'95 대한전기학회 하계학술대회 논문집(1995. 7. 20~22)

블럭펄스함수를 이용한 Tracking문제의 계층별 접근

안두수* 안비오* 김정환* 이재춘*
* 성균관 대학교 전기공학과

Hierarchical Approach of Tracking Problems via Block Pulse Functions

D.S.Ahn* Pius.Ahn* J.H.Kim* J.C.Lee*
* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.

Abstract This paper presents a algorithm of hierarchical approach to tracking problems for high order systems via BPF. In controlling the n-th oder systems for tracking problem, TPBVP has the 2n-th order. Generally, it is very difficult to otain the solutions due to its high order. In order to solve this fact, hierarchical approach is applied. And using the BPF Transformation, we simply obtained the solutions of decomposed low order TPBVP from the recursive algebraic equations.

1. 서 론

주어진 시스템의 차수가 고차인 경우 Tracking문제를 일반적인 최적제어 방법으로 풀 경우에는 높은 차수의 2점 경계치문제(TPBVP)를 포함하게 되므로 해를 구하는데 많은 어려움이 따른다. 그러므로 본 연구에서는 모델링된 시스템 차수가 큰 경우 해석에 많이 쓰이는 계층별 제어이론을 도입하고자 한다. 고차의 시스템을 저차의 상호 연관을 갖는 N개의 부시스템으로 분할하고, 상호예측 원리를 이용하여 상위단은 조정자 변수의 초기값을 하위단에 제공하고 하위단에서는 각각의 부시스템들이 최적화를 수행하여 상위단에 조정자 변수를 Upgrade하는데 필요한 정보를 전달하게 된다. 이러한 연산은 일정한 값에 수렴할 때까지 반복 수행하게 되며, 여기에서 Tracking문제의 최적제어 입력을 결정하고자 한다. 부시스템의 최적제어 입력을 결정하기 위해서는 일반적으로 행렬 리카디(Riccati) 미분방정식의 해를 구해야 하지만, 본 연구에서는 행렬 리카디 미분방정식을 직접 구하지 않고 변형된 표준형방정식과 상태천이행렬의 특성에 블럭펄스 함수를 사용해 간단한 대수방정식으로 바꿔 최적궤환 이득행렬을 구함으로써 원하는 부시스템의 최적제어벡터를 결정하고자 한다.

2. Tracking문제의 계층별 접근

선형 시불변 시스템을 아래과 같이 표현하자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

여기서, $\mathbf{x}(t) \in R^{n\times 1}$, $\mathbf{u}(t) \in R^{m\times 1}$, $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n\times m}$

(1)식의 시스템을 상호 연관된 N개의 부시스템으로 분할하여 표현한 i번째 부시스템은 아래와 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i\,\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}_i\,\boldsymbol{\pi}_i(t) \tag{2}$$

여기서, $\boldsymbol{\pi}_i(t) = \sum_{j\neq i}^{N} \mathbf{D}_{ij}\mathbf{x}_j(t)$.

$\boldsymbol{\pi}_i(t)$: Model coordination variable

평가함수를 분할한 형태는 아래와 같다.

$$J_i = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i(t_f) - \mathbf{r}_i(t_f)\|^2_{H_i} + \int_{t_0}^{t_f}\Big(\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^2_{Q_i} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_i(t)\|^2_{R_i} + \boldsymbol{\beta}_i^T(t)\Big[\boldsymbol{\pi}_i(t) - \sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{D}_{ij}\mathbf{x}_j(t)\Big]\Big)dt$$

여기서, $\boldsymbol{\beta}_i(t)$: Lagrange multipliers (3)

(2), (3)식으로부터 분할된 형태의 헤밀토니안을 정의하면 다음과같다.

$$H_i = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^2_{Q_i} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_i(t)\|^2_{R_i} + \boldsymbol{\beta}_i^T(t)\Big[\boldsymbol{\pi}_i(t) - \sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{D}_{ij}\mathbf{x}_j(t)\Big] + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t)\big[\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}_i\boldsymbol{\pi}_i(t)\big] \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\beta}_i^T\sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{D}_{ij}\mathbf{x}_j(t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\boldsymbol{\beta}_j^T\mathbf{D}_{ji}\mathbf{x}_i(t) \tag{5}$$

(5)식의 관계를 이용해서 H_i를 표현하면 (6)식과 같다.

