

# Wavelet 변환을 이용한 최적 영상 데이터 다해상도 표현 및 압축에 관한 연구

강 경 모, 정 기 삼, 이 명 호  
연세대학교 공과대학 전기공학과

## A study on optimal Image Data Multiresolution Representation and Compression Through Wavelet Transform

Gyungmo Kang, Kisam Jeoung and Myoungho Lee.  
Dept. of Electrical Engineering Yonsei University

### Abstract

This paper proposed signal decomposition and multiresolution representation through wavelet transform using wavelet orthonormal basis. And it suggested most appropriate filter for scaling function in multiresolution representation and compared two compression method, arithmetic coding and Huffman coding. Results are as follows

1. Daub18 coefficient is most appropriate in computing time , energy compaction, image quality.
2. In case of image browsing that should be small in size and good for recognition, it is reasonable to decompose to 3 scale using pyramidal algorithm.
3. For the case of progressive transmission where requires most grateful image reconstruction from least number of sampls or reconstruction at any target rate, I embedded the data in order of significance after scaling to 5 step.
4. Medical images such as information loss is fatal have to be compressed by lossless method. As a result from compressing 5 scaled data through arithmetic coding and Huffman coding, I obtained that arithmetic coding is better than huffman coding in processing time and compression ratio. And in case of arithmetic coding I could compress to 38% to original image data.

### 1. 서론

다해상도 표현방법은 이미지 정보를 해석하는데 간단한 조직적인 구조를 제공하며 영상정보를 해석하는데 매우 효과적이다[12]. 세부신호는 일반적으로 서로 다른 해상도에서 서로 다른 물리적 구조를 특징짓는다. 세부 신호는 주어진 해상도의 정보와 보다 낮은 해상도사이의 정보의 차이로 정의된다. 이미지의 세부신호가 모든 해상도에서 동일하게 처리되면 다해상도로 분할한 이미지에 대한 해석이 스케일에 관계없이 일정하게 된다. 세부신호는 세밀한 해상도에서 보다 성긴 해상도에서 더 큰 구조에 대응되기 때문에 먼저 성긴 해상도에서 세부신호를 분석한 후 해상도를 증가시키면서 신호를 처리한다. 다해상도로 표현

하기 위하여 세부신호를 분리키는 방법으로써 Adelson이 시도한 라플라시안 피라미드 알고리즘을 본래의 데이터보다 데이터의 크기가 크다[8].

Wavelet은 Grossman과 Morlet에 의해서 소개되기 시작했다[10]. 그리고 Meyer는 일차원 영역에서 orthonormal basis인 wavelet함수가 스케일링 함수를 확장하고 평행이동시켜서 만들 수 있다는 것을 증명했다. wavelet orthonormal basis는 분석에서 매우 중요한 역할을 담당한다. 이것이 등장함으로써 시간과 주파수 영역에서 동시에 좋은 분리특성을 갖는 간단한 orthonormal basis를 갖게되었다.

본 논문은 스케일링 함수와 wavelet함수로 정의되는 wavelet orthonormal basis를 사용하여 이차원 영상 신호를 보다 낮은 해상도로 분할하고 피라미달 알고리즘을 이용하여 다해상도 분할을 한다. orthonormal basis를 이용하여 실제로 데이터를 분할할 때 사용되는 적절한 필터를 찾고 분할된 데이터를 다해상도로 표현하며 분할된 데이터를 손실없이 압축하고자 한다. 압축할 때 손실을 없애기 위하여 무손실 코딩인 연산코딩과 Huffman 코딩을 채택하였다.

직각 대칭 필터와의 피라미달 컨벌루션 알고리즘으로 wavelet 표현을 위한 계산을 하고 신호를 복원할 때에도 비슷한 피라미달 알고리즘을 적용한다. 이때 사용되는 가장 적절한 필터를 찾고 이러한 표현방법으로 다해상도 분할한 결과를 손실없는 코딩 방법인 Huffman코딩과 연산코딩을 이용하여 5단계 다해상도로 표현한 영상데이터 신호를 압축코딩한다[6]. 그리고 영상데이터를 손실없이 압축할 때 Huffman코딩과 연산코딩을 비교한다.

### 2. 직교 다해상도 표현

$(V_{2^j})_{j \in Z}$ 가  $L^2(R)$ 의 다해상도 근사이고 스케일링 함수  $\phi(x) \in L^2(R)$ 가 존재하며 이 함수가  $\phi_{2^j}(x) = 2^j \phi(2^j x)$ ,  $j \in Z$ 의 특성을 갖을 때

$$(\sqrt{2^j} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n))_{n \in Z} \quad (2.1)$$

는  $V_{2^j}$ 의 orthonormal basis이다. 이 orthonormal basis를 사용하여  $f(x)$ 신호를 분리하여  $V_{2^j}$ 에 대한 직교투영을 구한다.

$$A_{2^j} f(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(u), \phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \quad (2.2)$$

따라서  $f(x)$ 를  $2^j$  해상도로 근사시킨  $A_{2^j}f(x)$ 는 다음과 같이 내적으로 표현된다.

$$A_{2^j}f(x) = \langle f(u), \phi_{2^j}(u-2^j n) \rangle_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.3)$$

여기서  $A_{2^j}f$ 는  $f(x)$ 를  $2^j$  해상도로 이산 근사시킨 것이다. 컴퓨터는 단지 이산 신호만을 처리할 수 있기 때문에 이산 근사로 처리해야 한다. 각각의 내적은  $2^j n$ 에서 계산되는 컨벌루션으로 풀이될 수 있다.

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u-2^j n) \rangle = \sum_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \phi_{2^j}(u-2^j n) = (f * \phi_{2^j})(-u) (2^j n) \quad (2.4)$$

따라서  $A_{2^j}f$ 를 다음과 같이 본래의 함수와 스케일링 함수의 컨벌루션으로 나타낼 수 있다.

$$A_{2^j}f = ((f * \phi_{2^j})(-u)) (2^j n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.5)$$

$\phi(x)$ 가 저역통과 필터이기 때문에 이 이산신호는  $f(x)$ 를 저역통과 필터링하고  $2^j$ 로 일정하게 샘플링한 것으로 볼 수 있다. 신호를 근사할 때  $2^j$  해상도보다 작은  $f(x)$ 의 세부신호 부분을 제거하려면 이 함수의 고주파 부분을 통과시키지 않으면 된다. 스케일링 함수  $\phi(x)$ 는 직교 계열인  $(\sqrt{2^j} \phi_{2^j}(x-2^j n))_{n \in \mathbb{Z}}$ 의 계열이기 때문에 특별한 저역통과 필터링을 행한다.

