

입력 제한조건을 갖는 이동구간(Receding-Horizon) 예측제어

신현창^o, 김진환, 허우렬
인하대학교 전기공학과

Receding-Horizon Predictive Control with Input Constraints

Hyun chang Shin^o, Jin hwan Kim, Uk-youl Huh
Department of electrical engineering , Inha Univ.

Abstract

Accounting for actuator nonlinearities in control loops has often been perceived as an implementation issue and usually excluded in the design of controllers. Nonlinearities treated in this paper are saturation, and they are modelled as an inequality constraint. The CRHPC(Constrained Receding Horizon Predictive Control) with inequality constraints algorithm is used to handle actuator rate and amplitude limits simultaneously or respectively. Optimum values of future control signals are obtained by quadratic programming. Simulated examples show that predictive control law with inequality constraints offers good performance as compared with input clipping.

1. 서론

대부분 시스템에는 구동기(actuator)의 포화문제가 있다. 이러한 문제는 시스템 자체가 비선형이 아니더라도 전체 시스템 자체가 비선형성을 갖게된다. 만약 이런 비선형성이 고려되지 않으면 입력신호의 클리핑이 이루어져야 하고, 이것은 폐루프 시스템의 성능을 떨어뜨리는 요인이 된다[1]. 이러한 구동기 포화문제는 입력의 제한조건으로 나타난다. 따라서, 부등 제한조건(Inequality constraints)을 갖는 제어는 현실적인 면에서 매우 중요하다. 이러한 부등 제한조건을 적용할 Model based predictive control (MBPC)은 지난 몇 년간에 걸쳐 산업체에서 널리 쓰여지게 되었고, 많은 성공적인 용·용·사례들이 보고되어지고 있다[2]. 이러한 MBPC의 예측제어 구성은 시간영역에서 이루어지고, 이것은 특별히 부등 제한조건(Inequality constraints)을 프로세스 변수에 적용하는데 적당하며, 많은 MBPC 기법이 제안되어지고 있고, 널리 알려진 GPC의 경우, 예측구간[N1, N2, NU]에 대한 여러 안정도 이론들이 나와 있으나[3], GPC의 안정도는 무한 구간에 대한 안정도로 제한(무한대의 N2)된다는 문제가 있고, 중요한 것은 제어구간과 가중치(weight)의 폐루프 특성에 관한 명확한 이론이 아직 없다는 것이다. 제한 이동구간 예측제어(CRHPC)는 이런 문제점을 극복한 새로운 MBPC 방법의 하나로, GPC 와 최대 예측구간(N2) 이후의 일정한 구간에서 예측값이 기준값과 일치하도록 할동 제한조건(equality constraints)을 갖도록 예측입력을 구하게 된다. 이 제어기법은 제어하기 곤란한 불안정하면서 비최소 위상을 가지는 시스템에 대해서도 좋은 성능을 가지는 것으로 알려져 있다[3]. 이러한 특성을 갖는 제한 이동구간 예측제어(CRHPC)에 부등제한 조건을 적용하여 최적화 시킴으로써 구동기(actuator)의 제한조건으로

나타나는 입력 포화문제를 해결하려 한다. 2절에서는 플랜트의 모델과 예측제어기를 구성하며, 3절에서는 부등 제한조건을 모델링하고, 제한조건을 포함하여 제어기를 구성한다. 4절에서는 부등 제한조건을 갖지 않는 경우와 갖는 경우에 대해 모의실험을 통해 각각에 대한 응답결과를 비교해 본다.

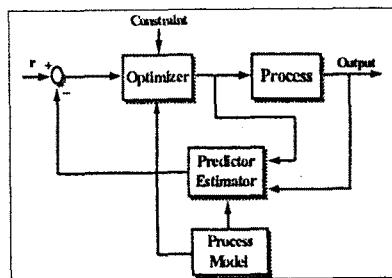


그림 1. 제한조건을 갖는 예측제어기

2. 모델 및 예측제어기 구성

대상 모델은 CARIMA(Controlled-Auto -Regressive-Integrated-moving -Average)모델[2]로 가정한다.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{T(q^{-1})}{\Delta} d(t) \quad (1)$$

