

非線形 시스템의 퍼지 모델링 기법과 안정도 해석에 관한 연구

* 이준탁, ** 소명우, * 이상석, * 지석준, * 김태우

* 동아대학교 전기공학과 ** 한국해양대학교

Fuzzy Modeling Technique of Nonlinear Dynamical System and Its Stability Analysis

* J.T. Lee, ** M.O. So, * S.S. Lee, * S.J. Ji, * T.W. Kim

* Dept. of Electrical Engineering, Dong-A Univ.

** Korea Maritime Univ.

Abstract—This paper presents the linearized fuzzy modeling technique of nonlinear dynamical system and the stability analysis of fuzzy control system.

Firstly, the nonlinear system is partitionized by multiple linear fuzzy subcontrol systems based on fuzzy linguistic variables and fuzzy rules. Secondly, the disturbance adaptation controllers which guarantee the global asymptotic stability of each fuzzy subsystem by an optimal feedback control law are designed and the stability analysis procedures of the total fuzzy control system using Lyapunov functions and eigenvalues are discussed in detail through a given illustrative example.

1. 서론

최근, 제어대상의 모델화가 어렵거나 비선형성이 강한 시스템의 제어 기법으로서 1965년 L.A.Zadeh에 의해 제시되어진 퍼지 이론이 시멘트 퀸론에의 적용을 시발로 하여 많은 산업 현장에서 적극 적용되고 있다.

그러나, 퍼지 시스템을 설계한다는 것은 단순한 과제가 아니다. 실제로, 퍼지제어 시스템은 종래의 PID 제어기나 정확한 모델에 근거하여 설계된 어떠한 종류의 제어기 보다도 많은 자유도를 갖고 있으며, 강인한 특성을 갖는 비선형 제어기이다. 특히, 제어기의 구조를 결정한다거나, 퍼지규칙의 생성 및 제어기의 동작은 어려운 과제 중의 하나이다.^[1~4]

이같은 요구에 부응하여, 최근에는 퍼지제어기를 설계할 수 있는 다양한 소프트웨어들이 시판되고 있으나 아직 미비한 점이 많으며, 규칙과 멤버쉽 함수의 오선정으로 인한 불안정 현상도 빈발하고 있는 실정이다. 이처럼 비선형 제어기의 일종인 퍼지제어 시스템의 안정도 해석은 면밀하게 실행되어져야 하며, 구체적인 해석절차가 요구되고 있다. 최근 비선형 시스템의 입출력에 대한 퍼지 모델화 방법이 제시되면서, 퍼지-신경회로망이나, 확률적기법 등을 이용한 각종 안정도 해석법이 제시되고 있다. 그러나, 제안된 방법들은 입출력 변수가 퍼지집합으로 표현되고, 제어대상의 특성들이 퍼지관계로 기술되므로, 실제 대상을 정화한 퍼지 모델로 구성하는 데는 많은 어려움이 따른다.^[5] 특히, Lyapunov 함수를 이용한 안정도 해석법은 Lyapunov 함수 구성을 방법의 어려움에도 불구하고, 비선형 미분방정식을 풀지 아니하고도 평형상태를 알 수 있기 때문에, T.Takagi씨 등은 L계의 선형 서브 시스템에 대해 Lyapunov 부등식으로부터 유도되는 공통의 정정행렬(Common Positive Definite Matrix) P의 영역을 구해내고자 하였으나, 반복적인 방법에 의존해야 되고, 2차의 퍼지시스템에 제한되며, 정상상태변화의 잔존현상등에 대한 명확한 검증 또한 없는 실정이다.

따라서, 본 논문에서는 주어진 비선형 시스템을 다수 개의 선형 서브 시스템으로 정화하여 퍼지 모델링하는 기법을 제안하고, 각 선형 서브 시스템의 안정도를 보증하는 외란 적용 최적 제어기 구성을 전제로 하여 전체 퍼지제어 시스템이 대역적으로 접근 안정해질 수 있는 안정화 퍼지 제어기의 설계 기법도 제안한

다. 또한, 예제로 주어진 비선형 시스템에 이들 이론을 직접 적용하여, Lyapunov 부등식 및 고유치 검증을 통한 안정도 해석으로부터 각 선형 퍼지 서브 시스템이 접근 안정하면, 전체 퍼지 시스템도 정상상태의 잔류 편차 없이 접근 안정하게 됨을 보이고자 한다.