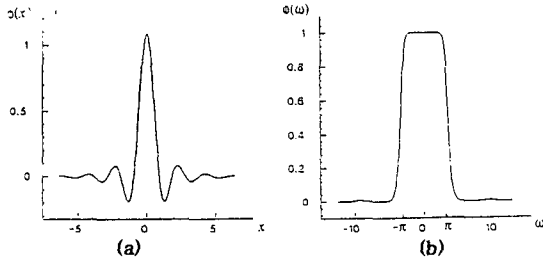


그림 1 (a) 스케일링 함수  $\phi(x)$ , (b) 스케일링 함수의 푸리에 변환.

Fig 1 (a) Scaling function  $\phi(x)$ , (b) Fourier transform of  $\phi(x)$

### 2.1 다해상도 변환 구현

$(\sqrt{2^{j-1}} \phi_{2^{j-1}}(x-2^{j-1}k))_{k \in \mathbb{Z}}$ 는  $V_{2^{j-1}}$ 의 orthonormal basis이다. 모든 정수에 대하여  $\phi_{2^j}(x-2^j n)$  함수는  $V_{2^j}$ 의 일부분인  $V_{2^{j-1}}$ 의 성분이므로 스케일링 함수는  $V_{2^j}$ 의 orthonormal basis를 이용하여 다음과 같이 표시될 수 있다:

$$\phi_{2^j}(x-2^j n) = 2^{-j/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(u-2^j n), \phi_{2^{j-1}}(u-2^{j-1}k) \rangle \phi_{2^{j-1}}(x-2^{j-1}k) \quad (2.6)$$

내적에서 변수를 바꾸면

$$2^{-j/2} \langle \phi_{2^j}(u-2^j n), \phi_{2^{j-1}}(u-2^{j-1}k) \rangle = \langle \phi_{2^{j-1}}(u), \phi(u-(k-2n)) \rangle$$

이 되고 식 (2.6)의 양변을  $f(x)$ 와 내적을 하면

$$\langle f(x), \phi_{2^j}(x-2^j n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^{j-1}}(u), \phi(u-(k-2n)) \rangle \cdot \langle f(u), \phi_{2^{j-1}}(x-2^{j-1}k) \rangle \quad (2.7)$$

이 된다.

다음과 같은 임펄스 응답 특성을 갖는 이산신호 필터  $H$ 가 있다고 할 때

$$\forall n \in \mathbb{Z}, h(n) = \langle \phi_{2^{j-1}}(u), \phi(u-n) \rangle \quad (2.8)$$

$\bar{H}$ 는  $\bar{h}(n) = h(-n)$ 의 임펄스 응답을 갖는 대칭 필터이다. 식 (2.8)을 식 (2.7)에 대입하면

$$\langle f(u), \phi_{2^j}(u-2^j n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{h}(2n-k) \langle f(u), \phi_{2^{j-1}}(u-2^{j-1}k) \rangle \quad (2.9)$$

의 결과가 나온다. 식 (2.9)는 1/2 샘플링을 하면서  $A_{2^j}f$ 와  $\bar{H}$ 를 컨벌루션하여  $A_{2^j}f$ 를 계산해낼 수 있다는 것을 의미한다.  $j < 0$ 에 대하여  $A_{2^j}f$ 에 대한 모든 이산신호 근사는  $A_{2^0}f$ 로부터 이와같은 과정을 반복하여 계산될 수 있다. 이 처리과정을 피라미드 변환이라고 한다.

스케일링 함수  $\phi(x)$ 는 반드시 연속적이고 미분가능하며 무한대에서  $\phi(x)$ 와  $\phi'(x)$ 의 점근적인 감쇄는  $|\phi(x)| = O(x^{-2})$  이고  $|\phi'(x)| = O(x^{-2})$  이어야 한다.

$H$ 를  $h(n) = \langle \phi_{2^{j-1}}(u), \phi(u-n) \rangle$ 의 임펄스 응답을 갖는 이산신호 필터라고 할 때  $H(w)$ 는

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jnw}$$

의 푸리에 시리즈로 정의되며 다음의 두가지 특성을 만족시킨다 :

$$|H(0)| = 1, \quad h(n) = O(n^{-2}) \text{ 무한대에서} \quad (2.10)$$

$$|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 = 1 \quad (2.11)$$

역으로  $H(w)$ 를 식 (2.10)과 식 (2.11)과 다음식을 만족하는 푸리에 시리즈라고 하면

$$|H(w)| \neq 0, \quad w \in [0, \pi/2] \quad (2.12)$$

스케일링 함수의 푸리에 변환이 다음과 같이 정의된다.

$$\phi(w) = \prod_{p=1}^{\infty} H(2^{-p}w) \quad (2.13)$$

식 (2.10) - (2.12)를 만족하는  $H$  결핵 필터로 스케일링 함수의 푸리에 변환을 계산할 수 있다. 주파수 영역과 공간 영역에서 동시에 좋은 분기특성을 갖는 스케일링 함수  $\phi(x)$ 를 얻기 위한  $H(w)$ 를 선택할 수 있다. 그림 2는 그림 1의 스케일링 함수에 대응되는 필터  $H$ 를 나타낸 것이다.

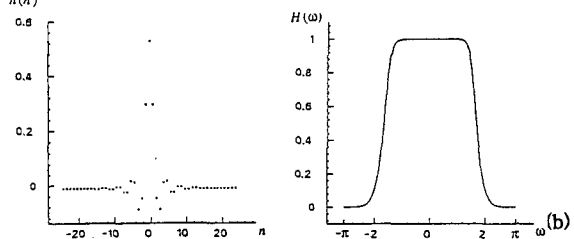


그림 2 (a) 필터  $H$ 의 임펄스 응답, (b) 필터  $H$ 의 전달함수

Fig 2 (a) Impulse response of filter H. (b) Transfer function of filter H.