여기서 $u(t-1)$, $y(t)$ 는 제어입력과 출력이고, d 는 시스템의 지연값이다. $\frac{T(q^{-1})}{\Delta}$ 는 제로 평균값을 갖는 백색잡음이고, A , B , C 는 후향연산자(q^{-1})로 이루어진 다항식이고, Δ 는 미분연산자($\Delta = 1 - q^{-1}$)이다. A 다항식의 첫번째 값은 1이고, 편의상 $T(q^{-1})$ 을 1로 놓고 j -번째 앞선 출력예측(j -step ahead prediction) $\hat{y}(t+j)$ 를 유도하기 위해 다음과 같은 Diophantine 방정식을 도입한다.

$$1 = E_j(q^{-1})A(q^{-1})\Delta + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (2)$$

여기서 $E_j(q^{-1}) = e_0 + e_1q^{-1} + \dots + e_{j-1}q^{-(j-1)}$

$$F_j(q^{-1}) = f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{j-1}q^{-(j-1)}$$

(2) 식으로부터 다음의 예측식을 얻을 수 있다.

$$\hat{y}(t+j) = E(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + F(q^{-1})y(t) + E(q^{-1})\hat{x}(t+j) \quad (3)$$

미래값을 대한 항목을 제외하고 출력 예측식을 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{y}(t+j) = E(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + F(q^{-1})y(t) \quad (4)$$

여기서 $E(q^{-1})B(q^{-1})(=G_j + q^{-1}H_j)$ 는 $j+nb-1$ 의 차수를 가지는 다항식이므로, $E(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1)$ 의 일부는 미래의 입력에 해당하는 요소들, 그리고 나머지 일부는 과거의 입력에 해당하는 어떤 요소를 가진다. 이를 분리하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{y}(t+j|t) = G_j \Delta u(t+j-d) + f(t+j|t) \quad (5)$$

$$\text{여기서 } f(t+j|t) = H_j(q^{-1})\Delta u(t-1) + F(q^{-1})y(t)$$

주어진 예측구간 안에서 식 (6)의 평가함수를 도입하고, (7)식과 같은 항등(equality) 제한 조건을 포함시켜 최적화된 입력을 구한다.

$$J(t) = \sum_{j=N}^M \mu(t+j)[w(t+j) - \hat{y}(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^N \rho(t+j)[\Delta u(t+j)]^2 \quad (6)$$

$$\text{제한조건(항등): } \underline{\mu}_c(t) = 0, \quad \underline{\mu}_e(t) = \underline{w}_c(t) - \underline{y}_c(t) \quad (7)$$

여기서 N_1 은 최소 예측구간, N_2 는 최대 예측구간, NU 는 제어 입력 예측구간, μ 와 ρ 는 음이 아닌 가중치이고, $\underline{w}_c(t) = [w(t+N_1), w(t+N_1+1), \dots, w(t+N_2+m)]^T$, $\underline{y}_c(t)$ 는 N 부터 m 까지의 예측된 출력으로 이 구간은 항등 제한조건이 있는 구간이다. (6)식과 (7)식을 lagrange multiplier 이용하여 다음과 같은 베티식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(t) &= \underline{\mu}(t)^T M \underline{\mu}(t) + \Delta u(t)^T \Lambda \Delta u(t) - 2[\underline{w}_c(t) - \underline{y}_c(t)]^T \underline{\lambda}(t) \\ &= (G \Delta u(t) + f(t) - \underline{w}(t))^T M (G \Delta u(t) + f(t) - \underline{w}(t)) \\ &\quad + \Lambda \Delta u(t)^T \Delta u(t) - 2[\underline{w}_c(t) - \underline{y}_c(t)]^T \underline{\lambda}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$M = \text{diag}[\mu(N_1), \mu(N_1+1), \dots, \mu(N_2)]$$

$$\Lambda = \text{diag}[\rho(0), \rho(1), \dots, \rho(NU-1)]$$

$$\underline{w}(t) = [w(t+N_1|t), w(t+N_1+1|t), \dots, w(t+N_2|t)]^T$$

$$\hat{\underline{y}}(t) = [\hat{y}(t+N_1|t), \hat{y}(t+N_1+1|t), \dots, \hat{y}(t+N_2|t)]^T$$

$$\underline{f}(t) = [f(t+N_1|t), f(t+N_1+1|t), \dots, f(t+N_2|t)]^T$$

$$\Delta u(t) = [\Delta u(t), \Delta u(t+1+|t), \dots, \Delta u(t+NU-1|t)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \cdots & \cdots & g_0 \end{bmatrix}$$