$$H_i = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^2_{Q_i} + \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_i(t)\|^2_{R_i} + \boldsymbol{\beta}_i^T(t)\,\boldsymbol{\pi}_i(t) - \sum_{j\neq i}^{N}\boldsymbol{\beta}_j^T(t)\,\mathbf{D}_{ji}\,\mathbf{x}_i(t) + \boldsymbol{\lambda}_i^T(t)\big[\mathbf{A}_i\,\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i\,\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}_i\,\boldsymbol{\pi}_i(t)\big] \tag{6}$$

(6)식으로부터 Pontryagin의 최대원리를 이용해 i번째시스템의 2점경계치문제(TPBVP)를 유도하면 다음과 같다.

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{u}_i} = \mathbf{B}_i^T\boldsymbol{\lambda}_i(t) + \mathbf{R}_i\mathbf{u}_i(t) \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \frac{\partial H_i}{\partial}\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{C}_i\boldsymbol{\pi}_i(t) = \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\boldsymbol{\lambda}_i(t) + \mathbf{C}_i\boldsymbol{\pi}_i(t) \tag{8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t) = -\frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_i} = -\mathbf{Q}_i\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{Q}_i\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{A}_i^T\boldsymbol{\lambda}_i(t) + \sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{D}_{ij}\boldsymbol{\beta}_j(t) \tag{9}$$

(7)식으로부터 최적제어 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\boldsymbol{\lambda}_i(t) \tag{10}$$

(8), (9)식을 표준형방정식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_i(t)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i\mathbf{R}_i^{-1}\mathbf{B}_i^T\\ -\mathbf{Q}_i & -\mathbf{A}_i^T\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}_i(t)\\ \boldsymbol{\lambda}_i(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{C}_i\boldsymbol{\pi}_i(t)\\ \mathbf{Q}_i\mathbf{r}_i(t) + \sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{D}_{ij}\boldsymbol{\beta}_j(t)\end{bmatrix} \tag{11}$$

(11)식의 경계 조건은

$\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t_f) = \mathbf{H}_i\mathbf{x}_i(t_f) - \mathbf{H}_i\mathbf{r}_i(t_f) \tag{12}$$

분할된 시스템의 최적화를 위해서 본 연구에서는 상호예측원리를 이용해 조정자 변수를 조정하겠다. 상호예측원리는 상위단에서 하위단에 넘겨줄 다음번 조정자 변수 $\boldsymbol{\pi}_i(t)$와 $\boldsymbol{\beta}_i(t)$ 의 값을 계산한다는 것이다. 조정자 변수의 계산 방법으로는 equality updating방법을 써서 $\boldsymbol{\pi}_i(t)$와 $\boldsymbol{\beta}_i(t)$에 의해 조정된 시스템과 조정되지 않은 시스템을 같다고 가정하고 두 시스템의 사이의 상관 관계로써 $\boldsymbol{\pi}_i(t)$와 $\boldsymbol{\beta}_i(t)$ 값을 구하고자 한다. 조정되지 않은 i번째 부시스템

의 해밀토니안(Hamiltonian)은 아래와 같이되며

$$H_i = \frac{1}{2}\| x_i(t) - r_i(t) \|^2_{Q_i} + \frac{1}{2}\| u_i(t) \|^2_{R_i} + \lambda_i^T(t)[\ A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + C_i \sum_{j\neq i}^{N} D_{ij} x_j(t)] \quad (13)$$

(13)식으로부터 i번째시스템의 2점경계치문제(TPBVP)를 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{\lambda}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & -B_i R_i^{-1} B_i^T \\ -Q_i & -A_i^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \lambda_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_i \sum_{j\neq i}^{N} D_{ij} x_j(t) \\ Q_i r_i(t) - \sum_{j\neq i}^{N} D_{ij} C_i^T \lambda_i(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

(11), (14)식에 equality updating을 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_i(t) \\ \beta_i(t) \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq i}^{N} D_{ij} x_j(t) \\ -C_i^T \lambda_i(t) \end{bmatrix}^{k} \quad (15)$$

3. BPF를 이용한 Tracking문제의 계층별 접근

(11)식을 다음과 같이 표현하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{\lambda}_i(t) \end{bmatrix} = L_i \cdot \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \lambda_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_i(t) \\ N_i(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $L_i = \begin{bmatrix} A_i & -B_i R_i^{-1} B_i^T \\ -Q_i & -A_i^T \end{bmatrix}$

