

## 프로니 해석법을 이용한 공진 주파수 검출 알고리즘

조경례, 김성수, 박종근  
서울대학교 전기공학과

홍준희  
경원대학교 전기공학과

## Oscillation Frequency Detecting Technique for Transmission Line Protection using Prony's Analysis

Kyung-Rae Cho SONG-SOO Kim Jong-Kwan Park  
Scoul National university

Jun-Hoo Hong  
Kyung-won University

**Abstracts**-The relaying algorithm to calculate the fault distance from only transient signal at faults in T/L is presented In this paper. At faults the oscillation frequency components exist in both voltage and current and these components minimize the input impedance shown in fault point.

The equivalent source impedance shown in relaying point is needed to calculate the fault distance using these components. To source impedance, the reflection coefficient between forward wave and backward wave is introduced and the Prony's analysis is also employed to extract the oscillation frequency component from transient signals.

The case study show that the new distance relaying algorithm satisfies the high operation speed and high accuracy even if the algorithm uses only transient signals.

## 1. 서론

대부분의 송전선 보호용 거리계전기는 자기단의 전압, 전류를 입력으로 하여 기본주파수 대역에서 보이는 임피던스를 구하여 자기 보호 구간에서의 고장 유무를 판별한다. 따라서 계전기의 입력으로 들어오는 신호중 기본주파수 외의 성분은 계전기의 정확한 동작에 지장을 초래하므로 일반적인 거리계전는 아날로그 저역통과 필터를 사용하여 이러한 성분들을 제거한다. 보다 정확한 거리 연산을 위해 높은 치수의 아날로그 필터를 사용하기도 하는데 이는 필터의 시자연을 유발해 고속의 고장 검출을 불가능하게 한다. 그러므로 기본주파수만을 이용한 거리계전기는 고속으로 고장을 검출할 수 있고 또한 TSCC(Thyristor Controlled Series Capacitor)등의 FACTS(Flexible AC Transmission System)기술의 도입시에는 카페시터 앞단과 끈단 등의 고장을 구별할 수 없는 치명적인 단점이 있다. 이를 극복하기 위해서는 고장시 발생하는 직류옵셋이나 고조파 성분들을 이용하는 방법의 연구가 반드시 필요하다.

일반적으로 송전선에서 고장이 발생하면 기본파외에 직류 옵셋이나 많은 고조파 성분들이 발생하여 기본파와 함께 계전기의 입력을 들어오게 된다. 이 성분들은 기본파만을 사용하는 거리계전기에서 불때는 고장 검출에 방해를 주는 집을 정도에 불과하지만 고장의 발생에 대한 또 하나의 정보를 가지고 있음을 묵과할 수 없다. 예를 들면 직류 옵셋의 시정수는 송전선의 거리와 계전기 끈단의 임피던스 특성에 의해 정해진다. 또한 기본주파수 이상의 대역에 발생하는 고조파들도 고장시의 고장거리의 정보를 가지고 있음을 익히 잘 알려진 내용이다.

이러한 성분들중에서 공진 주파수 성분이라 부르는 매우 큰 값을 가지는 주파수 성분들이 존재한다. 공진 주파수는 고장점에서 계전기 단을 향한 입력 임피던스가 가장 작은 값을 가지는 주파수 값을 의미한다. 고장점에서 보는 입력임피던스는 송전선의 고장거리와 계전기 끈단의 임피던스에 의해 정해진다. 공진 주파수는 최근 널리 알려진 프로니 해석법(Prony's

Analysis)에 의해 검출이 가능하다. 그러나 계전기 끈단의 임피던스를 계전기에서의 정보만으로 각각의 주파수에 대하여 추정하는 방법이 제시된 바 없어서 공진 주파수를 검출했어도 직접 고장 거리를 추정할 없었다. 따라서 계전기에 들어오는 입력만으로 계전기 끈단의 임피던스 특성을 찾을 수 있으면 공진 주파수 성분으로부터 고장거리를 추정이 가능하다.

본 논문에서는 프로니 해석법을 이용하여 공진주파수를 검출하였으며, 진행파의 반사 계수를 이용하여 계전기 끈단의 공진 주파수 대역의 임피던스를 구하는 방법을 제시하였다. 또한 공진 주파수와 반사계수로부터 고장거리를 추정하는 거리계전 알고리즘을 제시하였다.

