

境界固定座標系를 이용한 非線形 規則波의 數值研究 A Numerical Study of Nonlinear Regular Wave by Using Boundary-Fixed Coordinate System

李 正 烈*

1. 緒論

Betts and Assaat (1982)는 유한 요소법을 이용하여 비선형 규칙파를 해석하였는데 편리상 수두높이와 유량 그리고 파장이 주어진 상태에서 흐름함수를 계산하였다. 그러나 보통 유체 파랑문제는 파주기와 수심이 그리고 파고가 주어진 상태에서 결정되므로 본연구에서는 경계좌표계에서 유한차분법으로 파주기와 수심 그리고 파고가 주어진 상태에서 해석한다. Newton-Raphson의 반복법으로 자유수면 위치와 파장을 수렴시킨다. 흐름함수파이론과 마찬가지로 파꼭 (wave crest)과 함께 이동하는 좌표계에서 파의 운동이 정상 상태의 흐름으로 변환될 수 있다고 가정한다.

2. 기본방정식

유체가 비압축성이고 흐름이 비점성, 비회전성이라고 가정하여 다음과 같이 Laplace 식이 흐름함수로 표현된다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

파꼭과 함께 이동하는 좌표계에서 파의 유속성분 (u, v)은 흐름함수 $\psi(x, y)$ 에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + C, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

여기서 C 는 파속으로 q/d 이고 q 는 單位 폭당 유량을 의미하며 d 는 평균수면이다. Fig.1에서와 같이 흐름函數에 대한 境界條件은 자유수면을 따라 $\psi=q$ 이고 바닥면을 따라 $\psi=0$ 이며 양쪽의 수직 경계면인 파꼭과 파저에서는 흐름함수의 수평적 변위가 없다는 Neumann의 경계조건 $\partial \psi / \partial x = 0$ 이 적용된다.

수치해석상 자유수면은 주어진 에너지 수두하에서 베르누이 식에 의하여 적절한 초기치로부터 반복계산에 의하여 수렴된다. 그 베르누이식은 자유 수면에서 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{2g} [(u-C)^2 + v^2] + \eta = B \quad (3)$$

* 韓國海洋研究所 海洋工學研究部(Ocean Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

여기서 η 는 자유수면이고 B 는 에너지 수두이다. 수면위 공기의 관성 효과와 capillarity는 물론 무시되었다.

3. 수치계산

3.1 경계고정좌표계 (Boundary-Fitted Coordinate System)

경계고정좌표계를 사용할 때 수치격자점은 일정 격자간격을 갖고 있지 않고 격자점의 위치가 고정된 경계를 바탕으로 결정된다. 이 방법은 최근 유한차분법으로 유체 흐름의 수치해를 얻는 데 상당히 유용한 방법으로 알려졌으며 자유수면을 경계로 유한차분법을 실행하는 경우에는 더할나위 없이 필연적인 방법으로 Thompson (1982)과 Thompson 등(1985)에 의하여 제안 발전되었다.

3.2 자유수면 수렴법

자유수면의 흐름은 비선형 경계문제로서 그 해를 구하기가 여간 어려운 것이 아니다. 보통 반복법이 불가피하여 처음에 초기치를 가정한 후 비선형 경계조건이 만족되도록 연속적으로 수렴시켜 그 해를 구한다. 여기서는 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 다음과 같다.

$$h_i^{\eta+1} = h_i^\eta - \gamma \frac{H - H_i}{(q/h_i)^2 / gh_i - 1} \quad (4)$$

여기서 γ 는 안정계수로서 1보다 적은 값을 사용한다. 비선형 자유수면 문제의 수치해석은 그 해석방법에 상관없이 수치 불안정을 일으키기 쉬우므로 여과법 (filtering technique)을 이용하여 그 불안정을 해소한다.

