1.302$ 범위에서는
그림3에서 보는바와 같이 카오스 운동이 이루어짐을 확인할 수 있다. 그림3은 A_1 이 0.76, 그림 4는 A_1 이 1.28 일 때의 위상공간에 대한 카오스 현상을 나타내었다.

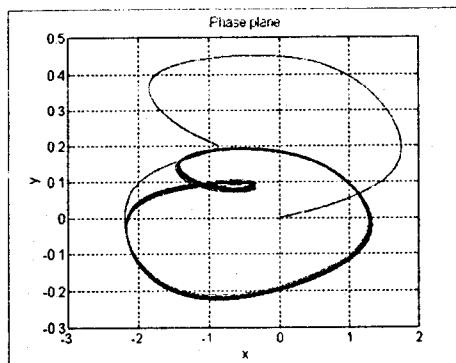


그림5. $A_1 = 1.62$ 일 때 위상공간

2. 분기(Bifurcation) 및 Lyapunov exponent 의한 주기비증 과정과 카오스 운동 해석
식 (1a), (2a) A_1 값의 변화에 의해 주기운동과 카오스 운동을
분기점을 통해 확인해 보았다. A_1 값을 0부터 1.8까지 변화하였을 때
분기점을 그림6에 Lyapunov exponent를 나타내었다.

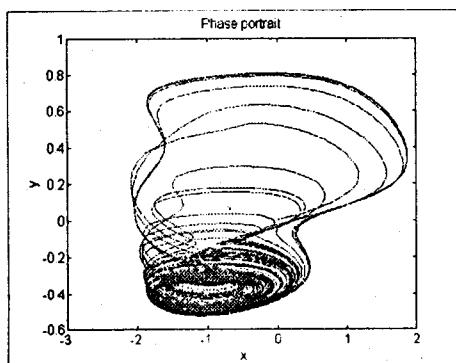


그림3. $A_1 = 0.76$ 일 때 위상공간

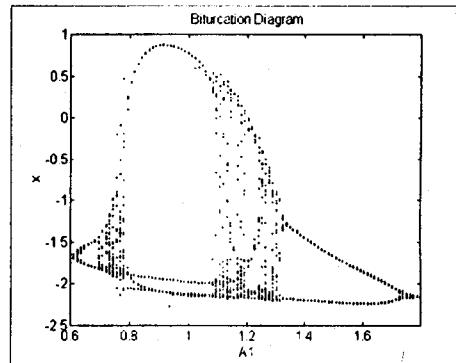


그림6. 분기도 ($0.6 < A_1 < 1.8$)

그림 6에서 A_1 이 0.6070일 때 2주기의 분기가 발생하고
0.7182일때 주기 배증이 계속되어 Band Merging 점들이 모여
있음을 알 수 있고 0.7181 이후에 카오스 현상이 일어남을 확인할 수 있다. 또한 $q \times 2^n$ (q 는 정수 n 은 주기 q 의 기본적
주기 궤도의 주기적 배증의 차수를 나타낸다)의 주기를 가진
고차주기인 경우 원도우(분기점에서 하얀 부분)들이 나타나며
이 사실로 부터 카오스현상이라는 것이 분명해진다.

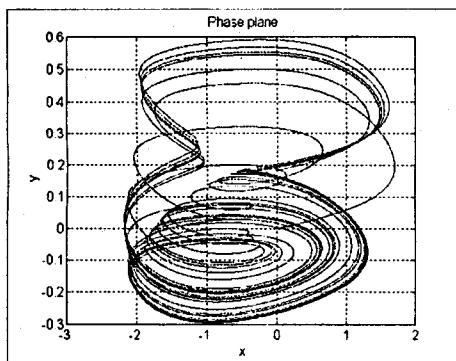


그림4. $A_1 = 1.28$ 일 때 위상공간

(4) $A_1 > 1.29$ 일 때
진짜 A_1 값을 1.29보다 큰 값으로 변화하면 카오스 운동에서
주기운동으로 바뀐다. BVP모델은 A_1 값에 따라 주기운동에서 카
오스 운동으로 카오스 운동에서 주기운동으로의 역현상이 일
어남을 알 수 있다.

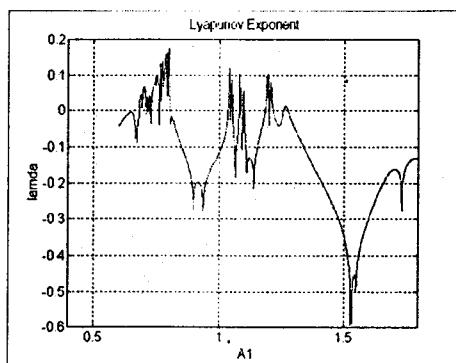


그림7. 리아프노프 지수 ($0.6 < A_1 < 1.8$)

III. 진폭 A_1 값의 섭동에 의한 제어
 본 논문에서는 식(1a)와 식(2a)에서 카오스 운동이 일어날 때 주기적 자극 전류에서 λ 값의 미소 섭동에 의한 제어방법을 제시하였다. 카오스 신호를 원하는 주기 신호인 $x_s = (x_s(t), y_s(t))$ 로 제어하기 위해 주기적 자극 전류의 진폭 A_1 값을 적용 제어 알고리즘[11]을 적용하여 다음과 같이 처리하였다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon G(X - X_s) \\ &= \varepsilon ((x - x_s) - (y - y_s)) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 ε 은 제어의 강인성, G 는 X_s 와 실제 출력값 X 사이의 차에 비례하는 합수를 나타낸다. 식(6)에서 제어하고자 하는 주기신호 $x_s = a + b\cos(\omega t) + c\sin(\omega t)$.