## 2. 진행파의 반사와 공진 주파수

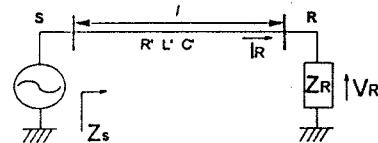


그림 1 단상 선로

그림 1에서 송전선의 선로 정수를 각각  $R[\Omega/km]$ ,  $L[H/km]$ ,  $C[F/km]$ 라고 하면 이 선로의 특성임피던스  $Z_0$ 와 전달정수  $\gamma$ 는 아래와 같다.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Y}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} \quad (1)$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)}$$

이때 송전선 S로부터 거리가  $x$ 인 선로의 임의의 점에서 전압과 전류의 관계를 나타내는 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial I}{\partial x} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial x}$$

또한 식 (2)를 풀면 수전단의 전압과 전류를 진행파의 형태로 표현하는 다음식을 구할 수 있다.

$$V_x = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2} + \frac{V_R - Z_0 I_R}{2}$$

$$= V_1 + V_2$$

$$I_R = \frac{V_R + Z_0 I_R}{2Z_0} + \left( -\frac{V_R - Z_0 I_R}{2Z_0} \right) \quad (3)$$

$$= I_1 + I_2$$

식 (3)에서  $V_1, I_1$ 은 수전단  $R$ 로 입사하는 전압과 전류의 전진파를,  $V_2, I_2$ 은 수전단  $R$ 에서 반사되어 송전단  $S$ 로 향하는 후진파를 의미한다.

식 (3)으로부터 수전단  $R$ 에서의 전압과 전류의 반사계수를 구하면 각각 다음과 같이 된다.

$$m_r = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_R - Z_0 I_R}{V_R + Z_0 I_R} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} \quad (4)$$

$$m_r = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{V_R - Z_0 I_R}{V_R + Z_0 I_R} = -\frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = -m_r$$

수전단의 전압과 전류가 주어졌을 때 송전단  $S$ 에서의 전압과 전류  $V_s, I_s$ 는 각각

$$V_s = V_R \cosh \gamma l + Z_0 I_R \sinh \gamma l \quad (5)$$

$$I_s = \frac{V_R}{Z_0} \sinh \gamma l + I_R \cosh \gamma l$$

의 식이 된다.

이때 송전단에서 본 입력 임피던스  $Z_s$ 는 식 (6)과 같다.

$$Z_s = \frac{V_s}{I_s} \quad (6)$$

$$= Z_0 \frac{Z_R \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_R \sinh \gamma l + Z_0 \cosh \gamma l}$$

수전단의 부하에 따른 공진주파수의 범위를 찾기 위해 수전단이 개방된 경우와 단락된 경우에 대하여 입력임피던스를 구해 보자. 먼저 수전단을 개방하면, 즉  $Z_R = \infty$ 라면 입력 임피던스는

$$Z_{s0} = Z_0 \cot \gamma l \quad (7)$$

이 된다. 송전선에서  $R'$ 의 값은  $\omega L'$ 에 비하여 매우 작으므로 무시하면 전달정수는 식(8)과 같이 순허수가 된다.

$$\gamma \equiv j\omega \sqrt{LC} = j\beta l \quad (8)$$

이때 입력 임피던스  $Z_{s0}$ 가 0이 되는  $\gamma$ 는 식 (6)을 0으로 하게 된다. 즉

$$\gamma l = j\beta l = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

그러면 공진주파수는

$$f_r = \frac{\omega}{2\pi} = -\frac{\beta}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{2n+1}{4l \sqrt{LC}} \quad (10)$$

이 되며 첫번째 공진주파수는

$$\frac{1}{4l \sqrt{LC}} = \frac{1}{4\tau} \quad (11)$$

여기서  $\tau = \frac{l}{\sqrt{LC}} \equiv \frac{l}{c}$ 의 값으로 거리  $l$ 을 진행하는데

필요한 시간을 나타낸다.  
반면에 수전단을 단락 시키면 입력 임피던스는

$$Z_{ss} = Z_0 \tanh \gamma l \quad (12)$$

이 되며 개방시와 같은 방법으로 공진 주파수를 구하면

$$f_r = \frac{\omega}{2\pi} = -\frac{\beta}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{n}{2l \sqrt{LC}} = \frac{n}{2\tau} \quad (13)$$

따라서 첫번째 공진주파수는  $n = 1$  일 때  $\frac{1}{2\tau}$  이 되며 인접한

공진주파수 간의 차이는 개방시와 같이  $\frac{1}{2\tau}$  이 된다.

