

프로니 해석시 나타나는 고차 특성 방정식 해법에 대하여

홍준희^o 조경래 정병태 손광명 박종근

서울대학교 전기공학과

About The Root Finder of The High Order Characteristic Equation In Prony Analysis

Jun-Hee Hong Kyung-Rae Cho Byung-Tae Jeong Kwang-Myoung Son Jong-Keun Park

Dept. of Elec. Eng. Seoul Nat'l Univ.

Abstracts: Conventional methods for root finding of the algebraic equations are intrinsically synthetic division methods, i.e., which are the factorization in forms of $f(x) = (x - x_i)Q(x)$. So existing methods have some demerits such as deflation and root-polishing procedures. To overcome these defects a new powerful algorithm, namely circular arithmetic algorithm(CSM), was introduced and has been investigated about its fascinating properties. In this paper, we will propose a simple and effective method of getting the initial guesses for the roots of the equation. With this method the CSM can find all the root of equation with great efficiency.

1. 서론

프로니 해석법은 원래의 비선형 최적화 문제를 선형 예측 모델을 이용하는 모델 기준형 신호추정 문제로 바꾸어 푼다.[1-3] 그리고 원래 문제가 가진 비선형성은 프로니 해석 2단계의 특성 다항 방정식에 집약되어 나타난다. 이 다항 방정식이 비록 비선형성을 가지기는 하지만 모든 근을 항상 다 구할 수 있으므로,[4] 이를 위한 효율적인 해법들이 있을 때 프로니 해석법의 장점이 더욱 돋보이는 것이다. 그러나 몇 가지 약점이 있다. 파라미터의 민감도를 작게 하려면 고차의 특성 방정식을 사용해야 한다는 것이다. 더우기 대상 시스템의 차수를 모르는 경우, 매우 큰 차수를 가정해야 한다. 이에 따라 아주 고차의 방정식 풀이가 필요하게 되고, 이것이 계산부담이 되기도 한다. 프로니 해석법을 이용해 전력계통의 고유치 해석을 시도한 전례에서 특성 방정식 풀이를 위해 특별히 큰 능력의 계산기를 사용하였음과 소나, 레이더 등의 응용과 같이 실시간 개념을 요구하는 경우가 있을 수 있음을 고려하여 본 논문에서는 기존의 널리 사용되는 방정식 해법이 아닌 보다 효율적인 방정식 해법에 대하여 소개한다. 소개하는 방법은 병렬 연산이 가능한 구조라는 점과 3차의 수렴 특성을 가진다는 점 때문에 70년대 초 I. Gargantini등에 의해 처음 제안된 이래로 많은 관심이 주어졌던 방법이다.[5-7] 다만, 적절한 초기값 선정 방식이 알려져 있지 않고 아직 그 특성이 널리 알려지지 않았다는 점이 이 알고리즘이 널리 사용되지 않는 이유이다.

본 논문에서는 이 알고리즘의 실용화를 위하여 새로운 초기값 결정 방식을 제안하고 그 결과 몇가지 알려진 다른 해법보다 효과적으로 특성 방정식을 풀 수 있었다. 또한 본 논문에서는 위의 알고리즘이 가진 성질을 복소 포텐셜 이론에 의한 정전계 모델을 가지고 설명한다. 이 모델을 통하여 직관적인 이해가 가능할 것이다.

2. 프로니 해석법

프로니 해석법은 주어진 신호를 지수적으로 감소하는 정현파 신호로 표현하는 모델 기준형 신호처리 기법으로 주어진 신호에 포함된 감쇠정수, 주파수, 초기진폭, 위상 등을 해석한다. 이는 푸리에 해석의 복소평면으로의 확장으로 여길 수 있으며 특히 인접한 주파수 신호들을 분별하는 해상도가 이상적으로 뛰어나다. 프로니 해석에 의해 최소자승 오차의 관점에서 주어진 신호 $y(t)$ 에 대한 다음의 표현을 얻는다.[1-3]

$$y(t) = \sum_{i=1}^N B_i \exp(\lambda_i t) \tag{1}$$

이때 신호 $y(t)$ 는 등간격 측정된 기록 $y(k\Delta t)$, $k=1, 2, \dots, N$ 으로 주어지며 이를 이용해 다음의 3단계로 구성되는 프로니 해석법의 해식 (1)의 고유값 λ 와 신호 유수 B 를 구한다.

제 1단계. 선형 예측 모델 구성

신호 $y(k)$ 가 다음의 선형 점화식으로 표현될 수 있다고 가정한다.

