'95 대한전기학회 하계학술대회 논문집(1995. 7. 20~22)

월쉬함수 단일항전개를 이용한 최적제어기 설계

안두수* 오현철*° 이한석* 박준훈**
*성균관대학교 전기공학과 **충주산업대학 제어계측과

Design of optimal Controller via Single term Walsh Series

Ahn, Doo-Soo* Oh,Hyeon-Cheol*° Lee, Han-Seok* Park,Joon-Hun**
*Dept.of Electrical Eng. Sung Kyun Kwan univ.
**Dept. of Control Eng. Chung Ju ind. coll.

ABSTRACT

This paper presents the methode of optimal control theory and observer for time invariant system via Single Term Walsh Series. The algorithm of the optimal control theory is simulated by MATLAB.

1. 서 론

제어기설계에 있어서 전통적으로 PID제어기가 주로 사용되어 구조의 간단성과 안정된 동작점 때문에 효율적인 제어성능을 유지할 수 있었으나 이 제어기는 적절한 PID 계수 선정에 많은 어려움이 따른다. 1960년대 이후 연구가 진행되어온 상태공간 기법을 사용한 최적 제어이론은 시스템에 적용하여 계통의 상태를 조절하려는 목적으로 발전하여 왔다.그러나 비선형 리카티 미분방정식의 해를 구해야 하는 어려움이 있으며 연산시간의 과다로 인하여 실시간제어가 어려운 점이 있다.이 문제를 해결하기 위하여 월쉬 함수를 이용한 최적제어를 수행함으로서 최적제어 입력을 대수방정식으로 부터 간단히 구할 수 있다.

본 논문에서는 제어기 알고리즘으로 월쉬함수에 의한 최적제어를 이용한다. 최적제어 입력은 해밀토니안 (Hamiltonian) 방정식의 상태천이행렬 (State transition matrix)을 정의하고 월쉬함수 단일항 전개를 적용하여 리카티 방정식의 해를 간단한 대수 연립방정식[1]으로부터 결정한다.그리고 최적 상태 제어를 행하려면 모든 상태값을 궤환시켜야 하는데 실제 시스템에서 모든 상태를 직접 측정하는 것은 불가능하다. 이 점을 해결하기 위해서 출력으로 부터 상태벡터를 추정 할수 있는 관측기를 사용한다[2][11].따라서 관측기를 이용한 최적제어법칙을 월쉬 단일항 전개법으로 해를 구하고자 한다.

2. 이 론

선형 시불변계 시스템이 다음과 같이 표현된다고 가정한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

$$y = Cx(t) \tag{2.2}$$

아래와 같이 정의된 평가함수 J

$$J=\frac{1}{2}[x(t_f)-r(t_f)]^T H[x(t_f)-r(t_f)] + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\{[x(t)-r(t)]^T Q[x(t)-r(t)] + u^T(t)Ru(t)\}dt \tag{2.3}$$

단, H, Q: real symmetric positive semi-definte matrix
R: real symmetric positive definte matrix

을 최소화 하는 최적제어 벡터 $u^*(t)$를 구하는 문제를 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \hline \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \hline p^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hline Qr(t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

단, $M=\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

$Qr(t)$항: forcing function

식(2.4)의 표준형 방정식의 상태천이 행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi(t_f, t) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \hline \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{array}\right]$$

$$\Phi(t_f, t_f) = I$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t_f, t) = -M\Phi(t_f, t) \tag{2.5}$$

식(2.5)로 부터

$$\begin{bmatrix} x^*(t_f) \\ \hline p^*(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t_f, t)\begin{bmatrix} x^*(t) \\ \hline p^*(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f}\Phi(t_f, \tau)\begin{bmatrix} 0 \\ \hline Qr(\tau) \end{bmatrix} d\tau \tag{2.6}$$

이다.

그런데 $P(t_f)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} P^*(t) &= [\Phi_{22}(t_f, t) - H\Phi_{12}(t_f, t)]^{-1}[H\Phi_{11}(t_f, t) - \Phi_{21}(t_f, t)]x^*(t) \\ &\quad + [\Phi_{22}(t_f, t) - H\Phi_{12}(t_f, t)]^{-1}[Hf_1(t) - Hr(t_f) - f_2(t)] \\ &\triangleq K(t)x^*(t) + s(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

또한,최적제어 입력

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P^*(t) \tag{2.8}$$

이다.그러므로 새로운 상태방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다[4].

$$\dot{x}(t)=[\ A-BR^{-1}B^{T}K(t)]\ x(t)+V(t) \qquad (2.9)$$

$$\text{단, } V(t)=-BR^{-1}B^{T}s(t) \qquad (2.10)$$

결국 식(2.9)의 해를 구하므로써 시스템의 최적제어 벡터를 구할 수 있는데, 월쉬함수 단일항전개에 의해서 이를 수행한다[3].

