

합성형 사장교의 시공단계해석 및 시공관리 시스템 개발

Development of Structural Analysis and Construction Management System for Composite Cable Stayed Bridges

서주원¹⁾
J.W. Seo

박정일²⁾
J.I. Park

김남식³⁾
N.S. Kim

심옥진⁴⁾
O.J. Shim

ABSTRACT

This paper presents a Cable Stayed Bridge Construction Management System, which consists of Structural System Identification Method (SSIM), Error Sensitivity Analysis and Optimum Error Adjustment & Prediction System. The 1st System Identification Method builds an error influence matrix using the linear superposition of each error modes. The 2nd SSIM also considers the second error mode term, which shows good error factor estimation. The optimal cable adjustment can be accomplished within the allowable range of both cable tension and camber. The Post processor, constituted with Motif and GL library on SGI platform, is useful for monitoring construction stage management by displaying construction data, adjustment and prediction results at each construction step.

1. 서론

사장교의 Balanced Cantilever Method에 의한 상판의 시공은 매우 정밀한 시공관리를 요구한다. 또한, 시공이 진행함에 따라 계속해서 달라지는 구조계와 시공환경의 변화를 함께 고려한 시공관리가 필요하다. 이와같이 변화하는 구조계는 필연적으로 시공시의 예측치와 설계치와의 차이를 나타낸다. 그러므로 매 시공시 예측과 오차보정을 수행할 수 있는 시공관리 시스템이 요구된다. 시공관리 시스템은 예측, 시공단계 해석, System Identification & Error Factor Estimation, Error Prediction, 최적보정치 계산 시스템 등으로 구성되어 있다. Error Factor Estimation과 최적보정치 계산으로 부터 사장재의 인장력 보정치를 계산하여 상판 처짐과 사장재의 장력을 적절한 범위내에서 설계치에 근접하도록 관리할 수 있다. 또한 Error 예측 시스템으로부터 다음단계의 Error를 예측하여 이를 함께 고려한 보정치를 구할 수 있다. 이러한 일련의 시공단계 관리 시스템은 Pre-post processor의 체계적 monitoring을 통하여 효율적인 가설관리를 이룰 수 있다.

2. 합성형 사장교의 시공관리

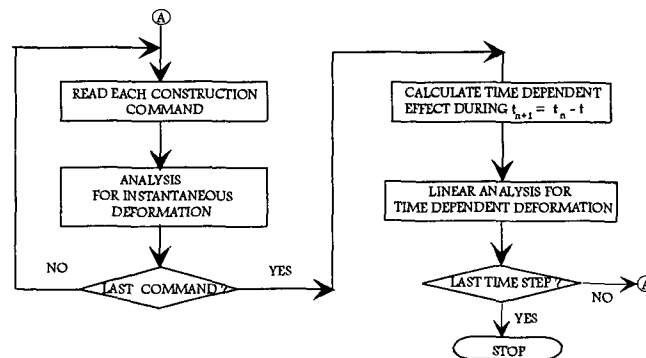


그림 1. 시공단계 해석 순서도

1) 현대건설(주) 기술연구소 연구원
3) 현대건설(주) 기술연구소 선임연구원

2) 현대건설(주) 기술연구소 책임연구원
4) 현대건설(주) 기술연구소 소장

합성형 사장교의 시공단계 해석은 실제 시공단계중 구조계의 변화를 가져오는 일련의 작업들을 구분하여 시공명령어를 구성하여 이들 시공명령어의 집합들로 시공과정을 모사하게 된다[1]. 그림 1은 각 시공명령어에 따른 시공단계 해석의 과정을 보여주고 있다. 합성형 사장교의 시공중 상판 가설 작업은 강형가설, 1차 장력보정, slab 콘크리트 타설, 2차장력보정 등의 작업으로 상판가설 사이클을 이루고 있으며[2], 사장교의 장력보정은 이러한 일련의 작업과정을 통하여 가능한 최적의 장력보정을 통하여 최종의 원하는 처짐관리와 장력관리의 수행을 목표로 하고 있다.