3.3 파장의 수렴법

파속은 q/d 로 산정되며 주기가 주어졌으므로 파장 L 은 $q \times T/d$ 가 된다. 따라서 파장의 결정은 유량 q 가 결정되면 된다. 적절한 유량의 결정은 파고와 밀접한 관계가 있어 다음과 같은 반복법으로 유량을 계산한다.

$$(q)^{\eta+1} = (q)^\eta + \gamma \text{sign}[H - (\eta_1 - \eta_N)] \sqrt{2g|H - (\eta_1 - \eta_N)|} \times d \quad (5)$$

4. 계산 결과

수치계산은 Fig. 2에서와 같이 19×21 의 격자망에서 수행되었다. 초기 자유수면과 초기 유량은 선형파 이론을 근거로 다음과 같이 주어진다.

$$\eta_o^i = -\frac{H}{2} \cos kx_i, \quad q_o = C \times d$$

Dean (1974)이 제시한 흐름함수와 이론 (SFWT)의 4-D경우 ($H=0.02426\text{m}$, $d=0.0312$, $T=1 \text{ sec}$)와 경계고정좌표계에서 유한차분법 (BFCS-FDM)으로 얻어진 수면변위가 Fig. 3에서 비교되었다. 4-D 경우와 실험자료와의 비교를 위한 $H=0.99\text{m}$, $d=1.80\text{m}$, $T=3.58 \text{ sec}$ 인 두 경우의 수평 입자 속도가 Fig. 4에서 흐름함수와 이론의 결과와 비교되었다. SFWT와 BFCS-FDM의 두 방법은 파고가 증가할수록 그 차이가 두드러짐을 알 수 있다. Figure 5는 4-D경우에 대해 BFCS-FDM에 의해 얻어진 파유속의 벡터를 보여준다. 수평 유속비

u_{crest}/C 는 0.856이고 Dean의 SFWT는 0.700을 제시하고 있다. Cokelet(1977)의 정밀해와 비교하여 BFCS-FDM이 SFWT보다 정확한 값을 낳고 있다. BFCS-FDM에 의한 비선형 규칙파 수치모델은 흐름함수와 이론등과는 달리 모든 영역의 비선형 파를 재현시킬 수 있는 것으로 보여진다.

Cokelet(1977)의 가장 큰 업적중의 하나는 파속, 운동량 및 에너지의 최대값이 최대파보다 작은 파에서 얻어진다는 것이다. 하지만 BFCS-FDM에 의한 결과는 이를 제시하지 못하고 있으며 Cokelet(1977)과 Thomas(1975)결과의 중간 정도를 제시하고 있다. Cokelet이 제시한 결과중에서 $e^{-d}=0.4$ 의 경우를 임의로 선택하여 전파속도에 대하여 BFCS-FDM의 결과와 비교하면 다음과 같다.

ε^2	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
Cokelet's	0.9367	0.9421	0.9460	0.9479	0.9471
this study	0.9516	0.9583	0.9657	0.9722	0.9771

여기서 $\varepsilon^2 = 1 - (u_{crest}^2 u_{trough}^2 / C^4)$.

5. 結論

波速度와 함께 移動하는 座標上에서 일정 水深위로 전파하는 非線形 規則波를 境界固定 座標를 이용하여 數值解析하였다. 이 方法은 非線形性이 강한 波의 波形를 再現하는 데 어려움이 없으며 Dean (1974)에 의해서 提示된 흐름함수파이론 (stream function wave theory)과 比較하여 그 結果를 檢討하였다. 이 수치 파랑 이론은 적어도 다음 두가지 장점을 갖고 있다. 첫째, 파랑에 영향을 미치는 要素들 이를테면, 점성, 바람 그리고 유속등이 함께 고려될 수 있다. 둘째, 모든 파랑 형태에 대해 수치계산이 가능하다.