(8)식을 Δu 와 Lagrange multiplier에 대한 derivative를 구

하여 최소화 시키면 다음 행렬식으로 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} G^T M G + \Lambda & G_c^T \\ G_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \underline{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T M [\underline{w}(t) - \underline{f}(t)] \\ \underline{w}_c(t) - \hat{\underline{y}}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

(9)식을 풀면 다음과 같은 입력을 구할 수 있다

$$\Delta u(t) = [\Delta u(t), \Delta u(t+1+|t), \dots, \Delta u(t+NU-1|t)]^T \quad (10)$$

플랜트의 입력으로 인가되는 것은 이전 입력에 첫 번째 입력 증분(increment)($\Delta u(t|t)$)를 더한 값이 인가되고, 예 생플링 순간의 제어입력 베티($\underline{\lambda}(t)$)는 새롭게 구해진다.

3. 부등 제한조건을 갖는 예측제어기구성

이 절에서는 제한조건을 모델링한다. 모델링은 입력증분(Increment)에 대해 각각 구성하며, 시스템의 안전성을 보장하면서 제한조건을 만족시키도록 제어기를 구성한다.

3.1 제한조건 모델링

입력증분(Increment)은 제어입력 예측구간(NU)에서 상한과 하한으로 제한 되어진다.

$$\underline{\Delta u}_{\min} \leq \Delta u \leq \underline{\Delta u}_{\max} \quad (11)$$

여기서 $\underline{\Delta u}_{\min} = (\underline{\Delta u}_{\min}, \dots, \underline{\Delta u}_{\min})$ 이며, I 는 $NU \times NU$ 의 단위행렬이며, $\underline{\Delta u}_{\max} = (\underline{\Delta u}_{\max}, \dots, \underline{\Delta u}_{\max})$ 이다.

11식은 다음과 같은 부등식으로 표현할 수 있다.

$$C \Delta u \leq d \quad (12)$$

$$\text{여기서 } C = [I \quad -I]^T$$

$$d(t) = [\underline{\Delta u}_{\max} \quad -\underline{\Delta u}_{\min}]^T$$

다른 변수에 대한 제한은 제한 행렬과 범위를 추가하여 구성할 수 있다.

3.2 부등 제한조건을 갖는 제어기 구성

(14)와 같이 평가함수를 도입하고, (15)식의 부등 제한조건을 만족하도록 제어기를 구성한다.

$$J(t) = \underline{\mu}(t)^T M \underline{\mu}(t) + \Delta u(t)^T \Lambda \Delta u(t) - 2[\underline{w}_c(t) - \underline{y}_c(t)]^T \underline{\lambda}(t) \quad (14)$$

$$\text{제한조건(부등): } C \Delta u(t) \leq d(t) \quad (15)$$

(14), (15)를 뚜는 문제는 QP(Quadratic Programming)으로 해결할 수 있다. 본 논문에서는 active set method[4]를 이용하였다. 먼저 제한조건을 빚어나는 행만을 뽑아 Active set 행렬을 구성하고, 이 제한행렬과 범위를 각각 C_A , d_A 라 표시하자. 이 제한조건을 포함시켜 다음과 같은 확장 평가함수를 사용한다.

$$J(t) = J(t) - 2(C(t)_A - C_A \Delta u(t)) \underline{\lambda}_A(t) \quad (16)$$

이 확장된 평가함수에 대해 Δu 와 Lagrange multiplier에 대한 derivative를 구하여 최소화 시키면 다음 행렬식으로 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} G^T M G + A & G_e^T & C_A^T \\ G_e & 0 & 0 \\ C_A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta(t) \\ \Delta_A(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^T M \frac{u(t) - f(t)}{\Delta(t)} \\ \frac{u_e(t) - f_e(t)}{\Delta(t)} \\ \Delta_A(t) \end{bmatrix}$$

(17)

위 행렬식으로 부터 제어입력을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta u(t) = [\Delta u(t) \ \Delta u(t+1+\Delta t) \ \cdots \ \Delta u(t+N_u-\Delta t)]^T \quad (18)$$

제한조건을 갖지 않는 경우와 마찬가지로 플랜트의 입력으로 들어가는 것은 이전 입력에 첫 번째 입력 증분(increment) ($\Delta u(t)\Delta t$)를 더한 값이 인가된다.