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) \tag{2}$$

이를 이용하면

$$\begin{bmatrix} y(n) & y(n-1) & \dots & y(1) \\ y(n+1) & y(n) & \dots & y(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & y(N-2) & \dots & y(N-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

또는 $X\hat{\theta} = Z$

와 같은 선형 관계식을 얻을 수 있고, 이로부터 선형 예측식의 계수 벡터에 대한 최소자승 추정 $\hat{\theta}$ 를 얻을 수 있다.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} Z \tag{3}$$

$(X)^{\#}$: Moore-Penrose pseudo-inverse of matrix X

제 2단계. 특성 방정식 풀이

제 1단계의 결과로 얻어진 선형 예측식에 대한 특성 다항식

$$z^n - (a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n) = 0 \tag{4}$$

을 풀어 근을 구하면 식 (1)의 모드 복소 주파수 λ_i 를 얻는다.

제 3단계. 신호 유수(Signal Residue)의 추정

제 2단계에서 복소 주파수를 구하면 식 (1)의 각 모드에 대한 신호 유수 B_j 는 다음의 선형식으로 기술되고

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^1 & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix} \text{ or } AB = Y \tag{5}$$

이에 대한 최소자승해를 구하여 신호유수벡터의 추정 \hat{B} 를 얻는다.

$$\hat{B} = (A^T A)^{-1} A^T Y \tag{6}$$

위와 같은 3단계의 프로니 해석법의 결과로 축약대상 계통의 여기 응답 신호에 대한 모드분해 표현을 얻을 수 있다.

3. 개선된 뉴턴법(improved Newton process)

위와 같은 프로니 해석법은 원래의 비선형 최적화 문제를 선형 신호추정 문제로 바꾸어 푼다. 이때 원래 문제가 가진 비선형성은 프로니 해석 2단계의 특성 다항 방정식에 집약되어 나타난다. 따라서 효율적인 다항 방정식 해법이 있을 때 프로니 해석법의 장점이 더욱 돋보일 것이다.

다음과 같은 구조의 반복해법에 의하여 종래의 다항 방정식 해법들에서 사용하던 차수감법(deflation method)을 피할 수 있다.[5-7]

$$\Lambda^{k+1} = \Phi(\Lambda^k) \quad (7)$$

$$\Lambda^k = [z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k]^T$$

여기서 Λ 는 방정식의 근을 요소로 가지는 $(n \times 1)$ 벡터이고, Φ 는 반복해법을 구성하는 알고리즘이다. 해법을 구성하는 알고리즘이 위와 같은 구조를 가진다는 것은 방정식이 가진 n 개의 모든 근을 동시에(simultaneously) 반복 개선시킴을 의미한다. 이를 위해

$$f(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n) \quad (8)$$

$$A(z) = \frac{d}{dz} \ln|f(z)| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \lambda_i} = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (9)$$

$$D(z_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{z_i - z_j} \quad (10)$$

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{A(z^k) - D(z^k)} \quad (11)$$

$$A(z^k) = \begin{bmatrix} A(z_1^k) \\ A(z_2^k) \\ \vdots \\ A(z_n^k) \end{bmatrix} \quad D(z^k) = \begin{bmatrix} D(z_1^k) \\ D(z_2^k) \\ \vdots \\ D(z_n^k) \end{bmatrix}$$

에 의하여, 혹은 등가적으로

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \frac{1}{A(z_i^k) - D(z_i^k)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

에 의하여 식(7)에 주어진 대수 방정식의 모든 근을 구할 수 있다. 이것이 Circular Arithmetic Algorithm 또는 개선된 뉴턴법(improved Newton process)으로 알려진 방법인데 병렬 연산이 가능한 구조라는 점과 3차의 수렴 특성을 가진다는 점 때문에 70년대 초 I. Gargantini 등에 의해 처음 제안된 이래로 많은 관심이 주어졌던 방법이다. 한편 이 알고리즘을 실제 문제에 적용하는 것은 아직 활발하지 못하는데 이는 다음과 같은 이유 때문인 듯 하다. [7]

- 아직 이 알고리즘이 가진 특성에 대한 이해의 과정에 있다.
- 적절한 초기값을 구하는 방법이 확립되어 있지 않다.