### 2.2 Wavelet 표현

함수  $f(x)$ 를  $2^j$ 와  $2^{j+1}$  해상도에서 근사했을 때 정보의 차이를 추출하는 방법을 생각해보자. 이 정보의 차이를  $2^j$ 에서의 세부신호라고 한다.  $2^j$ 와  $2^{j+1}$ 의 해상도에서 신호를 근사한 것은 각각  $V_{2^j}$ 와  $V_{2^{j+1}}$ 에 직교 투영을 한 것과 같다. 따라서 투영 원리를 적용하여  $2^j$  해상도에서의 세부신호는 원신호를  $V_{2^j}$ 에서  $V_{2^{j+1}}$

의 직교보상(orthogonal complement)에 투영하여 구한다.  $O_{2^j}$ 를 직교보상이라고 하면

$O_{2^j}$ 는  $V_{2^j}$ 에 orthogonal하다 :  $O_{2^j} \oplus V_{2^j} = V_{2^{j+1}}$

함수  $f(x)$ 를  $O_{2^j}$ 에 직교 투영한 것을 계산하기 위해서  $O_{2^j}$ 의 orthonormal basis가 필요하다.

$(V_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ 는 다해상도 벡터 스페이스이고  $\phi(x)$ 는 스케일링 함수이다. 그리고  $H(w)$ 는 이에 대응되는 절레필터이다.

푸리에 변환이

$$\psi(w) = G\left(\frac{w}{2}\right)\phi\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{단 } G(w) = e^{-jw} \overline{H(w+\pi)} \quad (2.14)$$

인  $\psi(x)$ 가 있을 때  $\psi(x)$ 를  $2^j$  만큼 확대시킨 것을  $\psi_{2^j}(x) = 2^j \psi(2^j x)$ 라고 하면

$(\sqrt{2^{-j}} \psi_{2^j}(x-2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$ 은  $O_{2^j}$ 의 orthonormal basis이다.

그리고

$$(\sqrt{2^{-j}} \psi_{2^j}(x-2^{-j}n))_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2} \text{은 } L^2(\mathbb{R}) \text{의 orthonormal basis이다.}$$

basis이다.

여기서  $\psi(x)$ 를 orthogonal wavelet 함수라고 한다.

Wavelet 함수  $\psi(x)$ 를  $2^j$  스케일링하고  $2^{-j}$ 에 비례하는 변환을하여  $O_{2^j}$ 의 orthonormal basis를 만든다. Wavelet을 계산하기 위하여 식 (2.10-2.12)조건을 만족하는  $H(w)$ 를 정의한다. 식 (2.13)을 이용하여 이에 대응되는 스케일링 함수  $\phi(x)$ 를 구하고 식 (2.14)로부터 wavelet 함수  $\psi(x)$ 를 구한다.  $H(w)$ 를 어떻게 선택하는가에 따라서 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 wavelet 함수  $\psi(x)$ 가 공간 영역과 푸리에 영역에서 좋은 분리 특성을 갖게 된다. 직교 wavelet basis를 이용한 신호의 분할은 푸리에와 공간영역표현 중간단계의 표현을 제공한다. Daubechies에 의하면  $n > 0$ 인 모든  $n$ 에 대하여 대응되는 wavelet함수가 compact support를 갖고 연속이며  $n$ 번 미분가능한  $H(w)$ 함수를 찾을 수 있다[2]. 그림 3은 그림 1의 스케일링 함수와 관계된 wavelet함수를 그린 것이다. 이 wavelet 함수는  $x=1/2$ 에 대하여 대칭이다. 푸리에 영역에서 보면 wavelet의 에너지는  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$  구간에 집중되어 있고 대역 통과 필터와 같은 역할을 한다.

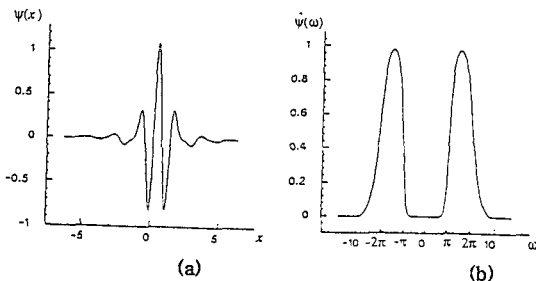


그림 3 (a) 그림 1의 스케일링함수에 대응되는 Wavelet 함수  $\psi(x)$ , (b)  $\psi(x)$ 의 푸리에 변환.  
Fig 3 (a) Wavelet function  $\psi(x)$  associated to scaling function of fig 1, (b) Fourier transform of  $\psi(x)$

$P_{O_{2^j}}$ 를 벡터 스페이스  $O_{2^j}$ 에서의 직교 투영 연산자라고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_{O_{2^j}} f(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}n) \rangle \psi_{2^j}(x-2^{-j}n) \quad (2.15)$$

$P_{O_{2^j}} f(x)$ 는  $2^j$  해상도에서  $f(x)$ 의 세부신호를 만들어낸다. 이 신호는 다음의 내적으로 표현된다.

$$D_{2^j} f = (\langle f(u), \psi(u-2^{-j}n) \rangle)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.16)$$

$D_{2^j} f$ 를  $2^j$  해상도에서  $f(x)$ 의 이산 세부신호라고 한다. 이것은  $A_{2^{j+1}} f$ 와  $A_{2^j} f$ 사이의 정보의 차이를 담고 있다. 각각의 내적은  $2^{-j}n$ 에서  $f(x)$ 와  $\psi_{2^j}(-x)$ 의 컨볼루션과 같다.

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}n) \rangle = (f(u) * \psi_{2^j}(-u))(2^{-j}n) \quad (2.17)$$

식 (2.16)과 식 (2.17)은  $2^j$  해상도에서의 이산 세부신호가  $2^j$ 의 비율로  $(f(u) * \psi_{2^j}(-u))(x)$ 를 샘플링한 것과 같다는 것을 보여준다.

$$D_{2^j} f = (f(u) * \psi_{2^j}(-u))(2^{-j}n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.18)$$

wavelet  $\psi(x)$ 는 통과 대역이  $[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]$ 인 대역통과 필터로 볼 수 있다. 따라서 세부신호  $D_{2^j} f$ 는  $[-2^{-j+1}\pi, -2^{-j}\pi] \cup [2^{-j}\pi, 2^{-j+1}\pi]$ 의 주파수 대역의  $f(x)$ 를 나타낸다. 따라서 해상도 1에서 측정된 본래의 이산신호  $A_{2^j} f$ 는

$$(A_{2^j}^d f, (D_{2^j} f)_{-J \leq j \leq -1}) \quad (2.19)$$

로 표현된다.