수전단이 개방일 때 수전단의 전압과 전류의 반사계수는 각각

$$m_{r0} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = 1 \quad (14)$$

$$m_{i0} = -m_{r0} = -1$$

반면에 수전단이 단락일 때는

$$m_{r0} = \frac{Z_R - Z_0}{Z_R + Z_0} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1 \quad (15)$$

$$m_{i0} = -m_{r0} = 1$$

이들로부터 부하 임피던스가 순저항일 때는 수전단에서의 반사계수의 범위는 전압과 전류 모두

$$-1 \leq m_r \leq 1, \quad -1 \leq m_i \leq 1 \quad (16)$$

의 범위에 있게 되며 부하 임피던스가 복소수인 경우는 반사계수 모두 복소수의 값을 가지며

$$|m_r| \leq 1, \quad |m_i| \leq 1 \quad (17)$$

을 만족한다.

앞에서 기술한 바와 같이 공진주파수는 송전단에서 보는 임피던스를 0으로 하는 주파수를 의미하나, 실제 송전선에는 저항성분이 있으며 부하나 전원의 소스 임피던스가 완전히 0이 되는 경우가 없어서 보통은 임력임피던스의 절대값을 최소화하는 주파수를 뜻하게 된다. 즉

$$f_r : \min |Z_s| \quad (18)$$

### 3. Prony's Analysis에 의한 고장시의 공진 주파수 검출

#### 3.1 프로니 해석법

프로니 해석법은 주어진 신호를 최소지승오차의 관점에서 식(19)와 같이 지수적으로 감소하는 정현파들의 선형 결합으로 표현하는 방법이다.[11..14]

$$y(t) = \sum_{k=1}^N B_k \exp(\lambda_k t) \quad (19)$$

이때 프로니 해석법은 주파수 대역의 스펙트럼을 정확히 구할 수 있고 인접한 주파수 성분을 구별하는 주파수 분해능력이 뛰어난 방법이다. 더욱이 주어진 신호의 주파수 뿐만 아니라 감소정수까지 구하므로 푸리에 해석의 한계를 극복하고, 주어진 신호를 나타내는 근사 유리함수 꼴의 Laplace 영역 표현을 직접 얻을 수 있는 장점을 가지고 있다.

식(19)의 시간 영역의 식은 식(20)과 같이 간단히 s-영역으로 변환될 수 있으며  $s = j\omega$ 라고 하면 입력 신호  $y(t)$ 에 대한 주파수 특성  $Y(\omega)$ 를 구할 수 있다.

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{s - \lambda_k} \quad \text{또는} \quad Y(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{j\omega - \lambda_k} \quad (20)$$

그림 3은 고장 데이터에서 공진 주파수를 검출하는 예를 나타내고 있는데 그림에서 고장신호는 기본 주파수의 약 1/4주기 정도이며 이 신호는 그림에 나타나는 저주파수적으로 감소하는 정현파 신호를 가지고 있다. 따라서 그림에서 진동하고 있는 성분은 기본주파수 성분이 아니라 공진 주파수성분이며 이값은 프로니 해석을 통하여 얻은 여러개의 정현파 신호들 중에서 신호의 밀단에서 가장 큰 값을 가지는 성분을 의미한다.

실제 공진주파수를 이용할때의 문제점은 첫째, 전압 위상각이 0도 부근일대의 그 성분의 크기가 매우 작아서 잡음과의 구별이 어려워 정확한 공진 주파수값의 측정이 불가능하다는 사실이다. 둘째, 빠른 고장 판단이 요구되는 송전선 보호 측면에서는 긴 시간 동안의 데이터를 이용할 수 없으므로, 기본 주파수의 1/4 주기이하의 시간에 해당하는 만큼만 전압이나 전류의 샘플 정보를 정보를 이용하는 것이 비용적이다. 그러나 이 정도의 시간의 데이터에서는 기본 주파수성분이 보호를 위한 정보하기 보다 공진 주파수 검출에 있어서 지장을 주게 된다. 세번째 문제점은 가까운 거리의 고장에 대해서는 높은 대역의 공진 주파수 성분이 발생하지만 CT, PT의 저역통과 필터 특성때문에 보호계전기의 입력에서는 그 성분이 전혀 나타나지 않는 것이다.

따라서 고장시 발생하는 공진 주파수 성분은 고장 위상각이 0도 부근이 아니고 또한 고장 거리가 먼곳일때 고장 판단의 유용한 정보가 될 수 있다.