4. 복소 포텐셜 모델에 의한 설명

전하를 가진 물체간의 힘은 Coulomb의 법칙을 따른다. 이 힘은 정전기 전위(electrostatic potential)의 gradient로 주어지고 또 이 힘에 의해 전하가 공간 내부를 움직인다. 이제 그림 1과 같은 3차원 공간에서 복소평면 상의 점 $\lambda_i = (\sigma_i, \omega_i)$ 를 통과하고 복소평면에 수직인, n 개의 직선 상에 전하가 균일하게 분포하는 경우를 생각해 보자. 그림 1에서 임의의 한 점 z 에서 복소전위를 $\Psi(z)$ 라면

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^n \ln(z - \lambda_i) = \ln \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) = \ln(f(z)) \quad (13)$$

로 주어지고, 이 점에 반대 부호의 선전하가 위치할 때 받게되는 상호간의 인력(attraction force)은

$$A(z) = \frac{d}{dz} \Psi(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \lambda_i} = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (14)$$

가 된다. 위 식에서 주목할 점은 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 들에 의한 인력이 각각의 λ_i 를 모르더라도 이들을 근으로 가지는 함수식 $f(z)$ 만 알면 구할 수 있다는 점이다. 또

$$\frac{1}{z - \lambda_i} = \frac{(z - \lambda_i)^*}{|z - \lambda_i|^2} = \frac{1}{|z - \lambda_i|} \frac{(z - \lambda_i)^*}{|z - \lambda_i|} = \frac{1}{|z - \lambda_i|} \vec{u}_{z\lambda_i}$$

이므로 두 전하 사이의 힘은 거리에 반비례한다. 위 식에서 $\vec{u}_{z\lambda_i}$ 는 z 에서 λ_i 로 향하는 단위벡터이다. 또 그림 2와 같이 복소평면 상의 점 z_1, z_2, \dots, z_n 를 통과하는, 복소평면에 수직인 n 개의 직선 상에 전하가 균일하게 분포한다고 할 때 이들 중 한 점 z_i 를 지나는 선

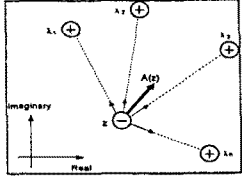


그림 1. 참 근의 선전하 모델

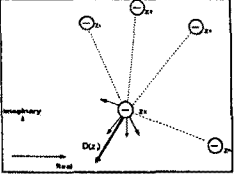


그림 2. 추정된 근의 선전하 모델

전하에서 다른 선전하로 인해 느끼게되는 척력(detraction force)은

$$D(z_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{z_i - z_j} \quad (16)$$

가 된다. 따라서 그림 3과 같이 방정식이 가진 실제 근들을 양의 선전하 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 으로 모의하고, 이에대한 k 번째 반복과정에서의 추정음 음의 선전하 $z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k$ 으로 모의하면 z_i^k 가 받게되는 정전기적 힘은

$$\vec{F}(z_i^k) = A(z_i^k) - D(z_i^k) \quad (17)$$

$$\frac{1}{z_i^k - \lambda_{eq}} = \vec{F}(z_i^k) \quad (18)$$

를 만족하는 위치 λ_{eq} 에서 z_i^k 에 미치는 정전기적 힘이라 여길 수 있다. 따라서 z_i^k 는 λ_{eq} 방향으로 거리에 반비례하는 양만큼 움직일 것이고 다음 관계식과 같이 이를 근 z_i^k 에 대한 새로운 추정 z_i^{k+1} 으로 여길 수 있다.

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \frac{1}{A(z_i^k) - D(z_i^k)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

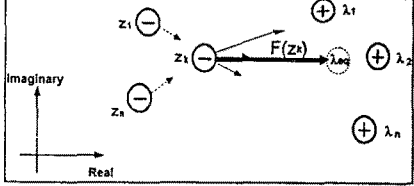


그림 3. 개선된 뉴턴법의 반복 개선과정에 대한 선전하 모델

이와 같은 과정을 반복하면 최종적으로 음전하의 $z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k$ 들은 양전하를 가진 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 들의 위치로 이동할 것이고 이로써 주어진 방정식의 모든 근들을 구할 수 있음을 알 수 있다. 그림 4는 실제 방정식을 위의 방법에 따라 풀때 각 반복계산 단계에서 근의 추정값들을 복소평면 위에 나타낸 것이다. 복소 포텐셜 이론에 의한 전자기적 힘을 받아 움직이는 근의 모습 이 잘 나타나고 있다.