2. 퍼지 시스템의 구성

퍼지 시스템 구성을 위하여 사용하고자 하는 비선형 모델은 원통형 동기기의 운동방정식으로부터 유도된

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - Dx_2 + f(x_1) \end{aligned} \quad (1)$$

을 사용한다. 단, u는 제어입력이며, 비선형항 $f(x_1)$ 에 대해서 $f(x_1) = a \cdot g(x_1)$ 이다.

일반적으로, 식 (1)을 해석하는 방법으로는 금수해법에 의한 준선형계로의 구성법, 주기해를 구하는 Poincarer의 섭동법, 조파 선형화법의 한 용인인 기술함수법 및 동작점 근방에서의 섭동법 등이 있으나, 선형 퍼지 시스템으로 표현하는 경우, 불안정 현상이 수반되기도 한다.^[6] 먼저, 식 (1)에 대한 퍼지제어 시스템의 구성은 제어 플랜트를 표현하는 퍼지 모델 R^i 와 퍼지 제어기 U^i 를 그림 1과 같은 단일입력 단일출력 퍼지 시스템으로 도시 할 수 있다.

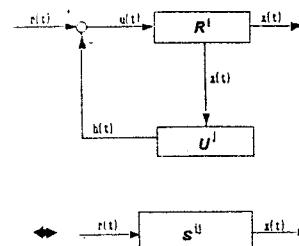


Fig.1 Connection Diagram of Nonlinear Fuzzy System

그리고, 그림 1에서 퍼지모델 R^i , 퍼지제어기 U^i 를 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} R^i : & \text{ If } x_1 \text{ is } M_i \text{ and } x_2 \text{ is } N_i \\ & \text{ Then } x^i = A_i x + B_i u + D_i \phi_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U^i : & \text{ If } x_1 \text{ is } M_i \text{ and } x_2 \text{ is } N_i \\ & \text{ Then } u_i = F_i x + u_{i\phi} \end{aligned}$$

이기서, A_i 는 $n \times n$ 차원, B_i, D_i 각각은 $n \times 1$ 차원을 갖는다. $i(i=1,2,\dots,L)$ 번째 규칙의 각각의 상태 x 를 나타내는 퍼지 변수 M_i 및 N_i 는 식 (3)과 같이 정의되는 멤버쉽 함수로서 그림 2와 같이 도시된다.

$$\begin{aligned}\mu_{M_i}(x_1) &= \frac{1}{1+a_i(x_1+b_i)^2} \\ \mu_{N_i}(x_2) &= \frac{1}{1+c_i(x_1+d_i)^2}\end{aligned}\quad (3)$$

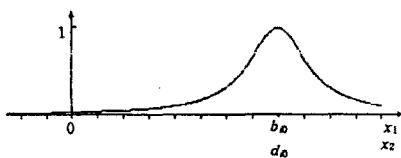


Fig.2 Representations of Fuzzy Variable M_i and N_i
그림 2로 부터 비선형함 $g(x_1)$ 은 아래와 같이 표현된다.

$$g(x_1) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1) \cdot g_i(x_1)}{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1)} \quad (4)$$

여기서, $g_i(x_1)$ 은 그림 3으로 부터 임이지는 각 구간별 선형 함수로서 식(5)와 같은 꼴로 주어 진다.

$$g_i(x_1) = a_i x_1 + b_i \quad (5)$$

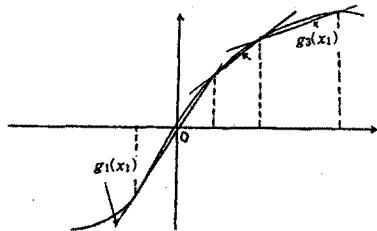


Fig.3 Piecewise Linearizations of $g(x_1)$

그리고, i 번째 퍼지 제어기의 규칙에 대한 제어 입력 u_i^* 는

$$u_i^*(x_1, x_2) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1) \cdot \mu_{N_i}(x_2) \cdot u_i(x_1, x_2)}{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1) \cdot \mu_{N_i}(x_2)} \quad (6)$$