이러한 이산신호의 구성을 직교 wavelet 표현방법이라고 하며 위의 식에서 알 수 있듯이 성긴 해상도 영역의 기준 신호인  $A_{2^j} f$ 와  $-J \leq j \leq -1$ 에 대한  $2^j$ 에서의 세부신호로 구성된다. 다시말해서 이것은 본래의 원신호를 orthonormal wavelet basis를 사용하여 분리할 수 있다 - 즉, 독립적인 주파수 채널로 신호를 분리할 수 있다는 것을 의미한다. wavelet함수의 orthogonality는 신호를 각각 독립적으로 분리할 수 있게한다.

주파수 채널에서의 중복때문에 신호를 주파수영역 분리의 측면에서 모델을 정확하게 해석하는 어렵다. 그러나 분리함수의 orthogonality 덕분에 이 중복을 제어하는 것이 가능하다. 라플라시안 피라미드 데이터 구조와 유사하게  $A_{2^j} f$ 는 가우시안 피라미드 데이터를 제공하며  $D_{2^j} f$  데이터는 연속적인 라플라시안 피라미드 레벨을 제공한다. 그러나 라플라시안 피라미드와는 달리 과샘플링이 없고 각 데이터세트의 개개의 계수들이 서로 독립적이다.

Wavelet표현은 다음과 같이 필터를 사용하여 구현한다.

$$\psi_{2^j}(x-2^{-j}n) =$$

$$2^{-j+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(u-2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j+1}k) \rangle \phi_{2^{j+1}}(x-2^{-j+1}k) \quad (2.20)$$

위 식에서 내적의 변수를 바꾸면

$$2^{-j-1} \langle \psi_{2^j}(u-2^{-j}n), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle = \langle \psi_{2^j}(u), \phi(u-(k-2n)) \rangle$$

양변을  $f(x)$ 와 내적하면

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(u), \phi(u-(k-2n)) \rangle \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle \quad (2.21)$$

$G$ 를  $g(n) = \langle \psi_{2^j}(u), \phi(u-n) \rangle$  (2.22)의 임펄스 응답을 갖고  $\overline{g(n)} = g(-n)$ 인 이산 대칭 필터라고 하면 식(2.21)은

$$\langle f(u), \psi_{2^j}(u-2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g(2n-k)} \langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}k) \rangle \quad (2.23)$$

이 된다.  
 식 (2.23)에 의해서  $A_{2^j}^d f$ 와  $\overline{G}$ 를 컨벌루션하여 세 부신호  $D_{2^j} f$ 를 구할 수 있다. 따라서 이산 신호  $A_{2^j} f$ 의 직교 wavelet 표현은  $-J \leq j \leq -1$ 에 대하여  $A_{2^j} f$ 를 계속해서  $A_{2^j} f$ 로 분리하면 된다.

필터  $G$ 의 임펄스 응답과 필터  $H$ 의 임펄스 응답과의 관계를 유도할 수 있다.

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \quad (2.24)$$

$G$ 는  $H$ 의 대칭 필터이고 따라서 고역통과 필터가 된다. 신호처리에서는  $G$ 와  $H$ 를 직각대칭 필터라고 한다. 따라서 식 (2.23)은 이산신호  $A_{2^j} f$ 의 고역통과 필터링으로 볼 수 있다.

원신호가  $N$ 개의 샘플을 갖고 있을 경우  $A_{2^j} f$ 와  $D_{2^j} f$ 는 각각  $2^j N$ 의 샘플을 갖게 된다. 따라서

$$(A_{2^j}^d f, (D_{2^j} f)_{-J \leq j \leq -1})$$

의 wavelet 표현은 본래의 근사 신호  $A_{2^j} f$ 와 같은 개수의 샘플을 갖는다.

2.3 Orthogonal wavelet 표현으로부터 원신호 복원

앞에서 피라미드 알고리즘을 이용하여 신호를 분리한 것과 반대의 과정으로 피라미달 알고리즘을 적용하여 본래의 이산신호를 복원한다.

$V_{2^j}$ 에서  $O_{2^j}$ 는  $V_{2^j}$ 의 직교 보상이므로  $(\sqrt{2^{-j}} \phi_{2^j}(x-2^{-j}n), \sqrt{2^{-j}} \psi_{2^j}(x-2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$ 는  $V_{2^j}$ 의 orthonormal basis이다.  $n > 0$ 인  $n$ 에 대하여 스케일링 함수  $\phi_{2^{j+1}}(x-2^{-j-1}n)$ 은 다음과 같이 이 basis를 이용하여 분리된다.

$$\phi_{2^{j+1}}(x-2^{-j-1}n) = 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(u-2^{-j}k), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}n) \rangle \phi_{2^j}(x-2^{-j}k) + 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(u-2^{-j}k), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}n) \rangle \psi_{2^j}(x-2^{-j}k) \quad (2.25)$$

위 식의 양변을  $f(x)$ 와 내적을 취하면  $\langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(x-2^{-j-1}n) \rangle = 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{2^j}(u-2^{-j}k), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}n) \rangle \langle f(u), \phi_{2^j}(x-2^{-j}k) \rangle$

$$+ 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{2^j}(u-2^{-j}k), \phi_{2^{j+1}}(u-2^{-j-1}n) \rangle \langle f(u), \psi_{2^j}(x-2^{-j}k) \rangle \quad (2.26)$$

식 (2.7)을 이 식에 대입하고 식 (2.8)과 식 (2.22)에서 정의된 필터  $G$ 와  $H$ 를 사용하면

$$\langle f(u), \phi_{2^{j+1}}(x-2^{-j-1}n) \rangle = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-2k) \langle f(u), \phi_{2^j}(x-2^{-j}k) \rangle + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-2k) \langle f(u), \psi_{2^j}(x-2^{-j}k) \rangle \quad (2.27)$$

이 식으로부터  $A_{2^j} f$ 와  $D_{2^j} f$ 의 각각의 샘플 사이에 0을 삽입하고 여기서 나오는 신호를 각각  $H$ 와  $G$ 필터를 사용하여  $A_{2^{j+1}} f$ 를 복원할 수 있다.