參考文獻

- Betts, P.L., and Assaat, M.I., 1982. "Large-amplitude water waves," *Finite Elements in Fluids*, Vol.4, pp.109-127.
- Bontozoglou, V., and Hanratty, T.J., 1988. "Effects of finite depth and current velocity on large amplitude Kelvin-Helmholtz waves," *J. of Fluid Mechanics*, Vol.196, pp.187-204.
- Cokelet E.D., 1977. "Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth," *Philos. Trans. R. Soc. London*, Ser.A286, pp.183-230.
- Dean, R.G., 1974. "Evaluation and development of water wave theories for engineering application," U.S. Army Corps Eng., Coastal Eng. Res. Cent., Spec. Rep. No.1.
- Ghoniem, A.F., and Cagnon, Y., 1987. "Vortex simulation of laminar recirculating flow," *J. Comput. Phys.*, Vol.68, pp.346-377.
- Holyer, J.Y., 1979. "Large amplitude progressive interfacial waves," *J. of Fluid Mechanics*, Vol.93, p.433.

- Saffman, P.G., and Yuen, H.C., 1982. "Finite-amplitude interfacial waves in the presence of a current," *J. of Fluid Mechanics*, Vol.123, pp.459-476.
- Thomas, J.W., 1975. "A numerical study of the relationship between the dimensionless parameters in the problem of periodic waves of permanent type in a liquid of finite depth," *Q. Appl. Math.*, Vol.32, pp.403-410.
- Thomson J.F., 1982. *Numerical Grid Generation*, Elsevier Science Publishing Company Inc.

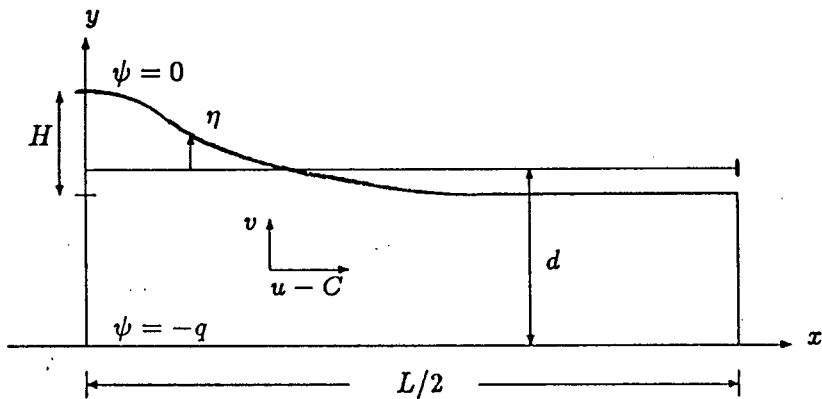


Fig.1 Definition Sketch for Progressive Wave System

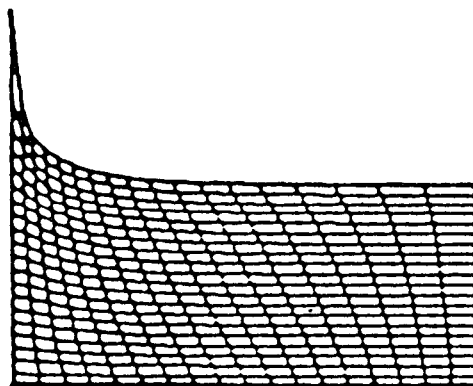


Fig.2 Grid Mesh Types used.