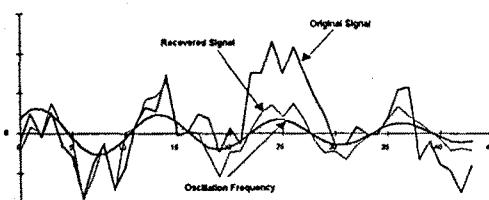


그림 2. 공진 주파수의 검출

### 3.2 고장 모델

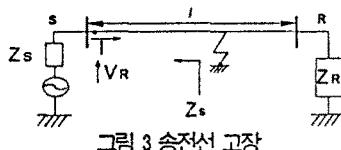


그림 3 송전선 고장

그림 3와 같이 송전선의 고장 현상을 고장점에 고장시의 전압과 같은 크기이고 부호가 반대인 고장 전압을 임펄스의 형태로 인가하는 것으로 여길 수 있으며, 이 고장 전압은 계전기 설치점에서 보이는 직류 읍셋과 고조파들을 만드는 에너지원으로 여길 수 있다. 또한 고장 저항은 선로의 특성임피던스에 비하여 매우 작아서 무시할 수 있으며 그림 4와 같이 등가회로를 구성할 수 있다.

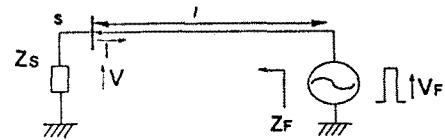


그림 4. 고장시의 등가회로

고장 전압은 수많은 주파수 성분의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$V_F = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\omega_n t} \quad (21)$$

이들 각각의 주파수에 대한 고장점에서 송전단을 본 입력 임피던스는 앞절과 마찬가지로

$$Z_F = \frac{V_F}{I_F} = \frac{Z_s \cosh \gamma l + Z_o \sinh \gamma l}{Z_o \sinh \gamma l + Z_s \cosh \gamma l} \quad (22)$$

이 되며 이들 주파수중에서 식(22)의 입력임피던스를 최소로 하는 주파수는 송전단까지 전파하여 계전기 설치점의 전압과 전류에 가장 크게 나타나게 된다. 또한 계전기 설치점에서의 전압과 전류를 식(3)과 같이 전진파와 후진파로 변환할 수 있으며 이들 진행파에도 공진주파수 성분은 여전히 가장 큰 값으로 남아있게 된다. 따라서 진행파와 후진파에서 같은 값의 공진 주파수를 프로니 해석을 통하여 구할 수 있다.

식(22)의 입력임피던스를 최소로 하는 고장 거리  $l$ 을 구하기 위해서는 계전기 두단의 등가 전원 임피던스  $Z_s$ 를 구해야 하는데 각각의 주파수에 대하여 임피던스 값이 달라진다. 더욱이 뒷단이 집중정수 회로가 아닌 송전선이나 캐패시터가 연결되어 있으면 일반적인 방법으로 계전기에서의 전압과 전류의 정보만으로 등가 임피던스를 구하는 것은 불가능하다.

### 3.3 반사 계수와 전원 임피던스 추정

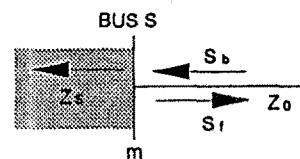


그림 5 반사계수

그림 5와 같이 특성 임피던스  $Z_0$ 인 송전선에서  $Z_s$ 의 임피던스를 기진 계전기 뒷단의 Bus S로 후진파  $S_b$ 가 입사하여  $S_b$ 의 전진파만을 반사되어 나온다면 두 매질의 경계점에서의 반사계수  $m$ 은

$$m = \frac{S_f}{S_b} = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \quad (23)$$

가 된다.

이 반사계수를 구하기 위해서는 계전기단에서의 전압과 전류를 전진파와 후진파의 형태로 변환하고 이들로부터 가장 큰 값을 가지는 공진 주파수성분, 즉  $S_f, S_b$ 를 찾아내면 다음과 같이 공진 주파수  $\omega$ 에 대한 반사계수를 구할 수 있다.

$$m = \frac{S_f}{S_b} \Big|_{l=0} = \frac{A_f e^{j\omega t}}{A_b e^{j\omega t}} \Big|_{l=0} = \frac{A_f}{A_b} \quad (24)$$

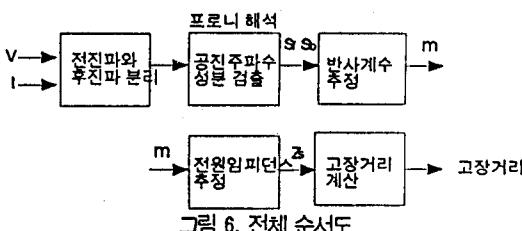
그러면 공진 주파수  $\omega$ 에 대한 등가 전원 임피던스  $Z_s$  또한 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$Z_s = Z_0 \frac{1-m}{1+m} \quad (25)$$

### 3.4 고장 거리 추정

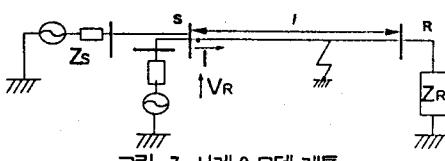
고장거리를 구하기 위해서는 다음의 5단계를 거친다.