3. 이미지 데이터의 다해상도 표현 및 무손실 코딩

이미지 데이터를 wavelet 변환을 통하여 분할하고 다해상도로 표현하는 방법과 이렇게 표현한 데이터를 손실없이 압축하는 방법으로 연산 코딩을 제시한다.

3.1 이미지 데이터의 다해상도 표현

wavelet 모델은  $n > 0$ 의 차원에서 쉽게 일반화될 수 있다. 여기서는 2차원 영상신호 처리의 경우를 다룰 것이다. 이제 신호는 한정된 에너지 함수인  $f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 로 표현된다.

$(V_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ 는  $L^2(\mathbb{R}^2)$ 의 다해상도 근사이다.  $2^j$ 해상도에서  $f(x,y)$ 신호의 근사는 벡터 스페이스  $V_{2^j}$ 로의 직교 투영과 같다.

각각의  $V_{2^j}$ 스페이스에서 고유 스케일링 함수  $\phi(x,y)$ 가 존재하고 이것을 확장시키고 평행이동 시켜서 orthonormal basis를 만든다.

$\phi_{2^j}(x,y) = 2^{2j} \phi(2^j x, 2^j y)$ 인  $2^{-j} \phi_{2^j}(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  함수가  $V_{2^j}$ 의 orthonormal basis를 형성한다.  $2^{-j}$ 는  $L^2(\mathbb{R}^2)$  norm에서 각 함수를 표준화한다.  $\phi(x,y)$  함수는  $L^2(\mathbb{R}^2)$ 의 특정 다해상도 근사에 대하여 고유하다. 스케일링 함수  $\phi(x,y)$ 를

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y) \text{로 쓸 수 있다.}$$

$V_{2^j}$ 의 직교 성분은 다음과 같이 주어진다.

$$(2^{-j} \phi_{2^j}(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m))_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} = (2^{-j} \phi_{2^j}(x-2^{-j}n) \phi_{2^j}(y-2^{-j}m))_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.1)$$

따라서  $2^j$ 해상도에서의 신호  $f(x,y)$ 의 근사는 다음과 같이 내적으로 표시된다.

$$A_{2^j}^d f = (\langle f(x,y), \phi_{2^j}(x-2^{-j}n) \phi_{2^j}(y-2^{-j}m) \rangle)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$$

$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y)$ 의 이차원 스케일링 함수가 있다고 가정할때  $\psi(x)$ 를 스케일링함수  $\phi(x)$ 에 대응되는 일차원 wavelet함수라고 하면 다음 세개의 wavelet함수  $\psi^1(x,y) = \phi(x)\psi(y), \psi^2(x,y) = \psi(x)\phi(y), \psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ 가 있을때

$$\begin{aligned} & (2^{-j}\psi^1_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m), 2^{-j}\psi^2_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m), \\ & 2^{-j}\psi^3_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

는  $O_2$ 의 orthonormal basis이다.  
그리고  $(2^{-j}\psi^1_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m), 2^{-j}\psi^2_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m),$

$$2^{-j}\psi^3_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.3)$$

은  $L^2(R^2)$ 의 orthonormal basis이다.  
 $A_{2^j}^d f$ 와  $A_{2^j}^s f$ 사이의 정보의 차이는  $O_2$ 상에  $f(x)$ 를 투영한 것과 같으며 또한  $f(x)$ 와  $O_2$ 의 orthonormal basis의 각 벡터와의 내적으로 나타내어진다.

이 정보의 차이를 세개의 세부신호 영상을 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$D_{2^j}^1 f = (\langle f(x, y), \psi^1_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m) \rangle)_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.4)$$

$$D_{2^j}^2 f = (\langle f(x, y), \psi^2_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m) \rangle)_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.5)$$

$$D_{2^j}^3 f = (\langle f(x, y), \psi^3_2(x-2^{-j}n, y-2^{-j}m) \rangle)_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.6)$$

이차원에서  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f, D_{2^j}^2 f, D_{2^j}^3 f$ 들을 정의하는 내적을 이차원 컨벌루션의 일정한 샘플링으로 생각할 수 있다.

세개의 wavelet  $\psi^1(x, y), \psi^2(x, y), \psi^3(x, y)$ 이 각각  $\phi$ 와  $\psi$  함수의 개별적인 곱으로 주어졌기 때문에 이차원 컨벌루션을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_{2^j}^d f = ((f(x, y) * \phi_2(-x)\phi_2(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.7)$$

$$D_{2^j}^1 f = ((f(x, y) * \phi_2(-x)\psi_2(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.8)$$

$$D_{2^j}^2 f = ((f(x, y) * \psi_2(-x)\phi_2(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.9)$$

$$D_{2^j}^3 f = ((f(x, y) * \psi_2(-x)\psi_2(-y))(2^{-j}n, 2^{-j}m))_{(n,m) \in Z^2} \quad (3.10)$$

따라서 wavelet 분할은 독립적이고 공간적으로 지향된 주파수 채널의 세트에 신호를 분할하는 것으로 생각할 수 있다.  $\phi(x)$ 와  $\psi(x)$ 를 각각 완전한 저역 통과 필터와 고역 통과 필터라고 할때 그림 2.9는  $A_{2^j}^d f$ 를  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f, D_{2^j}^2 f, D_{2^j}^3 f$ 로 분할하여 배치하는 방법을 보인 것이다.  $A_{2^j}^d f$ 는 가장 낮은 주파수에 해당되고  $D_{2^j}^1 f$ 는 수직 고주파부분이고  $D_{2^j}^2 f$ 는 수평고주파 부분이며  $D_{2^j}^3 f$ 는 수직 수평모두 고주파에 해당된다.

$J > 0$ 인  $J$ 에 대하여  $A_{2^j}^d f$  영상은 다음과 같이  $3J+1$ 의 이산 영상으로 완전하게 표현된다.

$$(A_{2^j}^d f, (D_{2^j}^1 f)^{-J \leq j \leq -1}, (D_{2^j}^2 f)^{-J \leq j \leq -1}, (D_{2^j}^3 f)^{-J \leq j \leq -1})$$

이러한 표현방법을 바로 이차원에서의 영상 적교 wavelet 표현이라고 한다.  $A_{2^j}^d f$ 는  $2^{-j}$ 해상도에서의 성긴 영상이고  $D_{2^j}^k f$ 는 세부신호영상이다. 원영상의 데이터의 수가  $N$ 일 경우  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f, D_{2^j}^2 f, D_{2^j}^3 f$ 의 데이터의 개수는  $2^j N$  ( $j < 0$ )개의 데이터를 갖는다. 따라서 이들의 데이터 개수의 총합은 원영상의 데이터 개수와 같다. 라플라시안 피라미드와 같은 다해상도 표현의 경우에 2차원에서는 본래 영상의 데이터에 비해 4/3배로 데이터 개수가 증가한다.