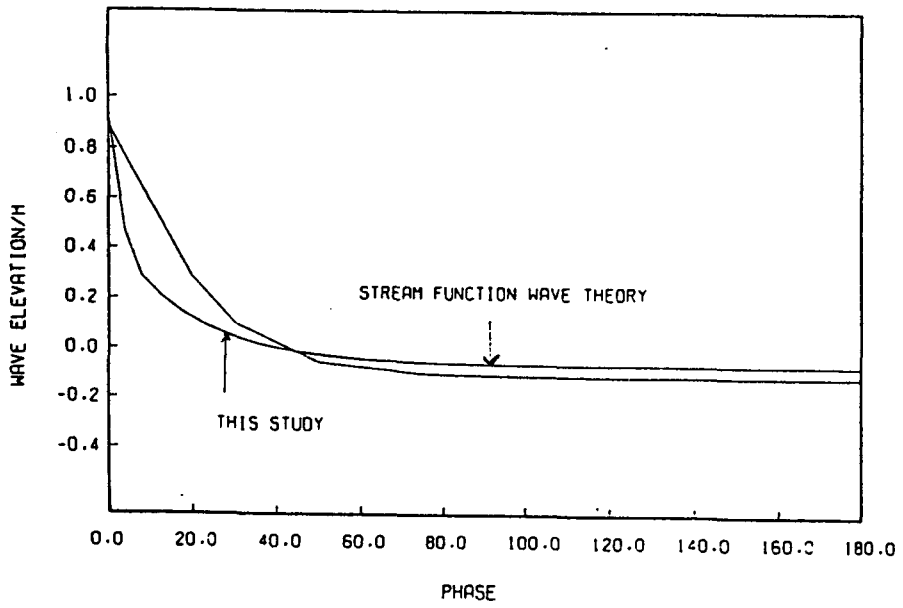


Fig.3 Free Surface Elevations.

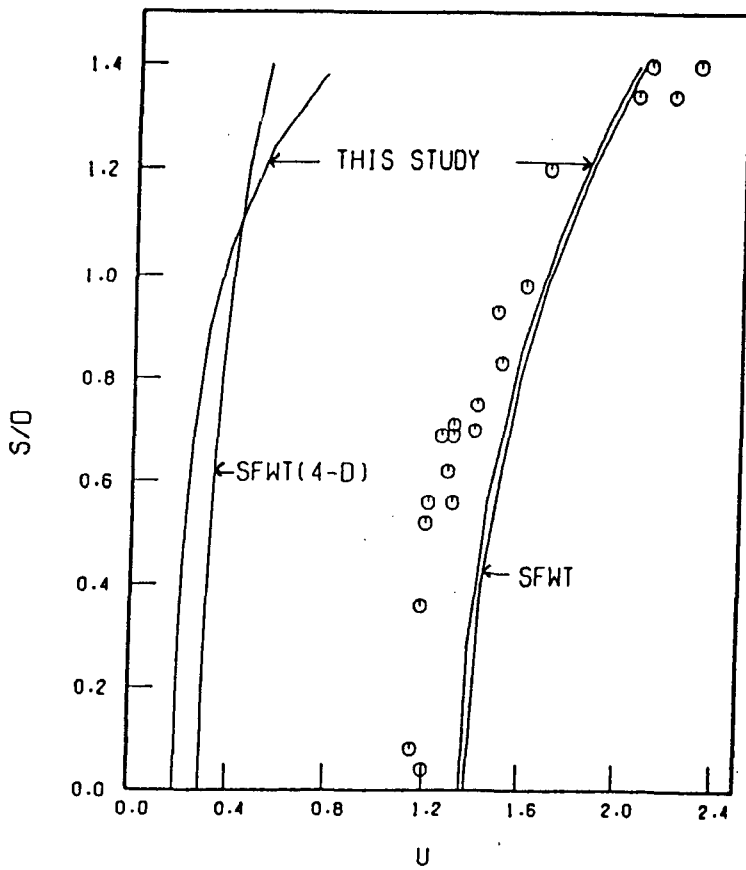


Fig.4 Horizontal Water Particle Velocities.

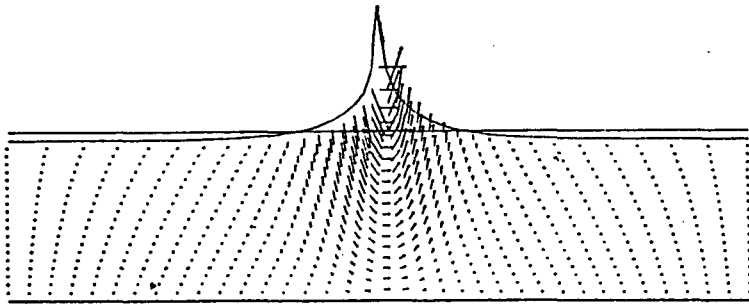


Fig.5 Velocity Vectors (Case 4-D).