'95 대한전기학회 하계학술대회 논문집(1995. 7. 20~22)

블럭펄스함수를 이용한 칼만필터설계

안두수*,임윤식,*이승희*°,이명규**
* 성균관 대학교 전기공학과 . **경성대학교 전기공학과

Design of Kalman Filter via BPF

Ahn,Doo-Soo* . Lim,Yun-Sic* . Lee,Sung-Hee* . Lee,Myung-Kyu**
* Dept. of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan Univ.
**Dept. of Electrical Eng. Kyung Sung Univ.

ABSTRACT

This paper presents a method to design Kalman filter on continuous stochastic dynamical systems via BPFT(block pulse functions transformation). When we design Kalman filter , minimum error variance matrix is appeared as a form of nonlinear matrix differential equations. Such equations are very difficult to obtain the solutions. Therefore, in this paper, we simply obtain the solutions of nonlinear matrix differential equations from recursive algebraic equations using BPFT. We believe that the presented method is very attractive and proper for the evaluation of Kalman gain on continuous stochastic dynamical systems

1. 서 론

시스템의 해석이나 상태추정 등은 잡음이 없는 확정계에서 주로 연구되어 왔다. 그러나 실제의 물리계에는 예측하지 못할 많은 잡음을 포함하게 된다. 따라서 이러한 잡음을 고려하지 않는 확정계에서는 많은 오차를 포함하므로 잡음이 존재하는 실제의 물리계에서의 상태추정은 일반적으로 확률계로 모델링한 후 이루어져야 바람직하다. 제어 시스템의 상태추정문제는 흔히 동적 시스템의 상태를 잡음 관측 데이터로부터 추정하는 문제와 관련을 짓는다. 따라서 동적 시스템이 선형 플랜트이고 이와 관련된 선형관측과정에서 백색잡음이 부가될 때의 상태를 추정하기 위하여 칼만필터를 적용한다. 그런데 확률시스템의 상태추정에서 생기는 상태추정오차인 상호분산행렬 리카티방정식이 행렬 비선형 미분방정식의 형태이므로 해를 구하는 것이 쉽지 않다.

본 연구에서는 이에 대한 해를 구하기 위해서 비선형 미분방정식을 행렬 분할 방식에 의해 2개의 선형 미분 방정식으로 변환하고, 이에 블럭펄스함수를 적용 반복적인 대수식을 유도하여 확률 동적시스템에서의 필터 이득값을 구하고자 한다. 이는 복잡한 비선형 방정식을 간단한 대수식으로 변환하여 풀게되므로 계산이 수월하고 그 처리속도에서도 빨라지게 될 것이다.

2. 블럭펄스함수의 정의

블럭펄스함수는 연속계를 이산계로 변환하는데 편리하며, 컴퓨터 연산에 직접 적용할 수 있는 계산상의 잇점이 있다. 블럭펄스함수 $H_k(t)$는 구간 $0 \le t < t_f$에서 식(2.1)와 같이 정의되며, 식(2.2),(2.3)을 만족하는 직교함수이다.

$$H_k(t) = \begin{cases} 1 \ , \ (k-1)\frac{t_f}{m} \le t < k\frac{t_f}{m} \\ 0 \ , \ \text{그 외 구간} \end{cases} \tag{2.1}$$

단, $k = 1, 2, \cdots, m$

$$H_k(t)\ H_l(t) = \begin{cases} H_k \ , \ k = l \\ 0 \ , \ k \ne l \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\int_0^{t_f} H_k(t)\ H_l(t)dt = \begin{cases} \frac{t_f}{m} \ , \ k = l \\ 0 \ , \ k \ne l \end{cases} \tag{2.3}$$

또한 임의의 함수 $x(t)$ 는 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한급수 전개된다.

$$x(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{m} X_k\ H_k(t) \tag{2.3}$$

$$X_k = \frac{m}{t_f}\int_0^{t_f} x(t)\ H_k(t)dt = \frac{m}{t_f}\int_{(k-1)\frac{t_f}{m}}^{k\frac{t_f}{m}} x(t)dt$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}[\ x(k\frac{t_f}{m}) + x((k-1)\frac{t_f}{m})] \tag{2.5}$$

단, $k = 1, \cdots, m$

블럭펄스함수의 정방향 적분과 역방향 적분에 관한 식은 다음과 같다.