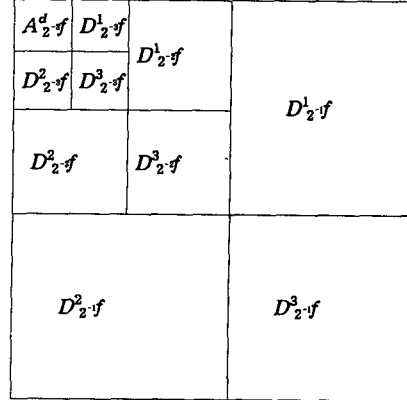


그림 4 본 논문에서의  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^k f$  배치도.  
Fig 4 Configuration for  $A_{2^j}^d f$  and  $D_{2^j}^k f$  in this thesis.

### 3.2 이미지 분할과 복원 알고리즘

2차원 신호의 wavelet 표현방법은 피라미달 알고리즘을 사용한다. 2차원 wavelet 변환은 x축과 y축을 따라서 진행하는 1차원 wavelet 변환으로 볼 수 있다. 따라서 1차원 신호의 분할 알고리즘을 확장하여 2차원 신호의 분할에도 적용할 수 있다. 각 단계에서  $A_{2^j}^d f$ 를  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f$ 와  $D_{2^j}^2 f$ 와  $D_{2^j}^3 f$ 로 분할한다. 이 알고리즘을 그림으로 나타낸 것이 그림 5이다. 1차원 필터를 사용하여  $A_{2^j}^d f$ 의 각 행에 대하여 컨벌루션하고 여기서 나온 결과를 2:1 다운 샘플링한다. 그리고 다시 이 결과 신호의 열을 다시 적절한 필터와 컨벌루션하고 여기서 나온 결과를 2:1 다운 샘플링한다. 여기서 사용되는 필터는 앞에서 논의된 직각 대칭 필터이다. 그림 5는 필터를 적용하여  $A_{2^j}^d f, D_{2^j}^1 f, D_{2^j}^2 f, D_{2^j}^3 f$ 를 계산하는 블럭 다이어그램이다. 따라서  $-J \leq j \leq -1$ 에 대하여 이 과정을 반복하여  $A_{2^j}^d f$ 의 wavelet 변환을 계산한다. 이 알고리즘은  $A_{2^j}^d f$ 의 행렬과 일차원 직각 대칭 필터  $\bar{H}$ 와  $\bar{G}$ 와의 일차원 컨벌루션의 확장으로써 개별적인 쉐레 대칭 필터 분할에 해당된다.

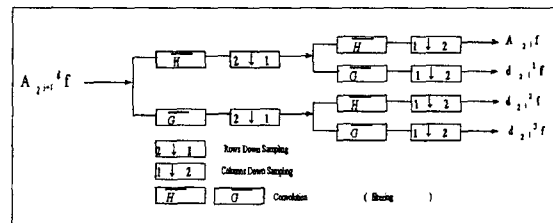


그림 5  $A_{2^j}^d f$ 를  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f$ 와  $D_{2^j}^2 f$ 와  $D_{2^j}^3 f$ 로 분할하는 알고리즘.  
Fig 5 Decomposition  $A_{2^j}^d f$  into  $A_{2^j}^d f, D_{2^j}^1 f, D_{2^j}^2 f$  and  $D_{2^j}^3 f$ .

영상을 복원할때 각 단계에서  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f$ 와  $D_{2^j}^2 f$ 와  $D_{2^j}^3 f$ 로부터  $A_{2^{j+1}}^d f$ 를 복원한다. 이에 대한 알고리즘이 그림 6에 블럭다이어그램이 있다.  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f$ 와  $D_{2^j}^2 f$ 와  $D_{2^j}^3 f$ 데이터의 각 열들 사이에 0의 열을 삽입하고 일차원 필터와 행들을 컨벌루션한다. 여기서 나온 결과의 행들 사이에 0의 행을 삽입하고 일차원 필터로 열에 대한 컨벌루션을 수행한다. 사용되는 1차원 필터는 H와 G로써 직각 대칭 필터이다.  $-J \leq j \leq -1$ 에 대하여 이 과정을 반복하여 wavelet 변환된 데이터로부터  $A_{2^J}^d f$ 영상을 복원한다.

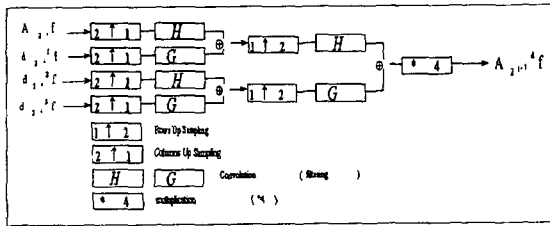


그림 6  $A_{2^j}^d f$ 와  $D_{2^j}^1 f$ 와  $D_{2^j}^2 f$ 와  $D_{2^j}^3 f$ 로부터  $A_{2^{j+1}}^d f$ 를 복원.

Fig 6  $A_{2^j}^d f$  reconstruction from  $A_{2^j}^d f$ ,  $D_{2^j}^1 f$ ,  $D_{2^j}^2 f$  and  $D_{2^j}^3 f$ .

### 3.3 연산 코딩

연산코딩에서 정보는 0과 1사이의 실수 구간으로 표현된다. 정보가 길어질수록 정보를 표현하기위하여 요구되는 구간이 작아지며 이 구간들을 표현하는데 필요한 비트의 개수가 증가한다. 정보의 연속적인 기호는 모델에 의해서 발생하는 기호의 확률에 따라서 구간의 크기를 감소시킨다. 확률이 큰 기호는 확률이 작은 기호보다 범위를 감소시키는 것이 작다. 따라서 정보에 거의 비트를 추가시키지 않는다.

