

## 다중 슬라이딩 모드 제어 방법의 성능 평가

장옥<sup>o</sup>, 주진만, 박진배  
연세대학교 전기공학과

### The performance analysis of multiple sliding mode control

Wook Chang<sup>o</sup>, Jin Man Joo, Jin Bae Park  
Department of Electrical Engineering, Yonsei University

#### Abstract

This paper presents a performance analysis of the multiple sliding mode control for SISO system. The multiple sliding mode control technique uses sliding surfaces for each state. The performance analysis is done by comparison between the multiple sliding mode control and the sliding mode control. Overall performance of the multiple sliding mode control is improved over that of the sliding mode control. Results of numerical simulations are presented.

#### 1. 서론

제어 시스템의 목적은 모델링의 불확실성이나 시스템에 대한 외란이 존재하는 경우에도 제어 대상 플랜트가 안정적으로 원하는대로 동작하도록 제어 신호를 만들어 내는 것이다. 실제 환경에서는 시간에 따른 모델의 변화, 부하의 변동, 외부의 교란 등에 의해서 정확한 시스템의 모델을 얻는 것이 어려운 경우가 많다. 명백히 이러한 모델의 불확실성은 시스템의 성능에 안 좋은 영향을 끼친다. 이러한 모델의 불확실성과 외란의 존재에도 불구하고 강인성을 가지는 제어 방법 중의 하나로서 슬라이딩 모드 제어 방법이 있다[1][2][3]. 슬라이딩 모드 제어 방법은 비선형 시스템에 대한 강력한 제어기로서 로봇 매니퓰레이터, 수중차, 서보 모터 등, 모델의 불확실성을 포함하는 실제적인 산업 분야에 적용되어왔다.

일반적인 슬라이딩 모드 제어 방법은 각 입출력 관계에 대하여 하나의 슬라이딩 표면을 정의하여 사용을 하였다. 그러나 Slotine과 Hedrick[4][5]이 다중 슬라이딩 표면을 이용한 선형화 기법을 소개하였다. 이 방법은 기존의 슬라이딩 모드 제어 방법과는 달리 각 상태 변수에 대해 독립적인 슬라이딩 표면을 정의하는 것이다. 본 논문에서는 기존의 슬라이딩 모드 제어 방법과 다중 슬라이딩 표면을 사용한 제어 방법의 성능을 모의 실험을 통하여 평가하고 그 결과를 고찰한다.

#### 2. 입출력 피드백 선형화

피드백 선형화는 비선형 시스템의 제어 이론으로서 각광을 받는 이론이다. 이는 상태 변수의 피드백에 의해 비선형 시스템의 동특성을 정확히 선형적인 형식으로 변환하는 것으로서 선형 근사화와는 다른 개념이다. 그러나 피드백 선형화는 시스템의 강인성을 보장 못하는 문제점이 있다.

다음의 단일 입출력 1 차 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.1)$$

위의 시스템의 상대 차수는 1이고  $f(x)$  와  $g(x)$ 는 상태 변수  $x$ 의 비선형 함수이며  $g(x)$ 는  $x$ 의 모든 값들에 대해서 0이 아니다. 시스템의 상태 변수  $x$ 가 원하는 궤적  $x_d$ 를 따라가도록 하자 한다면 다음과 같이 할 수 있다.

$$u = \frac{1}{g(x)}(-f(x) + v) \quad (2.2)$$

식(2.2)의 제어 입력에 의해 식(2.1)의 시스템은 다음과 같은 선형 시스템으로 바뀐다.

$$\dot{x} = v \quad (2.3)$$

일반적인 선형 제어 이론을 써서 식(2.3)의 시스템의 상태 변수  $x$ 가 원하는 궤적을 따라가도록 할 수 있다. 보조 입력  $v$ 를 다음과 같이 두자.

$$v = \dot{x}_d - \lambda \varepsilon \quad (2.4)$$

여기서  $\varepsilon = x - x_d$ 이다. 고려되어지는 시스템의 오차에 대한 동특성은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\varepsilon} + \lambda \varepsilon = 0 \quad (2.5)$$

$\lambda$ 가 양의 상수이면 오차는 0으로 수렴하며 시스템의 상태 변수  $x$ 가 원하는 궤적  $x_d$ 를 따라가도록 할 수 있다.