$M_i(t) = C_i \alpha_i(t)$, $N_i(t) = Q_i r_i(t) + \sum_{j\neq i}^{N} D_{ij} \beta_i(t)$

(16)식을 편의상 i번째 부시스템의 표현인 첨자 i를 생략하고 다시 표현하면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(t) \\ N(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

(17)식의 해를 구하기 위해 상태천이행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(t_f, t) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \hline \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{array}\right] \quad (18)$$

상태천이행렬의 특성은 다음과 같다.

$$\Phi(t_f, t_f) = I, \quad \frac{d}{dt}\Phi(t_f, t) = -\Phi(t_f, t) L \quad (19)$$

(17)식의 해를 구하면

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} M(\tau) \\ N(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (20)$$

여기서, 적분식으로 표현된 부분을 다음과 같이 표현하고

$$\begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} M(\tau) \\ N(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (21)$$

(21)식을 정리하면

$$x(t_f) = \Phi_{11}(t_f, t) x(t) + \Phi_{12}(t_f, t) \lambda(t) + G_1(t) \quad (22)$$

$$\lambda(t_f) = \Phi_{21}(t_f, t) x(t) + \Phi_{22}(t_f, t) \lambda(t) + G_2(t) \quad (23)$$

(17)식의 경계조건은 다음과 같고

$$\lambda(t_f) = H x(t_f) - H r(t_f) \quad (24)$$

(24)식에 (22)과 (23)식을 대입하여 $\lambda(t)$에 대하여 정리하면

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= [\ \Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1} [\ H\Phi_{11} - \Phi_{21}]\ x(t) \\ &\quad + [\ \Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1} [\ HG_1(t) - Hr(t) - G_2(t)] \\ &\triangleq K(t)\, x(t) + s(t) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, K(t) 는 Riccati 방정식의 해이며, s(t)는 개루프 보상벡터이다.

또한, 최적제어 벡터는 다음과 같이 표현되고

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1} B^T \lambda(t) \\ &= -R^{-1} B^T K(t) x(t) - R^{-1} B^T s(t) \\ &\triangleq F(t) x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, F(t)는 궤환이득행렬이고, v(t)는 명령신호로써 시스템의 파라미터와 기준입력 r(t)에 영향을 받는다.

(25)식을 (17)식에 대입하여 $\dot{x}(t)$에 대해서 정리하면

$$\dot{x}(t) = [\ A - BR^{-1}B^T K(t)]\ x(t) + [\ M - BR^{-1}B^T s(t)] \quad (27)$$

따라서 상태천이행렬 $\Phi(t_f, t)$값으로부터 K(t)와 s(t) 값을 구해서 (27)식의 해를 구함으로써 부시스템의 최적제어 벡터를 구할 수 있게 되는데, 본 연구에서는 블럭펄스 함수를 이용하여 이를 수행하고자 한다.

(19)식의 양변에 역방향 적분을 취하면

$$I - \Phi(t_f, t) = L \int_{t_i}^{t} \Phi(t_f, \tau) d\tau \quad (28)$$

$\Phi(t_f, t)$를 블럭펄스 함수로 전개시키면

$$\Phi(t_f, t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \Psi_k \quad (29)$$

여기서, $\varphi_k = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{11k} & \varphi_{12k} \\ \hline \varphi_{21k} & \varphi_{22k} \end{array}\right]$

(28)식에 블럭펄스 함수를 적용시키면

$$\varphi_m = [\ I - (\frac{t_f}{2m}) L]^{-1}$$

$$\varphi_k = \varphi_{k+1} [\ I + (\frac{t_f}{2m}) L]\ [\ I - (\frac{t_f}{2m}) L]^{-1} \quad (30)$$

단, k=1, 2, ……, m-1

K(t), s(t)를 각각 블럭펄스 함수로 전개시키면

$$K(t) = \sum_{k=1}^{m} k_k \Psi_k, \quad s(t) = \sum_{k=1}^{m} s_k \Psi_k \quad (31)$$

(25)식에서

$$K(t) = [\ \Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1} [\ H\Phi_{11} - \Phi_{21}] \quad (32)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= [\ \Phi_{22} - H\Phi_{12}]^{-1} \\ &\quad [\ H \int_t^{t_f} (\Phi_{11} M(\tau) + \Phi_{12} N(\tau)) d\tau \\ &\quad - Hr(t) - \int_t^{t_f} (\Phi_{21} M(\tau) + \Phi_{22} N(\tau)) d\tau] \end{aligned} \quad (33)$$