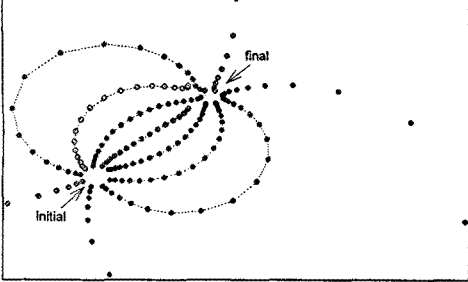


그림 5. 4. 복소평면에서 본 수렴과정

5. 초기값의 추정

식 (12)의 개선된 Newton법에 의해 모든 방정식의 근을 한꺼번에 혹은 병렬연산에 의해 구하기 위해서는 Λ 에 대한 최초의 추정값 Λ^0 가 주어져야 한다. 본 논문에서는 초기값을 구하는 아주 간단한 방법을 제안한다.

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n) \quad (20)$$

이 다음과 같은 성질을 가짐은 잘 알려져 있다.

- 1) $f(z)$ 가 실계수 다항식일 때 λ_i 가 복소수이면 그의 쉐레 복소수 λ_i^* 도 근이다. 이는 각각의 λ_i 들이 복소평면 상에서 실수축 대칭 형상으로 배열됨을 의미한다.
- 2) 근과 계수와의 관계에서

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{a_1}{a_n} \quad (21)$$

이므로 다항식 $f(z)$ 의 $(n-1)$ 차 항의 계수 a_1 으로부터 각 λ_i 들의 위치에 대한 산술평균 또는 무게중심점을 구할 수 있다.

3) 또한

$$\prod_{i=1}^n (-\lambda_i) = a_n \quad (22)$$

또는

$$\left| \prod_{i=1}^n (-\lambda_i) \right|^{1/n} = |a_n|^{1/n} \quad (23)$$

가 성립하므로 다항식 $f(z)$ 의 상수항으로부터 각 λ_i 와 원점과의 거리의 기하평균 값을 알 수 있다. 이는 주어진 방정식의 근들이 복소평면 상의 원점 $(0,0)$ 으로부터 평균적으로 $|a_n|^{1/n}$ 만큼 떨어져 위치함을 뜻한다.

위의 성질들로부터 $a_1 = 0$ 인 경우는 무게중심이 원점과 일치하므로 주어진 방정식의 근들이 복소평면 상의 중심이 원점, 반경이 $|a_n|^{1/n}$ 인 원주상에 실수축 대칭꼴로 분포함을 안다. 그러나 $a_1 \neq 0$ 인 경우는 무게중심과 원점이 서로 다르게되지만

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad (24)$$

$$= \prod_{i=1}^n (z + \frac{a_1}{n} - \frac{a_1}{n} - \lambda_i)$$

이므로

$$t = z + \frac{a_1}{n} \quad (25)$$

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \frac{a_1}{n} \quad (26)$$

과 같이 치환하여 얻은 새로운 방정식

$$g(t) = \prod_{i=1}^n (t - \hat{\lambda}_i) \quad (27)$$

$$= t^n - (\sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i) t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n (-\hat{\lambda}_i)$$

이 무게중심과 원점이 서로 일치함을 알 수 있다. 이는 식(21)과 식(26)에서

$$\sum_{i=1}^n (\hat{\lambda}_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \frac{a_1}{n}) = 0 \quad (28)$$

이므로 t 에 대한 방정식 (27)은 $(n-1)$ 차항의 계수가 0인 방정식의 꼴로 변형된 것이며 근들의 무게중심과 원점이 일치한다. 그리고

$$\prod_{i=1}^n (-\hat{\lambda}_i) = g(t)|_{t=0} = f(z)|_{z=\frac{-a_1}{n}} \quad (29)$$

가 $g(t)$ 의 상수항이므로 원래 방정식의 경우, n 개의 복소근 λ_i 들이 복소평면 상의 점 $(-\frac{a_1}{n}, 0)$ 을 중심으로 가지는 반경 $|f(-\frac{a_1}{n})|^{1/n}$ 인 원주상에 실수축 대칭꼴로 분포함을 안다. 그러므로 주어진 방정식 (5-30)에 대한 초기값 λ^0 은 복소평면 상의 점 $(-\frac{a_1}{n}, 0)$ 을 중

심으로 가지는 반경 $|f(-\frac{a_1}{n})|^{1/n}$ 인 원주상에 실수축 대칭꼴로 분포한 n 개의 점을 선정하여 구하는 것이 효과적일 수 있다. 이때 방정식의 차수 n 이 홀수인 경우는 반드시 실근이 존재하므로 실수축 상에 하나의 초기값을 위치시킨후 나머지를 쥘레복소수로 지정한다.