1) 월쉬함수 단일항 전개에 의한 최적제어

월쉬함수 단일항 전개를 이용하기위해서 $\tau=\frac{m}{t_f}t=\frac{1}{\Delta t}t$ 로 치환하고 식(2.5)를 다음과 같이 치환한다. 여기서 Δt는 샘플링 구간이다.

$$\frac{d}{dt}\Phi(t_f,\tau)=-\frac{t_f}{m}M\Phi(t_f,\tau) \qquad (2.11)$$

단, 여기서 m은 전개항수이다.

$\frac{d}{dt}\Phi(t_f,\tau)$와 $\Phi(t_f,\tau)$를 월쉬함수 단일항으로 전개하면,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t_f,\tau)=H_k\phi_o(\tau), \qquad \Phi(t_f,\tau)=\Phi_k\phi_o(\tau) \qquad (2.12)$$

$$\text{단, } \Phi_k(t_f,\tau)=\left[\begin{array}{c|c}\Phi_{11k}(t_f,\tau) & \Phi_{12k}(t_f,\tau)\\ \hline \Phi_{21k}(t_f,\tau) & \Phi_{22k}(t_f,\tau)\end{array}\right]$$

k는 임의의 k번째 세부구간을 의미함.

이고, 다음의 반복적인 연산에 의해 각 구간마다 식(2.11)의 해를 얻을수 있다.

$$H_k=[\ I-\frac{\Delta t}{2}M]^{-1}[\ \Delta tM\Phi(t_f,\Delta tk)]$$

$$\Phi_k=\Phi(t_f,\Delta tk)-\frac{1}{2}H_k \qquad (2.13)$$

$$\Phi(t_f,\Delta tk)=\Phi(t_f,\Delta tk)-H_k$$

단, $k=m,m-1,\ldots\ldots,1$ (역순으로 반복)

이제 식(2.6)에서 적분부분에 월쉬함수 단일항적분을 적용하기위해서 다음과 같이 정의한다.

$$w(t)=\int_t^{t_f}[\ H\Phi_{12}(t_f,\tau)-\Phi_{22}(t_f,\tau)]\ d\tau\ ,\quad w(t_f)=0 \qquad (2.14)$$

식(2.14)의 적분을 각각의 세부구간의 적분으로 표현하면 다음과 같다.

$$w(t)=\int_{(m-1)\Delta t}^{t_f-m\Delta t}\beta(t_f,\tau)d\tau+\int_{(m-2)\Delta t}^{(m-1)\Delta t}\beta(t_f,\tau)d\tau+\ldots\ldots$$

$$+\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t}\beta(t_f,\tau)d\tau+\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\beta(t_f,\tau)d\tau+\ldots\ldots \qquad (2.15)$$

단, $\beta(t_f,\tau)=[\ H\Phi_{12}(t_f,\tau)-\Phi_{22}(t_f,\tau)]$, $\Delta t=t_f/m$(샘플링구간)

$w(t)=w_k\phi_o(t)$로 전개하면 다음과 같다. w_k는 월쉬함수 단일항 전개시 계수를 나타낸다.

$$w_m=\frac{t_f}{2m}[\ H\Phi_{12m}(t_f,\tau)-\Phi_{22m}(t_f,\tau)]\ (\because \int_0^1\Phi_0(t)dt=\frac{1}{2}) \qquad (2.16)$$

여기서, m은 마지막 세부구간.($k=m$ 인 구간)

$$w_k=w_{k+1}+\frac{t_f}{2m}[\ (H\Phi_{12k}-\Phi_{22k})+(H\Phi_{12k+1}-\Phi_{22k+1})] \qquad (2.17)$$

단, k(임의의 구간) $=m-1,m-2,\ldots,2,1$

임의의 구간 k에서의 적분값은 역방향으로 적분값을 더함으로써 구할수 있음을 알 수 있다.

$$K_k=[\ \Phi_{22k}-H\Phi_{12k}]^{-1}[\ H\Phi_{11k}-\Phi_{21k}] \qquad (2.18)$$

$$s_k=[\ \Phi_{22k}-H\Phi_{12k}]^{-1}[\ w_k-Hr(t_f)] \qquad (2.19)$$

각각의 샘플링 구간에서 구한 K_k, s_k를 각각의 구간마다 대입하면 월쉬함수 단일항 전개에 의한 미분방정식의 해를 구하는 반복적인 연산과정에 의해서 k(임의의 구간) 번째 구간에서 최적상태벡터인 x_k를 구할 수 있다 [3][7][10].