### 4. 결과 및 토의

본 장에서는 3장에서 제시된 알고리즘을 바탕으로 다해상도로 표현하기위한 신호분할 과정에서 요구되는 최적의 필터를 찾는 실험과 이 필터를 이용하여 다해상도로 5단계 스케일까지 표현하는 방법과 다해상도로 표현된 데이터를 손실없이 압축하는 방법으로 Huffman 코딩과 연산 코딩을 한 결과를 보여준다.

#### (1) 필터

아래와 같이 6가지의 필터를 사용하여 영상 데이터를 분할했을때 전체 파워에 대한 가장 낮은 대역의 에너지의 비율을 나타낸 것이다. 이 비율이 높을수록 에너지를 특정 부분으로 모으는 능력이 좋기때문에 비율이 클수록 압축률을 높일 수 있다. 각각의 필터로부터 얻은 영상과 에너지 집적 비율 및 연산 시간을 고려할때 daub18이 가장 적당한 것으로 판단되어 다음에 사용되는 다해상도 표현에서는 daub18을 필터로 사용하였다. 본 논문에서는 Barbara와 Lena란

표 1 에너지 집적도 ( 512 X 512 영상 데이터)

table 1 Energy Compaction Ratio

Barbara

(단위: %)

|         | daub 6 | daub 12 | daub 18 | daub 24 | CMF 16 | QM7 32 |
|---------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 1 scale | 54.40  | 56.07   | 57.93   | 57.16   | 57.97  | 55.69  |
| 2 scale | 35.95  | 37.86   | 38.95   | 38.82   | 39.22  | 34.35  |
| 3 scale | 30.18  | 32.16   | 33.37   | 33.37   | 33.64  | 27.67  |
| 4 scale | 28.34  | 30.29   | 31.41   | 31.40   | 31.47  | 25.59  |
| 5 scale | 27.72  | 29.61   | 30.69   | 30.66   | 30.53  | 24.75  |

Lena

(단위:%)

|         | daub 6 | daub 12 | daub 18 | daub 24 | CMF 16 | QM7 32 |
|---------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 1 scale | 67.07  | 70.53   | 71.85   | 72.37   | 73.10  | 73.81  |
| 2 scale | 49.89  | 54.11   | 54.81   | 54.91   | 55.89  | 56.71  |
| 3 scale | 41.72  | 45.91   | 46.95   | 47.31   | 47.95  | 48.66  |
| 4 scale | 38.32  | 42.46   | 43.43   | 43.75   | 44.28  | 45.13  |
| 5 scale | 36.57  | 40.65   | 41.69   | 42.08   | 42.91  | 43.60  |

#### (2) 다해상도 표현

그림 7은 다해상도 표현방법으로 Barbara를 표현한 결과이다. 여기서 사용된 필터는 위의 실험결과로부터 daub 18을 필터 계수로 사용한 것이다. 그림 7의 그림들은 각 스케일별로 1에서 5까지의 영상들이다. 그림 7의 왼쪽 그림은 다해상도로 표현한 것이고 오른쪽 그림은 가장 낮은 대역의 계수만을 이용하여 복원한 영상을 나타낸 것이다. 따라서 (d)는 256 X 256(전체 데이터의 1/4)을 복원한 것이고 (f)는 128 X 128(전체 데이터의 1/16)만을 복원한 것이며 (h)는 64 X 64(전체 데이터의 1/64), (j)는 32 X 32(전체 데이터의 1/256) (l)은 16 X 16(전체 데이터의 1/1024)만을 복원한 것이다. 모든 스케일에서 완전하게 복원한 영상은 본래의 영상과 차이가 없기때문에 (b)이 5번 스케일한 것만 제시한다.

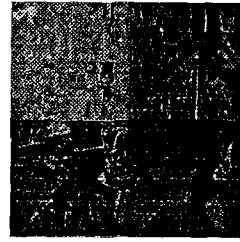
이와같이 여러단계의 다해상도를 실험한 결과 이미지 브라우징의 경우는 데이터의 크기가 작으면서도 본래의 이미지를 인식할 수 있어야 하므로 이 두가지를 고려해볼때 3단계까지의 스케일이 가장 적절하다. 3단계 스케일에서는 가장 낮은 영역의 크기가 64 x 64로써 본래 이미지 크기의 1/64이면서도 본래 이미지의 형태를 충분히 파악할 수 있다. 물론 완전히 복원했을 경우에는 본래의 이미지와 다름없는 이미지를 얻게된다. 한편 최소의 데이터 개수로 최적의 이미지를 복원하는 것이 가능해야하는 progressive transmission의 경우에는 더 많은 스케일이 필수적이다. 5단계까지 스케일했을때 가장 낮은 레벨의 데이터 크기는 16 X 16이 된다. 5단계에서 가장 낮은 레벨을 그대로 보거나 본래의 이미지 크기와 동일한 512 X 512로 확대했을 경우에 앞의 그림에서처럼 인식하기가 어렵다. 그러나 가장 작은 레벨과 이것의 세부 이미지를 합성하면(합성한 것의 데이터 크기: 32 X 32)의 경우는 인식이 가능하고 세부 이미지 모두가 합성되지 않았을 경우에도 어느정도 인식이 가능하다.

(3) 연산 코딩

데이터가 손상을 입지 않도록 손실이 없는 코딩 방법으로 연산 코딩과 Huffman 코딩을 사용하였다. 데이터는 8bps인 512 X 512 영상 데이터로써 Lena와 Barbara와 Peppers와 Brain을 사용하였다. 데이터는 중요한 비트열이 맨앞부분에 오는형식으로 압축하기 전에 이미 5단계부터 1단계의 배열 순서로 만들어져 있다. 이미지 데이터를 처리할때 압축할때 시간과 압축비를 비교하면 결과 연산 코딩이 Huffman코딩보다 효율이 좋다. 압축비는 다음의 표 2와 같다.