정방향적분: $\int_0^{t_f} H(\tau)d\tau \cong P\ H(t)$

$$\cong \frac{t_f}{2m}\ H_i(t) + \frac{t_f}{m}\sum_{l=i+1}^{m} H_l(t) \tag{2.6}$$

역방향적분: $\int_{t_f}^{t} H(\tau)d\tau \cong \hat{P}\ H(t)$

$$\cong -\frac{t_f}{2m}\ H_i(t) - \frac{t_f}{m}\sum_{l=1}^{i-1} H_l(t) \tag{2.7}$$

여기서 블럭펄스함수의 정방향 적분 연산행렬및 역방향 적분 연산행렬을 행렬식으로 나타내면 아래와 같으며 $\hat{P} = -P^T$의 관계가 있다.

$$P = \frac{t_f}{m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \hat{P} = \frac{t_f}{m}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdots & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3. 칼만필터문제 정의

칼만필터문제는 확률 동적 시스템에서 측정된 출력 $z(t)$로부터 상태벡터 $x(t)$를 최적으로 추정한 상태 $\hat{x}(t)$를 찾는 문제이므로 확률 동적시스템을 다음과 같이 표현하면,

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t) \tag{3.1}$$

$$z(t) = Hx(t) + v(t) \tag{3.2}$$

여기서, w(t), v(t)는 0평균 백색잡음이고 다음의 분산값을 갖는다.

$$\begin{aligned} &E[\ w(t)\ ]=0\ ,\ E[\ w(t)w^T(\tau)\ ]=Q\cdot\delta(t-\tau) \\ &E[\ v(t)\ ]=0\ ,\ E[\ v(t)v^T(\tau)\ ]=R\cdot\delta(t-\tau) \\ &Q:\ \text{positive semidefinite} \\ &R:\ \text{positive definite} \end{aligned} \tag{3.3}$$

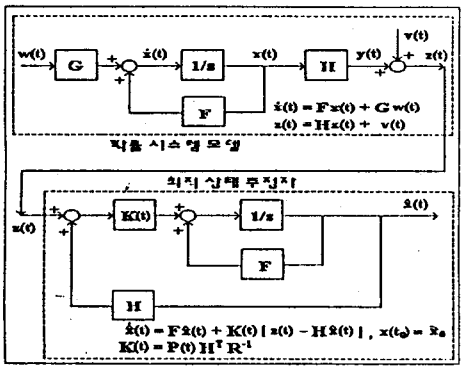

Fig1. Block Diagram of state estimator

상태 x(t)에 대해서 다음과 같은 상태 추정방정식을 정의하자.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\hat{x}(t)=[\ F-K(t)H]\ \hat{x}(t)+K(t)z(t) \\ &\hat{x}(t_0)=\bar{x}_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

이제 최적의 상태 $\hat{x}(t)$를 찾기 위해 가능한 한 상태추정오차의 상호분산행렬을 작게 해야한다. 이 목적을 위해 평가함수 J를 정의하면 다음과 같다.

$$J=Tr[\ \tilde{x}\ \tilde{x}^T\ ]=Tr[\ P(t)] \tag{3.5}$$

여기서, $\tilde{x}(t)=x(t)-\hat{x}(t)$는 추정오차이다.

이제 평가함수 J를 최소화하는 K(t)를 구할 수만 있다면, 식(3.4)에서 $\hat{x}(t)$를 구할 수 있다.

그런데 식(3.5)식을 최소화하는 필터이득 K(t)의 계산이 요구되므로, 식(3.1)과 (3.4)으로부터 상태추정오차 방정식을 구하면, 다음과 같고

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t)=[\ F-K(t)H]\ \tilde{x}(t)+Gw(t)-K(t)v(t) \tag{3.6}$$

식(3.1),(3.6)로 부터 다음과 같은 상호분산행렬 리카티방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{P}(t)=&[\ F-K(t)H]\ P(t)+P(t)[\ F-K(t)H]^T \\ &+GQG^T+K(t)RK^T(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt}J(t)=Tr[\ \dot{P}(t)] \tag{3.8}$$

식(3.8)의 관계로부터 J를 최소화시키는 필터 이득 K(t)를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{d\dot{P}(t)}{dK(t)}=-P(t)H^T-P(t)H^T+2K(t)R=0 \tag{3.9}$$

$$K(t)=P(t)H^TR^{-1} \tag{3.10}$$

식(3.10)에서 식(3.5)을 최소화하는 필터 이득 K(t)를 구하려면 상호분산행렬를 알아야 하므로, 식(3.10)을 식(3.7)에 대입하여 상호분산행렬 리카티방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{P}(t)=FP(t)+P(t)F^T+GQG^T-P(t)H^TR^{-1}HP(t) \tag{3.11}$$

상호분산행렬의 초기값은 다음과 같다.

$$P(t_0)=var[\ x(t_0)-\hat{x}(t_0)]\ =P_0 \tag{3.12}$$

식(3.11)과 식(3.12)을 이용하여 상호분산행렬 리카티방정식의 해인 상호분산행렬을 구하는 것은 상호분산행렬 리카티방정식이 비선형이기 때문에 해를 구하기가 쉽지 않다.