#### 3. 슬라이딩 모드 제어

슬라이딩 모드 제어는 시스템이 불확실하게 모델링 되었을 경우에도 피드백 선형화 방법이 강인성을 가지고도록 수정한 방법이라고 할 수 있다. 종래의 슬라이딩 모드 제어 방법은 각 입출력 사이에 하나의 슬라이딩 표면을 정의하여 모델의 불확실성이나 외란에도 불구하고 슬라이딩 표면을 0으로 만드는 제어 입력을 구하는 것이다. 이렇게 구해진 제어 입력은 시스템의 출력이 원하는 출력을 따라가도록 만든다.

다음과 같은  $n$  차 시스템을 생각하자.

$$x^{(n)} = f(x) + g(x)u \quad (3.1)$$

$$x = [\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}]^T$$

일반적인  $n$  차 시스템에 대한 슬라이딩 표면의 정의는 다음과 같다.[1]

$$s(x; t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \varepsilon \quad (3.2)$$

$\lambda$ 는 양의 상수이며  $\varepsilon = x - x_d$ 이다.

그러므로 시스템이 원하는 궤적  $x_d$ 를 따라가도록 하는 문제는 식(3.2)에서 정의한 슬라이딩 표면의 값을 0으로 만드는 것과 동일하다. 슬라이딩 표면  $s$ 를 0으로 만들기 위해서 제어 입력은 다음을 만족하도록 정의되어야 한다. 이를 슬라이딩 조건이라 한다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \quad (3.3)$$

여기서  $\eta$ 는 양의 상수이다. 슬라이딩 조건을 만족하는 입력은 슬라이딩 표면  $s$ 를 0으로 수렴하도록 한다. 그러나 이렇

게 수렴된 시스템의 제어 입력은 멀림(chattering) 현상을 보이게 되며 이러한 멀림 현상은 시스템의 모델링되지 않은 동특성을 나타나게 한다. 이러한 단점을 해결하는 방법으로 슬라이딩 조건을 다음과 같이 수정하는 방법이 제시되었다.[1]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, \quad |s| \geq \phi \quad (3.4)$$

$\eta$ 는 양의 상수이며  $\phi$ 는 허용 가능한 오차의 한계값이다. 추적 오차는 따라서  $\phi$  이하로 유지되게 된다.

2절에서 고려되었던 단일 입출력 1차 비선형 시스템을 살펴보자.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.5)$$

이 시스템에 대한 슬라이딩 표면은 식(3.2)의 정의에 의하여 다음과 같다.

$$s = x - x_d \quad (3.6)$$

식(3.6)의 시스템에 대해서 식(3.4)의 슬라이딩 조건을 만족하는 제어 입력은 다음과 같이 주어진다.[1]

$$u = \frac{1}{\hat{g}(x)} (-\hat{f}(x) + \dot{x}_d - k \text{sat}(s/\phi)) = \frac{1}{\hat{g}(x)} (-\hat{f}(x) + v) \quad (3.7)$$

$\hat{f}(x)$ 와  $\hat{g}(x)$ 는 각각  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 예측값이다. 슬라이딩 이득  $k$ 는 슬라이딩 조건을 만족하도록 정의된다. 이렇게 구한 제어 입력  $u$ 는 시스템의 상태변수  $x$ 가 원하는 궤적  $x_d$ 를 따르도록 한다.