로 계산되며, 최적 제어항 $F_i x$ 와 외란항 $D_i \phi$ 를 완전 흡수할 수 있는 제어항 u_{eff} 의 합으로서, 참고문헌(8)에서 구해지는 외란 적용 피드백 이득 F_i ($i = 1, 2, \dots, n$)로 주어진다. 퍼지제어기와 퍼지 서보 시스템 모델을 연결하면, 연결된 퍼지 제어 시스템 S^* 은

$$S^* : \text{If } x_1 \text{ is } M_i \text{ and } x_2 \text{ is } N_i \text{ and } u_i \text{ is } F_i x \\ \text{Then } x^T = (A_i + B_i F_i) x \quad (7)$$

이다. 따라서, 전체 퍼지 제어 시스템은 식 (8)과 같이 구해진다

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1) \cdot \mu_{N_i}(x_2) \cdot (A_i x + B_i F_i x)}{\sum_{i=1}^n \mu_{M_i}(x_1) \cdot \mu_{N_i}(x_2)} \quad (8)$$

$$= Ax$$

3. 안정도 해석

퍼지시스템의 안정도 해석은 먼저, 식(1)의 선형 퍼지 서보 시스템 모델을 안정하게 하는 최적 제어입력 u_i 를 구하는 것과 전체 퍼지 제어 시스템 식(8)의 계수행렬 A 의 고유치가 음의 근을 가지는지의 여부를 판단하면 된다. 또는, Lyapunov 함수로부터 유도되는 Lyapunov 부등식으로부터 공통의 정정행렬 P 의 존재 여부를 판단함으로서 해석될 수 있다.

$$x = Ax + Bu \quad (9)$$

$$y = Cx$$

인 시스템에 대해 다음과 같은 Lyapunov 함수를 가정한다.

$$V(x(t)) = x^T P x \quad (10)$$

여기서, P 는 정정행렬이며, Lyapunov 함수의 도함수 $\dot{V}(x(t))$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= -x^T Q x + 2u^T B^T P x\end{aligned}\quad (11)$$

한편, i 번째 규칙의 선형 서보 시스템에 대해 대칭 정정 행렬 Q_i 가 주어질 경우,

$$A^T P_i + P_i A_i = -Q_i < 0 \quad (12)$$

인 Lyapunov 방정식을 만족하는 각각의 정정 대칭 행렬 P_i 가 존재하면 선형 퍼지 서보 시스템은 대역적 점근 안정하게 된다. 그러나, 이 조건은 퍼지 시스템에 대한 충분 조건일 뿐이다. 왜냐하면, 각 퍼지 서보 시스템이 식 (12)를 만족하여 대역적 점근 안정하더라도, 이를 종합한 전체 퍼지 시스템은 반드시는 점근 안정하지 않다. 따라서, n 개의 서보 시스템에 대해 $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ 인 공통의 정정 대칭 행렬 P 가 존재해야 전체의 퍼지 제어 시스템은 대역적 점근 안정하게 된다. [1-4]

그리고, 식(11)의 두번째 항은 $\frac{dV}{dt} < 0$ 으로 부터, 실대칭 행렬

Q 의 고유치 즉, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 에 대해 Rayleigh 지수에 관계되는

$$\frac{x^T Q x}{x^T x} > \frac{2u^T B^T P x}{x^T x} \quad (13)$$

또는,

$$\lambda_{min} = \lambda_n \leq \frac{x^T Q x}{x^T x} \leq \lambda_1 = \lambda_{max} \quad (14)$$

인 부등식을 만족해야 한다. 따라서, 이상의 두식으로 부터

$$\lambda_{min}(Q) > 2 \frac{x^T P B u}{\|x\|^2} \quad (15)$$

를 만족하면 점근안정한 시스템이 된다. 이러한, 최적 제어 입력 u 는

$$J = \int_0^\infty (x^T Q_i x + u^T R_i u) dt \quad (16)$$

를 최소로 하는 것으로, 각 서보 시스템에 대해 다음과 같이 구해진다.

$$u_i = F_i x, \quad F_i = -R_i^{-1} B_i^T P_i \quad (17)$$

여기서 F_i 는 이득 행렬이고 P_i 는 다음 대수 Riccati 방정식의 해행렬이다.