- Step 1. 전압과 전류로부터 전진파와 후진파를 구한다.
- Step 2. 전진파와 후진파의 공진주파수 성분 추출  
- 프로니 해석법
- Step 3. 각 진행파의 공진주파수 성분에서 반사계수 추정
- Step 4. 반사계수에서 전원 임피던스 추정
- Step 5. 고장점 입력임피던스를 최소로 하는 거리 산출 이를 그림 6에 나타내었다.



### 4. 사례 연구

사례연구에서는 전원 임피던스가 집중정수 회로인 경우인 사례 1과 그림 7과 같이 송전선이 중간에 포함된 단상선로 사례 2 두 가지 경우에 대하여 고장 거리 계산 결과를 나타내었다.



먼저 전원 임피던스가  $R_L$ 의 집중 정수 회로인 경우에 대하여 표 1에 정리해 보았다.

표 1. 집중정수 회로 전원 임피던스 (90km 고장시)

	공진 주파수	반사계수 (공진주파수)	전원 임피던스	고장 거리
실제값		$0.9803 + j0.1994$	$20 + j3625$	90km
계산값	870 Hz	$0.9847 + j0.1712$	$43 + j4229$	89.5 km

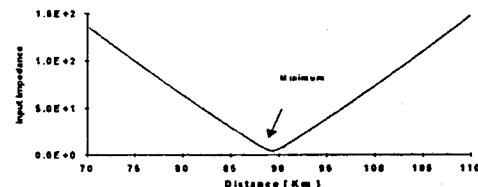


그림 8. 사례1의 거리별 입력 임피던스

표 2 송전선 2개로 연결된 경우(90km 고장시)

	주파수	반사계수	전원	고장 거리
계산값	1419 Hz	$-0.28 + j0.354$	$-166 + j146$	90km

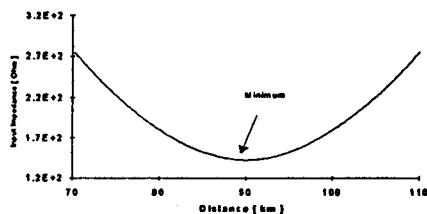


그림 9. 사례 2에서의 거리별 입력임피던스

그림 8과 9에서 보듯이 제시된 알고리즘은 계전기 뒷단이 전원임피던스가 집중정수 회로와 분포정수 회로인 경우 모두에 대하여 잘 맞고 있다.

### 5. 결론

본 논문에서는 송전선 고장시의 과도 신호로 부터 고장거리를 계산하는 새로운 거리계전 알고리즘을 제시하였다. 이 방법은 고장시에 전압과 전류에 나타나는 공진 주파수 성분에 근거하고 있으며 공진주파수 성분을 추출하는 방법으로 프로니 해석법을 사용하였다. 고장거리계산에 필요한 또 하나의 조건은 계전기 뒷단의 전원 임피던스인데 이는 진행파의 반사계수를 구하여 얻을 수 있다.

사례연구를 통해 제시된 방법이 빠른 시간내에 정확하게 고장거리를 구할 수 있음을 보았다.

### 6. 참고 문헌

- [1] Jun-Hee Hong, Jong-Keun Park, "Time-Domain Reduction Method Using Prony Analysis for Electromagnetic Transients Study", IEEE Winter Meeting, Feb. 1995.
- [2] Tufts and R. Kumaresan, Singular Value Decomposition and Improved Frequency Estimation Using Linear Prediction", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-30, No.4 August, 1982, pp. 671-675
- [3] Rao, K.S. Arun, "Model Based Processing of Signal: A State Space Approach", Proc. IEEE, Vol. 80, No.2, Feb. 1992
- [4] Oinis Chaari, " Prony's Method : An Efficient Tool for the Analysis of Earth Fault Currents in Petersen-Coil-Protected Networks" .
- [5] 조경래, 박성희, 김성수, 박종근, 김광호, "고장시의 과도 신호를 이용한 송전선 보호용 고속 거리계전 알고리즘", 대한전기학회 전력계통 연구회 춘계학술대회 초록집, pp 56-58, 1995년 4월