4. 블럭펄스함수를 이용한 칼만이득의 계산

본 연구에서는 비선형 분산행렬 방정식을 직접 풀지 않고 행렬 분할기법을 이용하여 해를 구하고자 한다. 식(3.11)에 행렬 분할기법을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(t)=V(t)U^{-1}(t) \tag{4.1}$$

이때 V(t)와 U(t)는 다음과 같은 동차선형 미분방정식을 만족하는 n×n차의 행렬이다.

$$\dot{U}(t)=-F^TU(t)+H^TR^{-1}HV(t) \tag{4.2}$$

$$\dot{V}(t)=GQG^TU(t)+FV(t) \tag{4.3}$$

식(4.2),(4.3)을 다시 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \cdots\cdots \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -F^T & \vdots & H^TR^{-1}H \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ GQG^T & \vdots & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t) \\ \cdots\cdots \\ V(t) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

단, 초기조건은

$$\begin{bmatrix} U(t_0) \\ \cdots \\ V(t_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ P_0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

식(4.4)의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t_0) \\ V(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$U(t)=\Phi_{11}(t,t_0)U(t_0)+\Phi_{12}(t,t_0)V(t_0) \tag{4.7}$$

$$V(t)=\Phi_{21}(t,t_0)U(t_0)+\Phi_{22}(t,t_0)V(t_0) \tag{4.8}$$

초기조건을 대입하면, 식(4.7)과 식(4.8)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U(t)=\Phi_{11}(t,t_0)+\Phi_{12}(t,t_0)P_0 \tag{4.9}$$

$$V(t)=\Phi_{21}(t,t_0)+\Phi_{22}(t,t_0)P_0 \tag{4.10}$$

따라서 상호분산행렬 리카티방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(t)=&(\Phi_{21}(t,t_0)+\Phi_{22}(t,t_0)P_0) \\ &\cdot(\Phi_{11}(t,t_0)+\Phi_{12}(t,t_0)P_0)^{-1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

식(3.11)에 의해 K(t)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K(t)=&(\Phi_{21}(t,t_0)+\Phi_{22}P_0(t,t_0)) \\ &\cdot(\Phi_{11}(t,t_0)+\Phi_{12}P_0(t,t_0))^{-1}H^TR^{-1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

따라서, 블럭펄스함수를 적용하기 위해 식(4.4)을 치환하자.

$$\xi(t)=\begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$U(t):\ n\times n\ ,\ V(t):\ n\times n\ ,\ \xi(t):\ 2n\times n$

$$A=\begin{bmatrix} -F^T & \vdots & H^TR^{-1}H \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ GQG^T & \vdots & F \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

식(4.13),(4.14)으로 부터 식(4.4)는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\xi}(t)=A\xi(t) \tag{4.15}$$

$A:\ 2n\times 2n$

식(4.15)의 천이행렬을 이용한 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \xi(t)&=\Phi(t,t_0)\xi(t_0) \\ &=\begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(t_0) \\ V(t_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.16}$$

$\Phi(t,t_0):\ 2n\times 2n$

식(4.16)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\xi(t_0)=\Phi^{-1}(t,t_0)\xi(t)=\Phi(t_0,t)\xi(t) \quad (4.17)$$

$$\xi(t_0)=\text{constant}$$

식(4.17)를 양변 미분하면 식(4.18),(4.19)와 같고,

$$0=\dot{\Phi}^{-1}(t_0,t)\xi(t)+\Phi(t_0,t)\dot{\xi}(t)$$
$$=\dot{\Phi}^{-1}(t_0,t)\xi(t)+\Phi(t_0,t)A\xi(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)A \quad (4.19)$$

식(4.19)를 양변 적분하여 정리하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$I-\Phi(t_0,t)=-\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)A\,d\tau \quad (4.20)$$

식(4.13)과 천이행렬은 블럭펄스함수에 의해 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{m}\xi_k H_k \quad (4.21)$$

$$\Phi(t)=\sum_{k=1}^{m}\phi_k H_k \quad (4.22)$$

식(4.20)에 블럭펄스함수를 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{m}(I-\phi_k)H_k(t)=$$
$$\frac{t_f}{m}\sum_{k=1}^{m}(I-\phi_k)A[\frac{1}{2}H_k(t)+\sum_{l=k+1}^{m}H_l(t)] \quad (4.23)$$

