

하나의 전위장벽에 대한 전자의 터널링 시간

이욱°, 이병호
서울대학교 전기공학과

Electron Tunneling Time
through a Single Potential Barrier

Wook Lee, and Byoung-ho Lee
Department of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract

The question-"How fast an electron tunnels a potential barrier?" looks like simple, but is controversy for more than 40 years. Because "tunneling" involves complicated internal processes and its definition is ambiguous. Recent experiments showed that the phase time is the best model of tunneling time among other times- for example, dwell time, Larmor clock time etc. In this paper, we simulated the tunneling time for Gaussian wave packet by program InterQuanta and compared with the phase time. In particular we focused on the effect of wave packet spreading in momentum space(or real space) which is not expressed by the phase time formula.

I. 서론

에너지 장벽보다 낮은 에너지를 가진 입자가 그 장벽을 터널링(tunneling)하는 현상은 잘 알려져 있으며 그 투과계수를 계산하는 방법은 거의 모든 양자역학 교과서들에서 다루고 있는 기본적인 내용이다. 그러나, 입자가 이러한 에너지 장벽을 터널링하는데 걸리는 시간은 40여년 동안 계속 논의되어 온 간단한 주제가 아니다. 위상 시간(phase time)이라는 개념적으로 간단한 시간이 터널링 시간으로 일찌기 Bohm과 Wigner에 의해 제안되었으며[1,2], 이 밖에도 dwell time, Larmor clock time 등이 제안되었다[3-5]. 뿐만 아니라, 최근에는 transmission line technique을 사용한 방법도 연구되었다[6]. 후자의 방법은 독특한 특성을 가지는데, 그것은 터널링 시간이 항상 '고전적 시간(classical time)'보다 길다는 것이다. 여기에서, 고전적 시간이란 에너지 장벽이 없을 때 같은 거리를 그 입자가 통과하는데 걸리는 시간이다.

그러나, 최근 Chiao 그룹의 실험에 의해, 광자(photon)의 wave packet peak의 터널링 시간이 빛의 속도보다 빠를 수 있다는 것이(superluminal) 보여졌다[7]. 그러나, front end의 속도는 빛보다 빠르지 않기 때문에 이 현상이 Einstein의 인과율에는 위배되지 않는다. 또한, Chiao는 위상 시간이 터널링 시간으로 가장 적합한 모델임을 밝혔다. 따라서, 위상 시간에 대해 다시 주목할 필요가 생겼다.

현재의 터널링 소자에서의 동작 속도는 터널링 시간이 아니라 RC 시정수에 의해 제한받는다. 그러나, 동작 속도의 물리적인 기본 한계로서 터널링 시간에 대해 연구할 필요가 있다. 전자(electron)의 터널링은 광자의 터널링과 맞가지 점에서 다르다. 대표적인 점이 전자의 wave packet은 터널링 후 평균 속도가 빨라진다는 것이다. 이는 일찌기 Hartman에 의해 지적된 바 있으나[8], 최근에는 그리 주목받지 못하고 있는 것으로 보인다.

본 논문에서는 하나의 에너지 장벽에 대하여 이러한 점을 고찰할 것이며, 계산된 전자(electron)의 위상 시간과 소프트웨어

InterQuanta[9]로 시뮬레이션 한 터널링 시간의 결과를 비교하고자 한다.

II. 위상시간

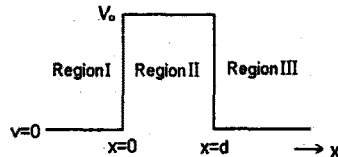
[그림 1]과 같이 장벽 V_0 , 두께 d 인 에너지 장벽에 왼쪽으로부터 평면파가 입사할 때 시간에 무관한 Schrödinger 방정식은 다음과 같다.

$$\psi(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx), & \text{for } x < 0 \\ C\exp(-\gamma x) + D\exp(\gamma x), & \text{for } 0 < x < d \\ F\exp(ikx), & \text{for } x > d \end{cases} \quad (1)$$

여기에서 $A\exp(ikx)$ 는 운동에너지 $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < V_0$ 로 입사하는 평면파를 나타내며,

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0 - k^2} \quad (2)$$

이다.



[그림 1] 단일 전위장벽 (포텐셜 높이 V_0 , 장벽 두께 d)

식(1)로 주어지는 파동함수에 경계조건을 사용하면 $t(k) = B/A$ 를 구할 수 있다.