#### 4. 다중 슬라이딩 모드 제어

고려되어지는 시스템은 단일 입출력 시스템이며 상태 차수와 시스템 차수는 모두  $n$ 이다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.1)$$

$$y = h(x)$$

$x$ 와 비선형 함수인  $g(x)$ ,  $h(x)$ 는 정확히 구할 수 있으며  $f(x)$ 는  $\hat{f}(x)$ 로 예측되어진다고 가정하고  $\tilde{f}(x)$ 는 식(4.2)과 같이 정의된다.

$$\tilde{f}(x) = \hat{f}(x) - f(x) \quad (4.2)$$

제어 시스템을 구성하는데 쓰이는 시스템의 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \hat{f}(x) + g(x)u \quad (4.3)$$

$$y = h(x)$$

제어 목적은 출력  $y$ 가 주어진 원하는 출력  $y_d$ 를 시스템 모델링이 불확실하다 하더라도 안정되게 추적을 하는 것이다. 또한  $y_d$ 와 그  $n$ 계 도함수는 모두 구할 수 있으며 그 크기는 제한되어있다고 가정한다.

예측된 시스템에 기초하여 다음과 같이 새로운 상태 변수를 정의하고 이를 ‘computed normal states’라 하자.

$$\mu_1 = y$$

$$\mu_2 = L_f^1 h$$

$$\vdots$$

$$\mu_n = L_f^{n-1} h$$

여기서  $L_f^i h$ 는 Lie 미분이다.

모델의 불확실성에 의해  $\mu_i$ 는 단순히 출력  $y$ 의 미분 값이 아니며 다음과 같은 형식으로 쓸 수 있다.

$$\dot{\mu}_1 = \mu_2 + D_1$$

$$\dot{\mu}_2 = \mu_3 + D_2$$

$$\vdots$$

$$\dot{\mu}_n = L_f^n h + L_g L_f^{n-1} h u + D_n$$

$$D_i = -L_f L_f^{i-1} h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$z_1 = y_d$ 로 정의하고  $z_i$ 는 Lyapunov 정리를 만족하도록 정의하자.

새로운 상태 변수  $\mu_i$ 에 대해서 각각 슬라이딩 표면을 다음과 같이 정의하자.

$$s_i = \tilde{\mu}_i - \phi_i \text{sat}(\tilde{\mu}_i / \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - z_i$$

$\phi_i$ 는 양의 상수이며  $\text{sat}(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \text{sgn}(x), & |x| > 1 \end{cases}$$

위의 식에서 보듯이  $s_i$ 를 0으로 제한한다는 것은 오차  $\tilde{\mu}_i$ 가  $\phi_i$  이내로 제한된다는 것을 뜻한다. 식(4.6)의 도함수는 다음과 같다.

$$s_1 \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_1 = s_2 + \phi_2 \text{sat}(\tilde{\mu}_2 / \phi_2) + z_2 - \dot{z}_1 + D_1$$

$$s_2 \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_2 = s_3 + \phi_3 \text{sat}(\tilde{\mu}_3 / \phi_3) + z_3 - \dot{z}_2 + D_2$$

$\vdots$

$$s_n \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_n = L_f^n h + L_g L_f^{n-1} h u - \dot{z}_n + D_n$$

$z_i (i = 2, \dots, n)$ 는 상태 변수의 함수이므로 도함수  $\dot{z}_i$ 는 정확하게 알 수 없고 따라서  $\dot{z}_n$ 로써 예측된다.

다음을 정의하자.

$$\Delta_i = D_i + \dot{z}_{i+1} - \dot{z}_i + \phi_{i+1} \text{sat}(\tilde{\mu}_{i+1} / \phi_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta_n = D_n + \dot{z}_{n+1} - \dot{z}_n \quad (4.8)$$

그리면 식(4.7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$s_1 \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_1 = s_2 + z_2 - \dot{z}_{1e} + \Delta_1$$

$$s_2 \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_2 = s_3 + z_3 - \dot{z}_{2e} + \Delta_2$$

$\vdots$

$$s_n \neq 0 \Rightarrow \dot{s}_n = L_f^n h + L_g L_f^{n-1} h u - \dot{z}_{ne} + \Delta_n$$