$$A^T P_i + P_i A + Q_i - P_i B R_i^{-1} B^T P_i = 0 \quad (18)$$

따라서, 선형 퍼지 서보 시스템을 안정화시키는 각각의 외란 적용 최적 제어입력 식(17)과 식 (18)의 해인 n 개의 P_i 가 공통으로 되는 P 에 의해 전체 시스템은 대역적 점근 안정하게 된다. 즉, 각각의 퍼지 서보 시스템이 안정하고 공통의 정정행렬 P 가 존재하면, 전체 시스템은 음인 고유치를 갖게 되고 점근안정하게 된다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

식 (1)에서 $D=0.0138$ 이며, $a=-2$ 인 경우에 대해 고찰한다. 먼저, 비선형 시스템의 비선형함 $f(x_1) = a \sin(x_1)$ 의 퍼지 모델링은 그림 3에서 분할한 바와 같이 x_1 에 대한 퍼지변수를 $NB_2, NB_1, NM, NS, ZO, PS, PM, PB_1, PB_2$ 로 취해 구한다. 그리고, 이를 각 퍼지변수는 그림 4와 같이 도시된다.

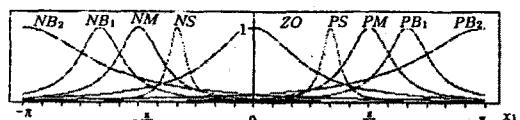
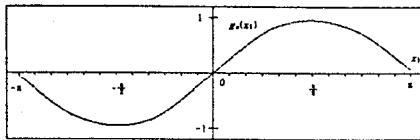
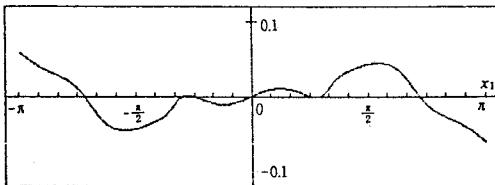


Fig.4 Membership functions of x_1

그리고, 이를 각 퍼지변수의 구간들에 대한 선형 근사하면, $\sin x_1$ 은 식(4)로 부터 그림 5(a)와 같이 도시된다. 그럼 5(b)는 퍼지 모델링 시의 오차를 나타내고 있는 테 거의 일치됨을 볼 수 있다.



(a) Graph of approximation eq.(4)



(b) Error between eq.(4) and $\sin x_1$

Fig.5 Fuzzy modeling of Nonlinear Term and its error

따라서, $f(x_1) = a \sin x_1$ 은 식(4)에서

$$f(x_1) = a \sin x_1 = a \sum_{i=1}^n \omega_i(x_1) \cdot g(x_1)$$

로 표현된다. 다음은 이를 선형 근사식을 이용해서 비선형 시스템인 식(1)을 9개의 선형 퍼지시스템으로 다음과 같이 모델링한다. 즉, 식(2)에서 선형 퍼지 서브 시스템이,

R^i : If x_1 is M_i , Then $x^i = A_i x + B_i u + D_i \phi_i$ 인 형식으로 표현되며,

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{2ii} & -0.0138 \end{bmatrix}, \quad B_i = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

와 같다.

따라서, 식(16)으로 부터 각각의 최적 피드백 이득 F_i 는 $Q_j = \text{diag}[10 \ 10]$ 및 $R_j = 1$ 일 때

$$\begin{aligned} F_1 &= [-5.6040 \ -4.5914], \quad F_2 = [-3.7201 \ -4.1624] \\ F_3 &= [-3.1623 \ -4.0266], \quad F_4 = [-2.6881 \ -3.9075] \\ F_5 &= [-1.7844 \ -3.6698], \quad F_6 = F_4 \\ F_7 &= F_3, \quad F_8 = F_2, \quad F_9 = F_1 \end{aligned}$$

로 되어, i 번째 각 선형 퍼지 서브 시스템의 고유치 λ_1^i 및 λ_2^i 는 다음과 같이 음의 값을 가진다.