식(4.23)으로 부터 다음의 반복적인 대수식을 얻을 수 있다.

$$\phi_1=[I+\frac{t_f}{2m}A]^{-1} \quad (4.24)$$

$$\phi_{k+1}=\phi_k[I-\frac{t_f}{2m}A][I+\frac{t_f}{2m}A]^{-1} \quad (4.25)$$

식(4.24), (4.25)으로부터 상대천이행렬 $\Phi(t_0,t)$를 구했다. 그런데 원하는 천이행렬은 $\Phi(t,t_0)$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi(t,t_0)=\Phi^{-1}(t_0,t) \quad (4.26)$$

이제 원하는 천이행렬 $\Phi(t,t_0)$는 블럭펄스함수를 이용한 반복적인 알고리즘인 식(4.24), (4.25), (4.26)으로 부터 구하고 이를 식(4.12)에 대입하여 다음과 같이 칼만 이득값을 구할 수 있다.

$$K(t)=\sum_{k=1}^{m}(\phi_{21k}+\phi_{22k}P_0)(\phi_{11k}+\phi_{12k}P_0)^{-1}H^TR^{-1}H_k$$

5. 시뮬레이션

Harmonic oscillator 동적시스템을 대상으로 앞에서 전개한 블럭펄스함수를 이용하여 필터이득을 구하고자 한다. 주어진 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Gw(t)$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -2\alpha\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}w(t)$$

$$z(t)=Hx(t)+v(t)$$
$$=[\,0\ \ 1\,]\,x(t)+v(t)$$

w(t) , v(t)는 0 평균과 Q , R의 분산을 갖는 가우시안 백색잡음이다.

여기서,

$$\omega^2=0.64,\ \alpha=0.16,\ Q=1,\ R=1,\ P(t_0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

으로 주어진다.

블럭펄스 전개항수는 50이고, t_f는 10초로 하였다.

다음은 블럭펄스함수를 통하여 반복적 대수방정식으로 부터 구한 칼만이득값을 나타내었다.

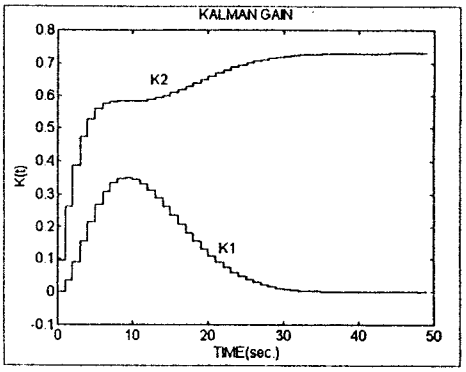

Fig.2 Filter gain for harmonic oscillator

6. 결 론

본 연구에서는 연속계 확률동적 시스템에서의 상태추정에서 필요한 필터계인에 대해서 언급하였다. 일반적으로 잡음이 존재하는 계에서 오차없는 최적상태 추정을 위해서 상호분산 행렬을 정의하며, 이것은 필터이득을 구하는데 필수적이다. 하지만 이 행렬값을 알기 위해서는 비선형인 상호분산 행렬 리카티방정식을 풀어야 하는 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 어려움을 없애기 위해 직교함수의 일종인 블럭 펄스함수를 이용하여 비선형방정식을 반복적인 대수식으로 바꾸어 그 해를 구하므로 용이하게 필터 이득값을 구하였다.

참고문헌

[1] Andrew P. Sage , Chelsea C. White,III , " Optimum Systems Control " , Prentice-Hall Inc.,1977

[2] R. E. Kalman, " A New Approach to linear Filtering and Prediction Problems" , Journal of Basic Engineering , pp35-45 , 1960

[3] Charles S. Kenney , Roy B. Leipink , "Numerical Integration of The Differential Matrix Riccati Equation" , IEEE Trans. Automat. Contr., vol AC-30, No.10, pp 962-970 1985.

[4] David G. Luenberger , " An Introduction to Observers", IEEE Trans. Automat. Contr.,vol.AC-16,No.6,pp 596-602

[5] G. Minkler , J. Minkler , " Theory and Application of Kalman Filtering " , Magellan book Co.

[6] F. W. Fairman, " Optimal observer for a Class of Continuous Linear Time-Varying Stochastic Systems ", IEEE. Trans. Automat. Contr., pp 136-137, 1977