여기서  $\dot{z}_{ie} = \dot{z}_i = \dot{y}_d$ 로 정의한다. 모델링 오차  $\tilde{f}$ 에 대한 한계값을 안다면 다음과 같은 함수  $F_i$ 를 계산할 수 있다.

$$|\Delta_i| \leq F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{n-i} s_i^2 \quad (4.11)$$

여기서  $\alpha$ 는 양의 상수이다. 식(4.11)을 시간에 대해서 미분을 하면 식(4.12)를 얻을 수 있다.

$$\dot{V} = \alpha^{n-1} s_1 (s_2 + z_2 + \Delta_1 - \dot{z}_{1e})$$

$$+ \alpha^{n-2} s_2 (s_3 + z_3 + \Delta_2 - \dot{z}_{2e}) \quad (4.12)$$

$$+ \dots + s_n (L_f^n h + L_g L_f^{n-1} h u + \Delta_n - \dot{z}_{ne})$$

또한  $z_i$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$z_1 = y_d$$

$$z_2 = \dot{z}_{1e} - F_1 \text{sat}(\tilde{\mu}_1 / \phi_1) - \lambda s_1$$

$$z_3 = \dot{z}_{2e} - F_2 \text{sat}(\tilde{\mu}_2 / \phi_2) - \lambda s_2 - \alpha s_1 \quad (4.13)$$

$$z_4 = \dot{z}_{3e} - F_3 \text{sat}(\tilde{\mu}_3 / \phi_3) - \lambda s_3 - \alpha s_2$$

$\dots$

#### 5. 모의 실험

기존의 슬라이딩 모드 제어와 다중 슬라이딩 모드 제어의 성능을 평가하기 위한 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = ax_1^2 + bx_2$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 x_2 + u$$

$$y = x_1$$

각 시스템 매개 변수  $a, b, c$ 의 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{a} = a + \tilde{a}, \quad |\tilde{a}| \leq \Delta_a$$

$$\hat{b} = b + \tilde{b}, \quad |\tilde{b}| \leq \Delta_b$$

$$\hat{c} = c + \tilde{c}, \quad |\tilde{c}| \leq \Delta_c$$

모의 실험에 사용되는 매개 변수의 값은 다음과 같다.

1) 시스템 매개 변수

$$a = 1, \quad \hat{a} = 1.2, \quad \Delta_a = 0.5$$

$$b = 1, \quad \hat{b} = 1.3, \quad \Delta_b = 0.5$$

$$c = \cos^2 t, \quad \hat{c} = 1.5, \quad \Delta_c = 1$$

2) 단일 슬라이딩 모드 제어에 대한 매개 변수

$$\lambda = 10, \quad \phi = 0.02, \quad \eta = 0.2$$

3) 다중 슬라이딩 모드 제어에 대한 매개 변수

$$\lambda = 10, \quad \alpha = 1$$

$$\phi_1 = 0.02, \quad \phi_2 = 0.1$$

4) 추적하고자 하는 신호

$$y_d = 1 + \cos 5t$$

그림 1은 기존의 슬라이딩 모드와 다중 슬라이딩 모드 제어 방법의 출력을 비교한 것이다. 그림에서 보듯이 다중 슬라이딩 모드 제어는 기존의 슬라이딩 모드 제어에 비하여 도달 시간이 빨라졌음을 알 수 있다.

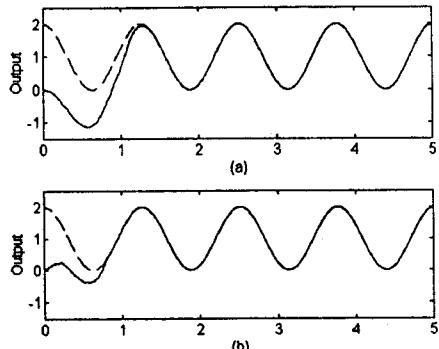


그림 1. (a) 단일 슬라이딩 모드 제어의 출력 (b) 다중 슬라이딩 모드 제어의 출력

그림 2는 각 제어 방법의 추적 오차를 나타낸 것이다. 기존의 슬라이딩 모드 제어를 썼을 경우 MSE는  $9.9634e-5$ 이며 다중 슬라이딩 모드 제어를 썼을 경우 MSE는  $1.9332e-5$ 으로 추적 오차가 향상되었음을 알 수 있다.