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^1 &= [-3.5706, -1.0346] = \lambda_{1,2}^9, \quad \lambda_{1,2}^2 = [-3.1633, -1.0129] = \lambda_{1,2}^8 \\ \lambda_{1,2}^3 &= [-2.9788, -1.0616] = \lambda_{1,2}^7, \quad \lambda_{1,2}^4 = [-2.7606, -1.1606] = \lambda_{1,2}^6 \\ \lambda_{1,2}^5 &= [-1.8418 + j0.5495, -1.8418 - j0.5495] \end{aligned}$$

그림 6은 전체 시스템의 동특성을 나타내고 있으며, 식(8)에서 구해지는 전체 시스템의 계수행렬

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.6265 & -3.8623 \end{bmatrix}$$

에 대한 고유치는 $[-1.6105 \ -2.2518]$ 로서, 전체 퍼지 시스템도 대역적 접근안정성을 알 수 있다. 또한, 식(9)의 Lyapunov 함수로 부터 얻어지는 식(11)의 Lyapunov 부등식은

$Q = \text{diag}[1 \ 10]$ 일 때, 정정 대칭 행렬 P 는

$$P = \begin{bmatrix} 5.3567 & 0.1378 \\ 0.1378 & 1.3303 \end{bmatrix}$$

로 주어지게되는 테, 이는 각 선형 퍼지 서브 시스템의 접근안정을 보증하는 공통의 정정 행렬이 되므로, 전체 퍼지 시스템은 대역적 접근안정하게 된다.

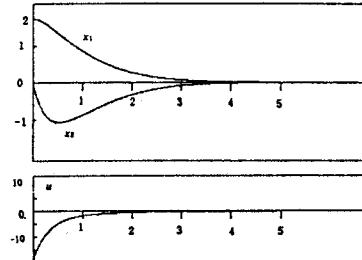


Fig.6 Dynamic Responses of Total System

5. 결론

비선형성이 강한 실제의 시스템을 퍼지 집합으로 표현되는 입출력 변수들로 나타낼 때는 정확한 퍼지 모델링 기법이 요구된다. 또한, 비선형 제어기의 일종인 퍼지 제어기의 안정도 해석 및 안정화 제어기의 설계 기법 확립을 위한 구체적인 절차도 요청되고 있다.

따라서, 본 논문에서는 주어진 비선형 시스템을 각각의 선형 퍼지 서브 시스템으로 정확히 모델링하는 하나의 기법을 제안하였다. 또한, 퍼지 안정화 제어기의 한 설계 기법으로서, 각 선형 서브 시스템의 안정성을 보장하는 외란 적용 최적 제어기를 구성함으로써, 음의 고유치 및 Lyapunov 부등식에서 얻어지는 공통의 정정 행렬 P 의 존재가 보증되어, 전체 퍼지 시스템이 대역적으로 접근안정하게 됨을 보였다.

참고문헌

- J.Holgado , A.Ollero and J. Aracil , "Statistical Study on Stability Indices of Fuzzy Control Systems", 0-7803-1896-x, pp.936-941,1994
- Shunji Kawamoto ,Kensho Tada et alii , "Construction and Stability Analysis of Fuzzy System for Fuzzy Control in Power Systems", 日本電氣學會 電力 エネルギー 部分大會, pp.9-10, 1993
- K. Tanaka and M.Sugeno, "Stability Analysis of Fuzzy Systems using Lyapunov's Direct Method and Construction Procedure for Lyapunov Functions", Proc. of NAFIPS'90,pp. 133-136, Sep.,1990
- K.Tanaka and M.Sano, "Concept of Stability Margin for Fuzzy Systems and Design of Robust Fuzzy Controllers", IEEE 0-7803-0614-7,pp.29-34, 1993
- S.Kawamoto et alii, "Construction of Exact Fuzzy System for Nonlinear System and Its Stability Analysis", 8th Fuzzy System Symposium, Hiroshima,pp.517-520,May,1992
- K.Tanaka and M.Sano, "Stability Condition for Design Problem of Fuzzy Controllers", Proc. of KJJCFSE,pp.21-24,1992
- K.Tanaka and M.Sano, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Set and Syst., vol.45, No.2, pp.135-156, 1992
- C.D.Johnson, "Adaptive Controller Design using Disturbance-Accomodation Techniques", Int.J.Control,Vol.42,No.1,pp.193-210,1985
- John.E.Gibson, Nonlinear Automatic Control, McGraw Hill Book Company,New York, 1963