여기서, M(t), N(t), r(t)를 블럭펄스 함수로 전개하면

$$M(t) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \Psi_k, \quad N(t) = \sum_{k=1}^{m} \nu_k \Psi_k \quad (34)$$

$$r(t) = \sum_{k=1}^{m} r_k \Psi_k \text{ 이므로} \quad (35)$$

(32)식에 블럭펄스 함수를 적용하면

$$k_k = [\ \varphi_{22k} - H\varphi_{12k}]^{-1} [\ H\varphi_{11k} - \varphi_{21k}] \quad (36)$$

(21)식의 $G_1(t)$, $G_2(t)$를 블럭펄스 함수로 전개하면 다음과 같다.

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{m} g_{1k} \Psi_k, \quad G_2(t) = \sum_{k=1}^{m} g_{2k} \Psi_k \quad (37)$$

(33)식에 블럭펄스 함수를 적용하면

$$s_k = [\ \varphi_{22k} - H\varphi_{12k}]^{-1} [\ H g_{1k} - H r_k - g_{2k}]$$

단, k=1, 2, ……, m (38)

$$g_{1m} = (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{11m} \mu_m + \varphi_{12m} \nu_m]$$

$$\begin{aligned} g_{1k} &= g_{1k+1} + (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{11k} \mu_k + \varphi_{12k} \nu_k] \\ &\quad + (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{11k+1} \mu_{k+1} + \varphi_{12k+1} \nu_{k+1}] \end{aligned} \quad (39)$$

$$g_{2m} = (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{21m} \mu_m + \varphi_{22m} \nu_m]$$

$$\begin{aligned} g_{2k} &= g_{2k+1} + (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{21k} \mu_k + \varphi_{22k} \nu_k] \\ &\quad + (\frac{t_f}{2m}) [\ \varphi_{21k+1} \mu_{k+1} + \varphi_{22k+1} \nu_{k+1}] \end{aligned} \quad (40)$$

그러므로 (27)식의 해는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\chi_1 = \eta_1 [\ \chi_0 + \omega_1]$$

$$\chi_{k+1} = \eta_{k+1} [\ \rho_k \chi_k + \omega_{k+1} + \omega_k] \quad (41)$$

단, k=1, 2, ……, m-1

$$\eta_k = [\ I - (\frac{t_f}{2m})(A - BR^{-1}B^T k_k)]^{-1}$$

$$\rho_k = [\ I + (\frac{t_f}{2m})(A - BR^{-1}B^T k_k)]$$

$$\omega_k = \left(\frac{t_f}{2m}\right)[\ \mu_k - BR^{-1}B^T s_k] \qquad (42)$$

4. 시뮬레이션

Airplane의 동적모델을 다음과 같이 표현하자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.01580 & 0.02633 & -9.810 & 0 \\ -0.1571 & -1.030 & 0 & 120.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0005274 & -0.01652 & 0 & -1.466 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -9.496 \\ 0 \\ -5.565 \end{bmatrix} u(t)\ ,\ x(0) = [\ -5.\ -50.\ 2.\ -2.\ ]^T$$

여기서 상태 변수들의 값은 다음과 같다.

$x_1(t)$: incremental speed along x-axis

$x_2(t)$: speed along z-axis

$x_3(t)$: pitch , $x_4(t)$: pitch rate

$$Q = \begin{bmatrix} 10. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 01. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}\ ,\ R = 5.0\ ,\ H = 5.0$$

시스템을 다음과 같이 2개의 부시스템으로 분할하자.

부시스템1 : (첨자는 부시스템의 표현)

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) + z_1(t)$$

$$z_1(t) = D_1(t)\, x_2(t)$$

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} -0.01580 & 0.02633 \\ -0.1571 & -1.030 \end{bmatrix},\ B_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.496 \end{bmatrix}$$

$$D_1(t) = \begin{bmatrix} -9.810 & 0 \\ 0 & 120.5 \end{bmatrix},\ x_1(0) = [\ 5.\ -50.\ ]^T$$

부시스템2 : (첨자는 부시스템의 표현)

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) + z_2(t)$$

$$z_2(t) = D_2(t)\, x_1(t),\quad x_2(0) = [\ 2.\ -2.\ ]^T$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.466 \end{bmatrix},\ B_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.565 \end{bmatrix}$$

$$D_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0005274 & -0.01652 \end{bmatrix}$$

여기서 , $r(t) = [\ 5.\ -2.\ 0.\ 0.\ ]^T$이다.