4. 모의실험

모의실험은 제어하기 곤란한 비최소위상과 부족진동 및 겸출이 불가능한 플랜트를 대상으로 모의실험 하였다. 제어변수로 [N1=1, N2=4, NU=4, m=3][3]으로 놓고 모의 실험한 결과이다.

4.1 비최소위상과 부족진동을 가지는 플랜트

비최소위상과 부족진동을 갖는 플랜트에 대해 모의 실험한 결과이다.

$$y(t) = \frac{(-q^{-1} + 2q^{-2})}{(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})} u(t-3)$$

그림 2 는 입력부동 제한조건을 갖지 않는 경우로 입력증분(increment)은 -0.59에서 0.59까지 변하며 출력은 최소 -0.57에서 최대 1.57 까지 변하는 특성을 보였다.

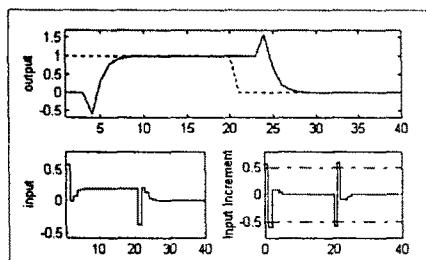


그림 2

그림 3은 입력을 다순 클리핑시켜 제한조건을 만족시키도록 한 경우이다.

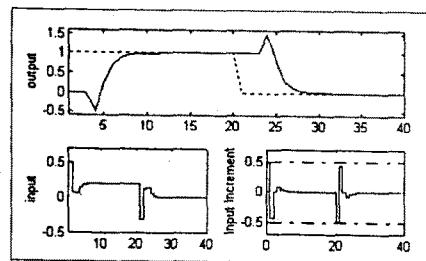


그림 3

그림 4는 본 논문에서 제안한 입력증분(increment)의 제한을 최적화에 포함시켜 제한한 경우이다.

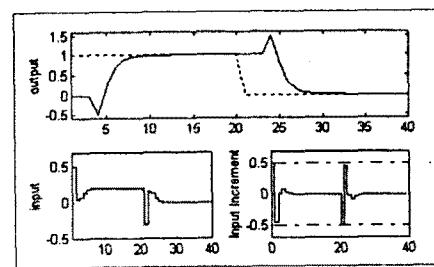


그림 4

비최소위상과 부족진동을 갖는 플랜트에 대해서는 두 경우 모두 비슷한 특성을 보인다.

4.2 겸출이 불가능한 플랜트

비최소위상의 특성을 가지며 영점과 극점이 가깝게 위치하므로 겸출이 불가능한 플랜트로 단순 클리핑을 시켜 입력증분(increment)을 제한하였을 때는 출력이 발산함을 보였다.

$$y(t) = \frac{(a^{-1} - 1.99a^{-2})}{(1 - 4a^{-1} + 4a^{-2})} u(t-1)$$

그림2에서 제어 입력증분(increment)은 최소 -1.8에서 최대 1.8 까지 변하며, 출력은 -0.56에서 최대 1.56까지 변하는 특성을 보였다.

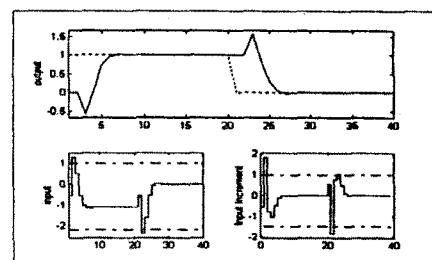


그림 5

그림 6은 입력증분(increment)을 $-1.5 \leq \Delta u(t) \leq 1$ 로 단순 클리핑 시켰을 때 응답으로 시스템이 수렴하지 못하고 발산하였다.