이제, 다음과 같이 표현되는 wave packet이 입사한다고 하자.

$$\psi_{inc}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k-k') \exp[i k'(x+x_0) - \frac{E(k')t}{\hbar}] dk' \quad (3)$$

여기에서 $-x_0$ 는 시간 $t=0$ 에서의 wave packet의 위치를 나타내며 k' 은 k 를 중심으로 $g(k-k')$ 의 분포함수를 갖는다. 투과된 파동함수는 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_{trans}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k') g(k-k') \exp[i k'(x+x_0) - \frac{E(k')t}{\hbar}] dk' \quad (4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k') g(k-k') \\ &\quad \times \exp[i k'(x+x_0) + \varphi(k') - \frac{E(k')t}{\hbar}] dk' \end{aligned}$$

위상시간[1]은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial k} [k(x+x_0) + \varphi(k) - \frac{E(k)t}{\hbar}] = 0 \quad (5)$$

윗 식으로부터

$$t = \frac{m}{\hbar k} \left[\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k} + x + x_0 \right] \quad (6)$$

을 얻으며, 터널링 시간 δt 는 다음과 같이 계산된다.

$$\delta t = \frac{m}{\hbar k} \left[\frac{\partial \varphi(k)}{\partial k} + d \right] \quad (7)$$

III. 시뮬레이션 및 토론

식(7)이 위상시간으로 잘 알려진 식이다. 그러나, 여기에서 식(7)에서의 k 을 어떤 값으로 하는가 또는 $\varphi(k)$ 의 k 에 대한 미분값을 취할 때의 k 값을 어떤 값으로 하는가 하는 점에 유의하여야 한다. 그 값은 투과된 wave packet의 k 공간에서의 분포함수에서 그 분포함수 값을 최대로 하는 k 으로 취하는 것이 타당하다. [그림2]는 여러가지 편차를 갖는 Gaussian wave packet들에 대해 포텐셜 장벽을 투과하고 난 후의 wave packet의 momentum 공간에서의 spectrum을 보여준다. 그림에서 보듯이, 투과하고 난 후의 최대 spectrum에 해당하는 값을 입사하기 전의 경우에 비해 증가하고, 또 dispersion이 클수록 더욱 증가함을 알 수 있다. 이는 k (또는, 운동량)값이 클수록 투과율이 증가하기 때문이다. 이것이 물리적으로 의미하는 것은 입사되는 wave packet에 대한 전자의 평균에너지에 대해 투과한 후의 전자의 평균에너지는 증가한다는 것이다. 그러나, 이는 에너지보존 법칙에 위배되지 않는다. 반사되는 전자들의 평균에너지는 감소하기 때문이다. 즉, 각각의 전자는 투과 또는 반사되는데, 투과된 전자들의 운동에너지는 평균적으로 증가하고 반사된 전자들의 운동에너지는 평균적으로 감소한다. 이는 각각의 전자의 에너지에 변화가 생기는 것이 아니라, 확률적으로 큰 에너지를 갖는 전자가 투과가 더 잘되고 낮은 에너지를 갖는 전자가 반사가 더 잘되기 때문이다. 따라서, 식(7)로 표현된 위상시간은 입사되는 전자에 대하여는 그 평균속도가 아니라 투과된 후 peak spectrum에 해당하는 속도를 갖고 전자가 입사한다고 보고 계산한 위상시간이다. Wave packet이 시간 $t=0$ 에서 $x=-x_0$ 에서 출발하여 시간 t 에 $x=d+x_1$ 의 위치까지 진행하였다고 할 때, 포텐셜 장벽의 왼편과 오른편에서 전자의 peak spectrum에 해당하는 이동속도(또는 대략적으로 평균이동속도)를 각각 v_1, v_2 라고 한다면, 식(7)에서 구한 위상시간은

$$\delta t = t - \frac{x_0 + x_1}{v_2} \quad (8)$$

이다. 한편으로는 다음 식과 같이 정의되는 시간 Δt 도 의미있는 양일 것일 것이다.

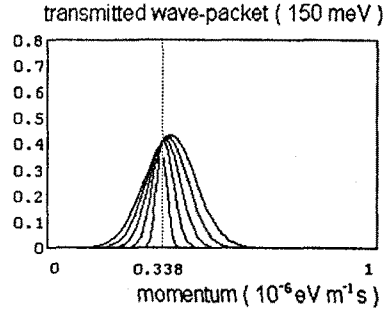
$$\Delta t \equiv t - \frac{x_0}{v_1} - \frac{x_1}{v_2} \quad (9)$$

식(9)는 식(8)을 이용하면

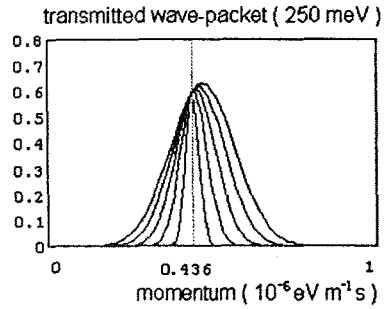
$$\Delta t = \delta t - x_0 \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \quad (10)$$

로 표시된다. Δt 는 wave packet의 초기위치 $-x_0$ 에 의존하는 값이 된다. 이는 시간 $t=0$ 에서 wave packet의 형태를 정해줄 때 x_0 값에 따라 각각의 운동량 성분이 포텐셜 장벽에 도달하는 시간들의 차이가 달라지기 때문이다. 따라서, Δt 는 그 값이 음수일 경우도 있다. 즉, 입사 wave packet의 peak가 도달하기 전에 투과 wave packet의 peak가 생성되어 진행될 수 있다. 이는 해당되는 k 값의 입사와 성분이 충분히 빨리 도착할 때 나타난다.