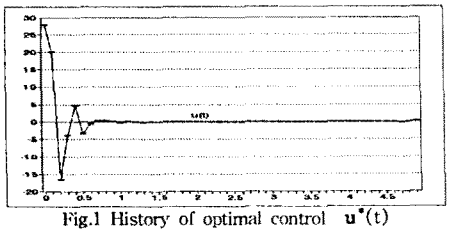

Fig.1 History of optimal control $u^*(t)$

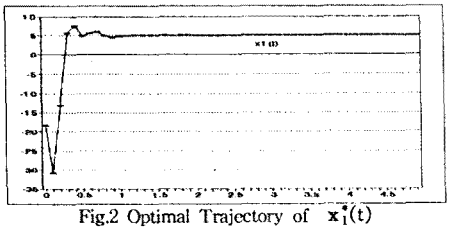

Fig.2 Optimal Trajectory of $x_1^*(t)$

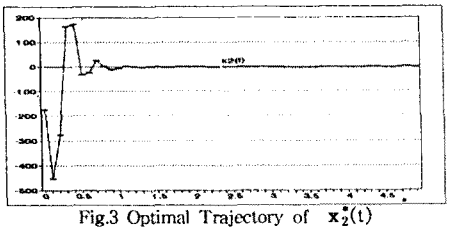

Fig.3 Optimal Trajectory of $x_2^*(t)$

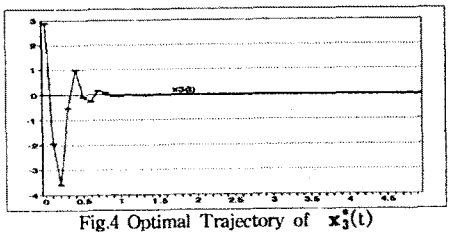

Fig.4 Optimal Trajectory of $x_3^*(t)$

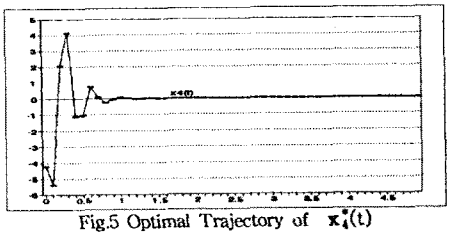

Fig.5 Optimal Trajectory of $x_4^*(t)$

5. 결 론

본 연구에서는 고차시스템에서의 Tracking문제를 계층별 제어 이론과 블럭펄스 함수를 이용하여 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다. N차의 시스템에서의 Tracking문제는 2N차의 2점경계치문제를 포함하게 된다. 따라서 시스템의 차수가 큰경우 높은 차수의 2점경계치 문제를 풀어야하는 부담을 갖게된다. 본연구에서는 이러한 점을 계층별제어 이론으로 시스템을 분할하여 낮은 차수의 2점경계치를 유도하고, 블럭펄스 함수를 적용 각각의 부시스템에서 이득값을 대수적 방정식으로부터 반복적으로 구할 수 있는 알고리즘을 제시하였다.

참고문헌

[1] M.S.Mahmoud, Large scale systems modeling, Pergamond Press,1981.

[2] M.D.Mesarovic, D.Macko, Takahara, Theory of hierarchical multilevel systems, Academi Press, New York, 1970.

[3] A.P. Sage, Optimum system control, Prentice-Hall, 1977.

[4] Ning Show Hsu & Bing Cheng, Analysis & control of time varying systems via block pulse functions, Int.J.Cont., Vol.33,No.6,1981.

[5] Brian D.O. Anderson & John B.Moore, Optimal Control - Linear quadratic Methods, Prentice-Hall, 1989.

[6] N.J. Smith and A.P. Sage, An introduction to hierarchical systems theory, COMP.&ELECT.ENG. Vol.1, pp 55-71,1973.

[7] L.S. Shieh and C.K. Yeung and B.C. Mcinnis, Solution of state space equation via block pulse functions, Int. J. Sys. Sci., Vol.28, No.3, pp383-392, 1978.

[8] Jian-Min Zhu and Yong-Zai Lu, New approach to Hierarchical control via block pulse transformation, Int. J.Control, Vol.46, No.2, pp441-453, 1987.