2) 월쉬함수 단일항전개에 의한 관측기

앞절에서는 모든 상태값을 측정할 수 있다고 가정하였다. 상태를 궤환하여 최적제어 법칙을 찾기위해서는 모든 상태값들을 알수 있어야 한다. 실제 시스템에서는 상태값의 하나인 x_2은 측정이 불가능하다고 가정하자.

(A,C)가 가관측한다면 다음과 같은 최소차수관측기를 정의할수 있다[2][5].

$$\dot{z}(t)=Tz(t)+Gy(t)+Uu(t) \qquad (2.20)$$

$$\hat{x}(t)=My(t)+Nz(t) \qquad (2.21)$$

$$u^{*}(t)=K\hat{x}(t) \qquad (2.22)$$

여기서 T,G,U,M,N 행렬을 다음과 같이 구하였다.

$$T\triangleq A_{22}-LA_{12},\quad G\triangleq TL+A_{21}-LA_{11},\quad U\triangleq B_2-LB_1$$

$$M\triangleq L_1+L_2L\ ,\quad N\triangleq L_2 \qquad (2.23)$$

그러므로 관측기는

$$\dot{z}(t)=(A_{22}-LA_{12})z(t)+(TL-A_{21}-LA_{11})y(t)+(B_2-LB_1)u(t) \qquad (2.24)$$

$$\hat{x}(t)=My(t)+Nz(t) \qquad (2.25)$$

관측기를 포함한 최적제어 입력

$$\begin{aligned}u^{*}(t)&=F\hat{x}(t)+v(t)\\&=F(My(t)+Nz(t))+v(t)\\&=Fx(t)+FNe(t)+v(t)\end{aligned} \qquad (2.26)$$

를 유도할수 있다. 그러므로 새로운 상태방정식

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(A+BF)x(t)+B(FNe(t)+v(t))\\&=\tilde{A}x(t)+B\tilde{u}(t)\end{aligned} \qquad (2.27)$$

단, $\tilde{A}\triangleq A+BF$, $\tilde{u}(t)\triangleq FNe(t)+v(t)$

가 된다.

상태변수 $x(t)$와 관측자 함수를 월쉬함수 단일항으로 변환하면

$$\dot{x}(t)=\overline{X}\phi_o(t),\ x(t)=X\phi_o(t),\ \dot{e}(t)=E\phi_o(t) \qquad (2.28)$$

이다.

m항 전개할 경우 k번째 구간에서 월쉬 단일항전개에 의한 일반화된 반복 알고리즘을 적용할 경우 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\overline{X_k}=[\ I-\frac{1}{2m}\tilde{A}]^{-1}\frac{1}{m}[\ \tilde{A}x(k-1)+B\tilde{u}_k\ ]$$

$$X_k=\frac{1}{2}\overline{X_k}+x(k-1)$$

$$x(k)=\overline{X_k}+x(k-1) \qquad (2.29)$$

단, $k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,m$ (전개항수)

3. 시뮬레이션

다음과 같은 2차 직류전동기의 최적제어를 위해 본연구 방법을 적용하자. 시스템은 선형시불변으로 가정하면 상수행렬 A,B,C,D 는 다음과 같다. [12]

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ -2 & -10\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\qquad x_o=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C=[\ 1\quad 0\ ]\qquad D=0$$

x_1은 전동기의 각속도이며, x_2는 전기자 전류이다. 평가함수를 식(2.3)과 같이 정의하였다.

직류전동기를 정지상태에서 기준입력을 25 [rad/sec]로 회전하도록 한후 다시 50 [rad/sec]로 회전할때의 시간응답을 나타내었다.