표 2 연산 코딩과 Huffman 코딩의 압축비 비교  
Table 2 Comparison for compression ratio between arithmetic coding and Huffman coding

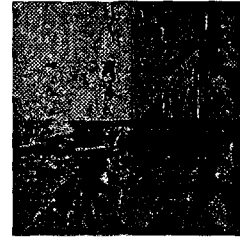
| 방<br>법  | 연산 코딩        |            | Huffman 코딩   |            |
|---------|--------------|------------|--------------|------------|
|         | coding(bits) | bits/pixel | coding(bits) | bits/pixel |
| lena    | 786161       | 2.998966   | 790474       | 3.015228   |
| barbara | 836220       | 3.189926   | 846696       | 3.229896   |
| peppers | 802742       | 3.062218   | 808864       | 3.089323   |
| brain   | 858623       | 3.276531   | 869592       | 3.317230   |



(g) 3회 스케일한 영상



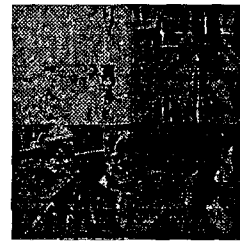
(h) (g)의 LL3부분을 복원



(i) 4회 스케일한 영상



(j) (i)의 LL4부분을 복원



(k) 5회 스케일한 영상



(l) (k)의 LL5부분을 복원

그림 7 Barbara 영상 (g) (h) (i) (j) (k) (l)  
Fig 7 Barbara image (g) (h) (i) (j) (k) (l)



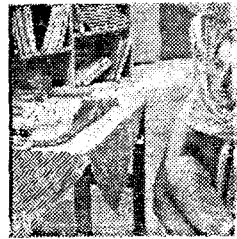
(a) 원영상



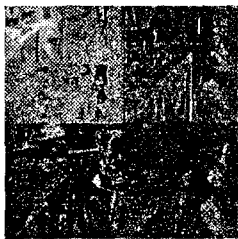
(b) (k)트 부리 복원한 영상



(c) 1회 스케일한 영상



(d) (c)의 LL1부분을 복원



(e) 2회 스케일한 영상



(f) (e)의 LL2부분을 복원

5. 결론

본 논문은 wavelet 변환을 통하여 신호를 분할하여 다해상도로 표현하는 방법과 스케일링 함수로 사용할 최적의 필터를 찾고 분할된 신호를 손실없이 압축하는 알고리즘을 제안한 것이다. 신호를 분할하는데 가장 적절한 필터를 찾기 위하여 6개의 필터를 사용하여 비교하였고 크기가 작으면서도 이미지의 특성을 충분히 인식할 수 있어야 하는 이미지 브라우징이나 최소의 데이터 개수로 최적의 이미지를 복원해야하는 progressive transmission에서 사용될때 적절한 다해상도를 찾기 위하여 5단계까지 스케일하여 각각을 표현하고 가장 낮은 레벨을 본래의 화면과 같은 크기로 나타내었다. 그리고 데이터의 배치를 그림 9에서와 같이 5단계로부터 1단계로 배치하여 가장 중요한 데이터를 맨앞에 위치시켰다. 또한 의료영상 데이터와 같은 경우는 데이터의 손실이 없어야하므로 손실없는 코딩방법으로 엔트로피 코딩방법인 연산 코딩과 Huffman코딩을 이용하여 데이터를 손실없이 압축하고 비교하였다. 그 결과는 다음과 같다.

1. 다해상도로 표현하는데 필수적인 에너지 집적정도가 데이터에 따라서 조금씩 다르지만 연산에 소요되는 시간과 집적정도 및 복원된 데이터의 질을 종합적으로 고려해본결과 daub 18이 가장 적절하다.

2. 여러단계의 다해상도로 실험한 결과 이미지 브라우징의 경우는 데이터의 크기가 작으면서도 본래의 이미지를 인식할 수 있어야 하므로 이것을 충족시키는 것이 3단계 스케일이다.

3. progressive transmission에 사용될때는 데이터를 수신하는 시스템에 따라서 각각 다른 해상도로 데이터를 분석하므로 수신하는 시스템의 종류에 따라서 데이터를 분할하는 회수가 달라진다. 그리고 최소의 데이터 개수를 이용하여 최적의 이미지를 복원할 수 있고 완전히 복원되었을때는 본래의 이미지와 동일한 것이 되어야한다. 따라서 가장 낮은 레벨에서도 최소한의 인식이 되는 5단계까지의 스케일로 이미지를 분할하고 5단계부터 1단계로 데이터를 배치하여 원하는 비트레이트에서 데이터를 복원할 수 있게하였고 이를 복원하면 본래의 이미지와 같은 이미지를 얻을 수 있다.

4. 이미지 데이터의 손실을 없애기 위하여 연산 코딩과 Huffman코딩을 사용한 결과 연산에 필요한 시간과 압축률에 있어서 연산 코딩이 우월하다.

그리고 압축할때 약간의 손실을 무시할 수 있는 경우에는 subband코딩에서와 같은 방법으로 대역별로 최적의 비트할당을 통하여 압축하여 압축률을 높일 수 있고 데이터 처리 연산과정에서 부동소수점 연산을하면 보다 좋은 화질을 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

[1] Ali N.Akansu and Richard A.Haddad, *Multiresolution Signal Decomposition*, Academic Press, 1992  
 [2] I.Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported Wavelets," *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 41, pp. 909-996, 1988.  
 [3] I.Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis," *IEEE Trans. Informat. Theory*, vol. 36, No. 5, pp. 961-1005, September 1990.  
 [4] Allen Gersho and Robert M.Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*, KAP, 1992.  
 [5] Jain, *Fundamentals of Digital image processing*, prentice - hall, 1989.

[6] I.H.Witten and R.Neal and J.G.Cleary, "Arithmetic coding for data compression," *Comm. ACM.*, vol.30, pp 520-540, June 1987.  
 [7] S. Mallat, " A theory for multiresolution signal decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. Image Processing*, vol.1, pp. 244-250, April 1992  
 [8] Edward H.Adelson and Eero Simoncelli, "Orthogonal pyramid transforms for image coding," *Proc SPIE*, vol. 845, pp. 50-58, 1987.  
 [9] William R.Zettler and John Huffman and David C.P.Linden, "Application of Compactly Wavelets to Image Compression," *Proc SPIE.*, vol. 1244, pp. 150- 160, 1990.  
 [10] A. Grossmann and J. Morlet, "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape," *SIAM J. Math.*, vol.15, pp. 723-736, 1984.  
 [11] John W. Woods, *Subband Image Coding*, Kluwer Academic Publishers 1991.  
 [12] J.Koenderink, "The structure of images," in *Biological Cybernetics*. New York: Springer Verlag, 1984