6. 사례연구

제안된 초기값 선정 방식과 결합된 개선된 뉴턴법의 성능을 알아보기 위하여 두 가지 사례연구를 하였다. 첫번째 사례연구는 특성 방정식의 차수를 변화시켜가며 그에 따른 알고리즘의 효율을 검토하였다. 이때 특성 방정식의 근들은 z 평면 상의 단위원의 내부에 무작위 발생시켰으며 동일한 차수에 대하여 50회의 시행을 하였다. 표 1과 그림 5가 특성 방정식의 차수를 변화 시키며 소요된 반복계산 회수의 평균, 최소값, 최대값 및 표준편차를 정리한 것이다. 이로부터 사용된 알고리즘이 효과적으로 특성 방정식의 근들을 구하는 것을 알 수 있다. 특히 고차 방정식의 경우에 더욱 효과적일 것으로 예상할 수 있는데 이는 차수가 크게 변하더라도 소요되는 반복회수는 거의 변하지 않기 때문이다. 작은 값의 표준편차는 이 알고리즘이 매우 안정하다는 것을 의미한다.

두번째 사례연구는 대표적인 수치해석 프로그램인 MATLAB에 개선된 뉴턴법을 장착하여 MATLAB이 사용하는 companion matrix 법과 실제 소요되는 부동 소수점 연산량(flops)을 비교하였다. 표 2와 그림 6이 그 결과를 정리한 것으로 이 결과도 개선된 뉴턴법이 고차의 특성 방정식에 아주 뛰어난 장점을 가짐을 보여주고 있다.

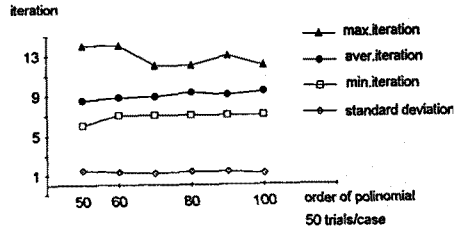


그림 5. 개선된 뉴턴법의 수렴 특성

polynomial order	average iteration	minimum iteration	maximum iteration	standard deviation
50	8.48	6	14	1.47
60	8.80	7	14	1.30
70	8.90	7	12	1.17
80	9.32	7	12	1.33
90	9.08	7	13	1.32
100	9.38	7	12	1.16

표 1. 개선된 뉴턴법의 수렴 특성 (50회 반복/경우)

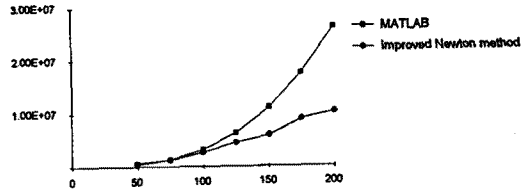


그림 6. MATLAB에 장착한 후의 flops 비교.

표 2. companion matrix법과의 flops 비교.

order	companion matrix	circular
50	3.87E+05	6.35E+05
75	1.34E+06	1.30E+06
100	3.21E+06	2.73E+06
125	6.32E+06	4.54E+06
150	1.10E+07	5.88E+06
175	1.75E+07	8.90E+06
200	2.62E+07	1.02E+07

참고문헌

- 홍준희, 박종근, "과도현상 해석을 위한 시간영역에서의 동가축약법-프로니 해석기법을 이용한 동가 구동점 임피던스 모델의 구성," 대한 전기학회 논문지, 제 43권 4호, 1994, 4.
- 홍준희, 조경래, 박종근, "프로니 해석법을 이용한 전력계통 해석," 제29회 대한 전기학회 전력계통 연구회 학술발표회 논문집, PS-94-15, 1994, 6, pp.193-196.
- 홍준희, 조경래, 박종근, "시스템 식별법을 이용한 계통축약법-수치계산 기법에 대하여," 대한 전기학회 1994년도 하계학술대회 논문집 B, OPS 8, 1994, 7, pp.795-798.
- Ralston, Anthony and Rabinowitz, Philip. 1978, A First Course in Numerical Analysis, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill)
- Gargantini, I., "Further Applications of Circular Arithmetic: Schroeder-like Algorithms with Error Bounds for Finding Zeros of Polynomials," SIAM J. Numer. Anal., 15, no. 3, 497-510 (1978)
- Gargantini, I., "Parallel square-root iterations for multiple roots," Comput. Math. Appl. 6, no. 3, 279-288 (1980)
- Wang Deren and Zhao Fengguang, "Complexity Analysis of a Process for Simultaneously Obtaining All Zeros of Polynomials," Computing 43, 187-197 (1989)