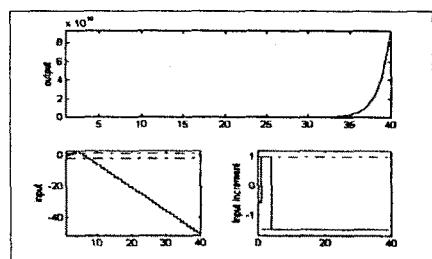


그림 6

그림 7은 입력증분(increment)의 제한을 최적화에 포함시켜 제어한 결과이다. 입력증분 제한 범위를 잘 만족하면서 응답결과에 자연시간이 약간 길어졌으나 잘 수렴함을 볼 수 있다.

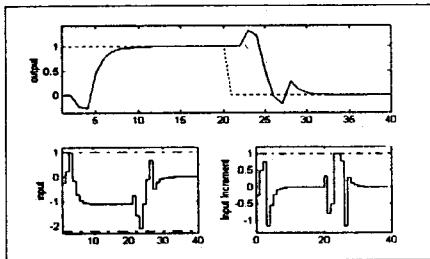


그림 7

그림 6에서 보듯이 비최소위상과 겸출이 불가능한 플랜트에 대해서 입력제한 문제를 단순 클리핑으로 제한 한 경우는 발산함을 보인다. 그러나 최적화 과정에 제한조건을 두고 제이한 결과는 그림 7에서 보다시피 시스템의 안정성을 유지하며 제한조건을 만족한다.

5. 결론

본 논문에서는 입력제한 문제에 대해 다순 클리핑에 의한 제어와 부등 제한조건을 최적화 과정에 포함시키 제이한 결과를 비교해 보았다. 비최소위상과 부족진동을 갖는 경우는 입력의 단순 클리핑으로도 제한 범위를 만족하면서 시스템의 안정성을 유지할 수 있으나, 비최소위상과 겸출이 어려운 시스템에 대해서는 시스템의 안정성을 만족시키지 못함을 보였다. 실제 시스템에서 나타날 수 있는 구동기의 제약성 또는 비선형성으로 인해 야기되는 시스템의 불안정성 또는 성능저하 등에 대해 부등 입력 제한조건을 갖는 제한 이동구간 예측제어(CRHPC)는 선형제어만으로 해결할 수 없는 부분들을 충분히 제어 가능함을 모의실험을 통해 예증해 보았다. 그러나, QP(Quadratic Programming)을 이용하여 제어입력을 계산하게 되어, 계산시간이 많이 걸리므로 지연시간이 큰 시스템에 대해서는 널리 적용될 수 있지만 빠른 시스템에 대해서는 계산시간을 줄일 수 있는 알고리즘이 요구된다.

참고문헌

- [1] Tsang, T.T.C., and Clarke, D.W., "Generalized predictive control with input constraints." 1988 Proc. IEE, 135, Pt.D, 145-160
- [2] Clarke, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P. S., "Generalized Predictive control-Parts 1 and 2." 1987, Automatica, 23, 137-160
- [3] Clarke, D.W., and Scattolini, R., "Constrained receding horizon predictive control", 1991, IEE Proc. part D, 138, No.4 , 347-354,
- [4] Fletcher, R. , Practical Methods of Optimization, 1987, vol. 1 & 2, John Wiley & Sons.
- [5] Clarke, D. W., and Mohtadi, C., "Properties of generalized predictive control", 1989, Automatica, 25, 859-875.
- [6] Camacho, E. F., "Constrained generalized predictive control.", 1993, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-38(2), 327-332
- [7] Kuznetsov, A.G. and Clarke, D.W., "Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants.", 1994, In Clarke, D. W., editor, Advances in model-based predictive control, Oxford University Press.
- [8] Chow, C.M. "Constrainedmodel-basedpredictive control.", 1993, D.Phil transfer report, Department of Engineering Science, oxford University
- [9] Clarke, D.W., and Chow, C.M., "Actuator nonlinearities in predictive control.", 1994, In Clarke, D.W., editor, Advances in model-based predictive control, Oxford University Press.