$y_s = d + e\cos(\omega t) + f\sin(\omega t)$ 를 주어 각 계수의 값을 조정하면 카오스에서 1주기 운동으로 제어됨을 그림8에 나타내었다.

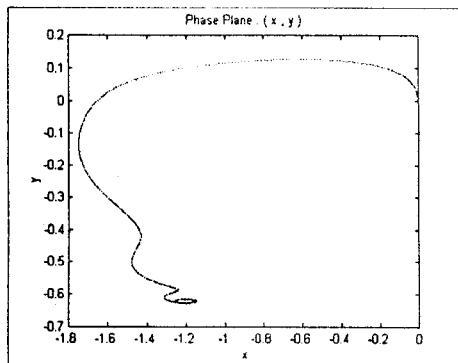


그림8. 진폭 섭동에 의해 제어한 위상 공간.

IV. 온도요소 C의 섭동에 의한 제어

식(1a)와 (2a)에서 온도 요소 C에 의한 카오스 신호를 주기 신호를 제어하기 위해 온도 요소 C대신 $c(1 + \eta \cos \Omega t)$ 인 미소 파라미터를 인가하면 다음 식과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3/3 - y + A_1 \cos \omega t \quad (7)$$

$$\dot{y} = c(1 + \eta \cos \omega t)(x + a - b y) \quad (8)$$

식(7)과 (8)에서 Melnikov의 섭동 범위[8]를 만족하는 η 의 값과 Ω 의 값을 정하여 변화시키면 카오스 운동에서 주기 운동으로 제어가 이루어진다.

본 논문에서는 식(7)과 (8)에서 주기적 자극 전류가 발생하는 조건인 A_1 을 0.76으로 놓고 미소한 파라미터의 특성을 나타내기 위하여 $0 < \eta < 0.4$, 범위와 $0 < \Omega < 2$ 의 범위에서 카오스 운동이 주기운동으로 제어됨을 위상 공간과 Lyapunov exponent로 확인하였으며 결과를 그림9, 그림10에 나타내었다.

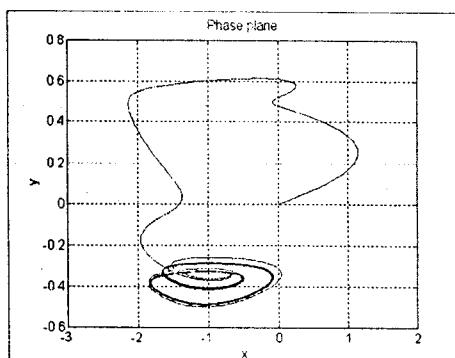


그림9. $Q=1$, $0.105 < \eta < 0.325$ 일 때 제어 후 위상공간

그림9에서 $Q=1$, $0.105 < \eta < 0.325$ 의 범위에서는 카오스 운동이 2 주기운동으로 제어가 이루어짐을 알 수 있다.

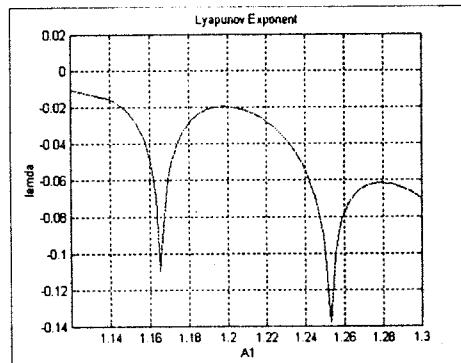


그림10. 제어한 후의 리아프노프 지수

그림 10에서 제어결과를 살펴보면 리아프노프 지수가 음수로 주기 운동을 나타내어 만족한 결과를 얻었다.

V. 결론

본 논문에서는 BVP 모델에서 주기적 자극 전류를 인가 하였을 때, A_1 값의 변화에 따라 주기 운동과 카오스 운동이 나타남을 비교 분석하고 미소 파라미터 섭동에 의한 카오스 운동을 주기 운동으로 제어하기 위한 방법을 자극 전류의 진폭 A_1 값을 적용 제어 알고리즘에 의한 방법과 온도 요소 $C(1 + \eta \cos \Omega t)$ 의 섭동을 가하여 Q 과 η 값의 변화에 의한 제어하는 방법을 제시하였고 이를 시뮬레이션을 통해 증명하였으며 만족할 만한 결과를 얻었다.

참고문헌

1. 배 영철, 카오스의 응용, 전자저널, pp110 - 112, 93.1.20
2. J.P. Gollub, T.O. Brunner, and B.G. Danly, "periodicity and Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators" science, 200, pp. 48 - 50, 1978.
3. A.v.Holden, ed., chaos, Manchester univ. press , 1986.
4. N.Minokey, Nonlinear Oscillation, Van Nostrand, 1962.
5. M.Okuda, "A New Method of Nonlinear Analysis for threshold and shaping Actions in Transient states " progr. Theor. phys. 66, pp 90 -100, 1981.
6. M.Kawatu, and R.Suzuki, " Two Coupled Neural Oscillators and a Model of the Circadian pacemaker " J. Theor. Biol. 86, pp 574 - 575, 1980.
7. A wolf, J.B swift , H.L swinney and J.A. Vastano, " Determining Lyapunov exponent from a time series" physica D , 16, pp 285 - 317, 1985.
8. J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems , and Bifurcations of Vector Field, Springer - Verlag, 1983.
9. E.Ott, C.Grebogi and J.A.Yorke, " Controlling chaos" Phys. rev. Lett 64, pp 1196-1199, 1990.
10. 고재호, 배영철, 임화영, "주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer - Van der pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구" 1995 제어계측 연구회 학술 발표회 논문집, pp 100-102, 1995.
11. B.A. Huberman & E.Lumer "Dynamics of adaptive system" IEEE Trans. Circuit and System, 37 pp 547-550, 1990.