[그림3]은 소프트웨어 InterQuantal[9]를 써서 터널링 현상을 시뮬레이션한 예를 보여준다. [그림4]는 이와 같이 시뮬레이션을 통해 얻은 데이터와 이론적 위상 시간을 비교한 그래프이다. 그리고, [그림5]는 wave packet의 spreading에 따른 터널링 시간의 변화를 보여준다.



(a)

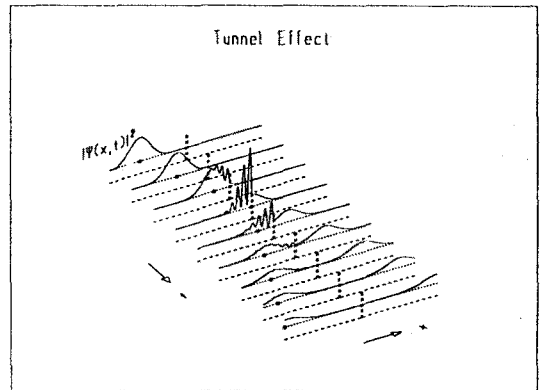


(b)

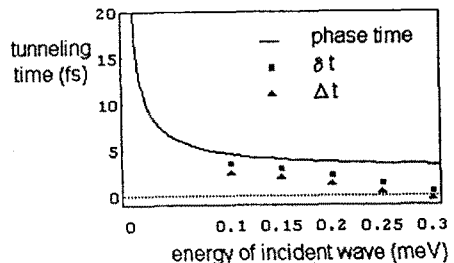
[그림 2] 하나의 전위장벽(3nm)을 투과한 후의 wave-packet (위에서부터 각각 편차가 5%, 10%, 15%, 20%, 25%에 해당한다.)

(a) 입사에너지가 150meV일 때

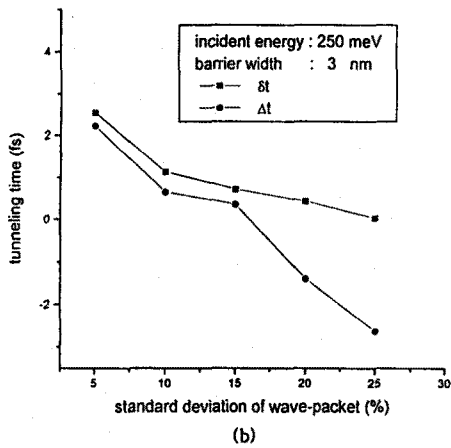
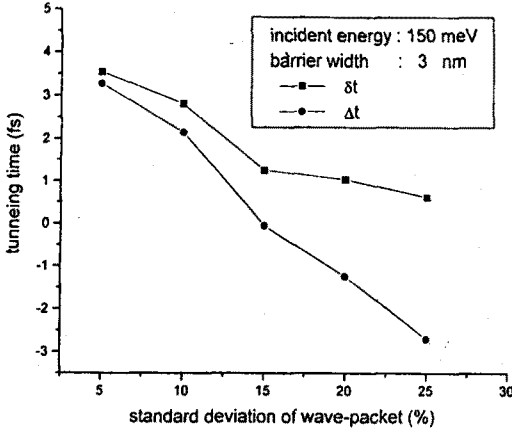
(b) 입사에너지가 250meV일 때



[그림 3] 전자가 하나의 전위장벽을 통과하는 시뮬레이션



[그림 4] 전위장벽이 3nm일 때 시뮬레이션한 터널링 시간과 이론적 위상시간



[그림 5] wave packet의 편차에 따른 터널링 시간의 영향
 (a) 입사에너지가 150meV일 때
 (b) 입사에너지가 250meV일 때

IV. 결론

본 논문에서는 전자가 사각형 포텐셜 장벽을 투과할 때의 위상시간을 InterQuanta를 이용한 시뮬레이션 결과와 비교하였다. 또한, 본 논문에서는 Gaussian wave packet을 갖는 전자의 peak spectrum을 갖는 속도가 터널링 후에 증가함에 주목하여 물리적 의미를 갖는 또하나의 터널링 시간을 제시하였으며 이는 물리적 모순없이 음의 값도 가질 수 있음을 지적하였다.

Reference

- [1] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, New York, U.S.A., 257 (1951).
- [2] E. P. Wigner, *Physical Review*, 98, 145 (1955).
- [3] F. T. Smith, *Physical Review B*, 118, 349 (1960).
- [4] M. Büttiker, and R. Landauer, *Physical Review Letters*, 49, 1739 (1982).
- [5] M. Büttiker, *Physical Review B*, 27, 6178 (1983).
- [6] P. Thanikasalam, R. Venkatasubramanian, and M. Cahay, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 29, 2451 (1993).
- [7] R. Chiao, *Physical Review A*, 48, R34 (1993).
- [8] A. F. M. Anwar, A. N. Khondker, and M. R. Khan, *Journal of Applied Physics*, 65, 2761 (1989).
- [9] S. Brandt, and H. D. Dahm, *Quantum Mechanics on the Macintosh*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1994