최소차수 관측기 이득 $L=0.1$ 이며 행렬 T, G, U, M, N 은 다음과 같다.

$$T=-11, \quad G=-2.9, \quad U=2$$

$$M=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \qquad N=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

가중행렬은 컴퓨터 시뮬레이션에 의하여

$$Q=H=\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R=0.0005, \quad t_f=0.5\,\text{sec}$$

결정하였다.

월쉬함수 단일항전개의 반복 알고리즘을 적용하면 그림 1,2 와 같은 (m=50)일때의 최적 상태궤적을 나타낼수 있다. 평가함수의 형태가 Tracking문제이기 때문에, x_1(각속도)만을 제어하기위해서 x_1에만 상태 가중값을 준 결과 시간에 대하여 제어입력을 가하지 않았을때 보다 빠르게 기준입력을 잘 추종함을 알 수 있었다.

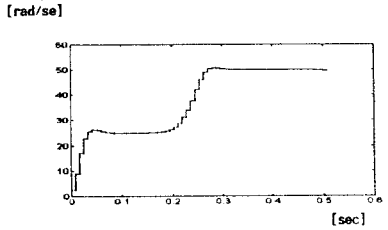

그림 1 x_1상태값

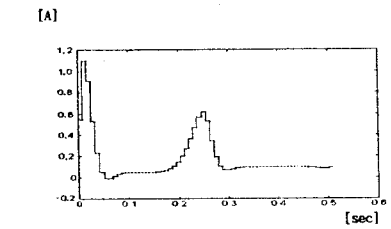

그림 2 $\hat{x}_2$ 상태값

4. 결 론

본 논문에서는 선형 시불변 시스템의 최적제어를 위해 월쉬함수 단일항 전개를 사용하여 최소차수 관측기를 포함한 최적제어기법을 제시하였다.

일반적으로 최적제어 벡터를 구하기위해서는 비선형 리카티 미분방정식의 해를 구해야 하는데 해를 얻기가 매우 어렵다. 이와같은 문제를 해결하기 위해서 본연구에서는 해밀토니안(Hamiltonian)방정식에 월쉬함수 단일항전개를 사용하여 반복적인 대수 연립방정식으로 부터 간단히 최적제어 법칙을 결정하도록 하였고, 측정 불가능한 상태값을 추정하기 위해서 연산시간을 줄일 수 있는 최소차수 관측기를 설계하여 최적제어를 수행 할 수 있도록 하였다.

이 결과, 월쉬함수 단일항 전개를 이용하므로써 연속계를 이산화 된값으로 바로 얻을수 있기 때문에 컴퓨터의 적용이 쉽다는 이점이 있었고, 부분적으로 연속인 값으로 표현되므로 실제적인 제어기의 구현이 간편하다는 점을 들수 있겠다. 그리고, 본 연구에서는 월쉬함수 변환을 소프트웨어 적으로 처리하여 제어입력을 구하였지만, 향후 연구 과제로서 월쉬 제너레이터(Generator)를 설계하여 전체시스템을 월쉬변환파로써 처리한다면 변환자체를 하드웨어로 처리할수 있기때문에 실시간 제어에 더욱 좋은 결과를 얻을수 있으리라 기대된다.

참 고 문 헌

[1] D.Luenberger, "Optimization by vector space methods", New-York, Wiley , 1969

[2] Luenberger D.G., "Anintroduction to observer", IEEE trans. on AC., Vol.AC-16, No.6, pp.596-602, 1971.

[3] K.R.Palanisamy, "Analysis and Optimal control of linear system via single term Walsh series approach",

[4] Donald E.Kirk, "Optimal control theroy-An introduction", Prentice-Hall Inc. pp.219-227, 1970

[5] Chao-Kuang Chen and Ching-Yu Yang, "Linear optimal control system using reduced observer via polynomial series", INT.J.SYSTEM SCI., Vol.18, No.7, pp1355-1362

[7] 이한석, "월쉬함수 단일항 전개에 의한 대규모 시스템의 계층별 최적 제어", 성균관대학교 석사학위 논문, 1991.

[9] 김종식, "선형 제어시스템 공학", 청문각, 1992.

[10] Chih-Fan chen and chi-huang hsiao, "Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh function", IEEE Transaction on Automatic control, Vol.20, No.5, pp.596-602, 1975.

[11] Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", Holt-Saunders.

[12] Frank L. Lewis, "Applied Optimal Control and Estimation", Prentice-Hall Inc, pp131-133