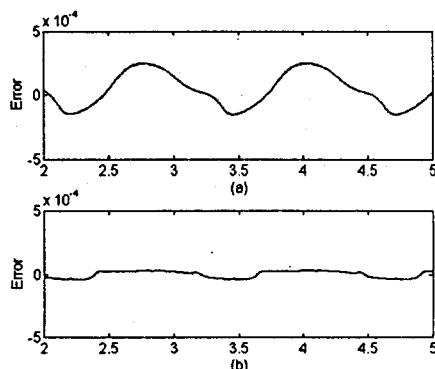


그림 2. (a) 정상 상태일 때 단일 슬라이딩 모드 제어의 추적 오차 (b) 정상 상태일 때 다중 슬라이딩 모드 제어의 추적 오차

그림 3은 각 제어 방법의 제어 입력을 표시한 것이다. 그림에서 보듯이 다중 슬라이딩 모드 제어는 기존 슬라이딩 모드 제어에 비해 추적 오차가 향상되었을 뿐만 아니라 제어 입력의 멀림 현상이 없음을 알 수 있다.

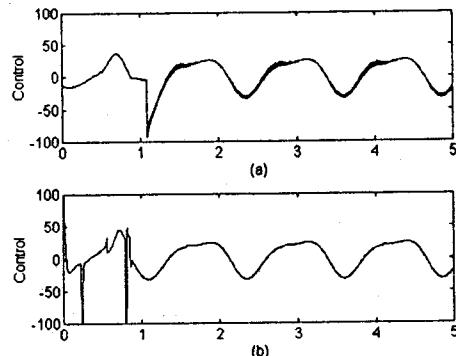


그림 3. (a) 단일 슬라이딩 모드 제어의 제어 입력 (b) 다중 슬라이딩 모드의 제어 입력

## 6. 결론

본 논문에서는 단일 슬라이딩 표면을 사용한 제어 방법과 다중 슬라이딩 표면을 사용한 제어 방법의 성능을 평가하였다. 다중 슬라이딩 모드 제어 방법은 단일 슬라이딩 표면을 사용한 제어 방법에 비해 전체적으로 빠른 도달 시간을 보였으며 시스템 추적 오차도 향상되었다. 또한 이러한 성능 향상에 비례하여 증가하는 제어 신호의 멀림 현상도 단일 슬라이딩 제어 방법에 비해 향상 되어짐을 알 수 있다. 앞으로의 연구 과제는 시스템의 내부 동특성이 존재하는 경우나 다중 입출력 시스템과 같은 좀 더 일반적인 시스템으로의 확장 방법을 제시하는 것이다.

## 참고문헌

- [1] Jean-Jacques E. Slotine and Weping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [2] Jean-Jacques E. Slotine, "Sliding Controller Design for Non-linear Systems", *Int. J. Control.*, Vol. 40, No. 2, pp. 421-434, 1984.
- [3] Jean-Jacques E. Slotine, "Adaptive Sliding Controller Synthesis for Non-Linear Systems", *Int. J. Control.*, Vol. 43, No. 6, pp. 1631-1651, 1986.
- [4] Jean-Jacques E. Slotine and J. Karl Hedrick, "Robust Input-Output Linearization", *Int. J. Control.*, Vol. 57, No. 5, pp. 1133-1139, 1993.
- [5] Andrew Alleyne, "Multiple Surface Sliding Control", *ASME Dynamic Systems and Control*, Vol. 55-1, pp. 93-99, 1994.