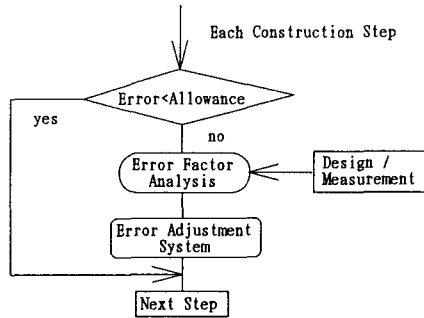


그림 2. 가설 시공관리 순서도

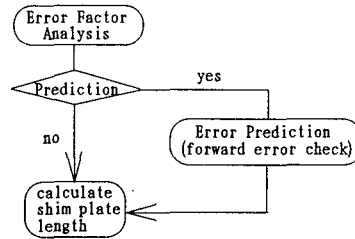


그림 3. 오차보정/예측 시스템

그림 2와 3은 이러한 일련의 상부구조물 작업 사이클에서 계측을 통한 오차의 원인분석과 오차보정 시스템의 보정과정을 보여주고 있다.

3. 오차보정 시스템

3.1 System Identification 기법

구조계의 System Identification은 사장교의 각 구조계의 변화에 대한 선형 중첩의 matrix form의 관계를 나타낼 수 있다. 케이블의 장력 변화에 대한 사장교 구조계 변화의 비선형성을 무시할 수 있는 경우 다음과 같은 식으로 표현된다[3].

$$\begin{matrix} \{Z\} \\ m \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [F] \\ m \times n \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \{\dot{\alpha}\} \\ n \times 1 \end{matrix} \quad (1)$$

여기서, $\{Z\}$: Error Vector, the components of which consist of camber and

member force error

m : Index of field measurement items

n : Index of error factors

$[F]$: Error influence matrix

$\{\dot{\alpha}\}$: Error contribution rate vector

$\{Z\}$ 는 케이블의 장력변화등에 대한 response 이다. 위의 식은 n 개의 성분의 변화에 대한 m 계측치의 변화와의 관계를 나타내고 있다. 여기서 $[F]$ 는 이들 계측치와 Error factor 사이의 관계를 나타내는 영향 매트릭스이다.

3.2 2nd-order System Identification 기법

계측치와 error mode사이의 관계를 나타낸 식(1)의 선형 중첩관계식은 1차의 선형 error mode만을 포함하고 있다. 여기서 error mode의 2차 성분을 포함한 System Identification Matrix를 구성하면 다음과 같다[4].

$$\begin{matrix} \{Z\} \\ m \times 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} [F] + [H\{\dot{\alpha}\}] \\ m \times n \quad m \times n \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \{\dot{\alpha}\} \\ n \times 1 \end{matrix} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
[F]_{m \times n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial Z_1}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Z_m}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial Z_m}{\partial \alpha_n} \end{bmatrix} : \text{1st order error influence(sensitivity) matrix} \\
[H(\alpha)]_{m \times n} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{\alpha}\}^T \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ n \times n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \{\dot{\alpha}\}^T \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ n \times n \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \{\dot{\alpha}\}^T \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_m \\ n \times n \end{bmatrix} \end{bmatrix} : \text{2nd order error influence(sensitivity) matrix} \\
[h_i]_{n \times n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z_i}{(\partial \alpha_1)^2} & \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \alpha_n \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \alpha_n \partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial^2 Z_i}{(\partial \alpha_n)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^i & \dots & Z_{1n}^i \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n1}^i & \dots & Z_{nn}^i \end{bmatrix} \\
& \text{(abbreviated expression for easy deployment)} \tag{3}
\end{aligned}$$

이때, SI의 2차 항은 $[h_i]^T = [h_i]$ 인 조건을 만족한다[4][5].

3.3 Error 최적보정

영향 매트릭스를 이용하여 n 단계에서의 구조체의 error를 보정할 수 있다. 이때 보정후의 잔류 error와의 관계는 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\{E\} &= \{D\} - \{Z\} = \{D\} - [F]\{\dot{\alpha}\} \\
\text{where, } \{E\} &: \text{residual error} \\
\{D\} &: \text{deviation i.e. measurement} \\
\{Z\} &: \text{adjustment}
\end{aligned} \tag{4}$$

잔류 error를 최소화하기 위한 목적함수로부터 최적의 cable 장력 보정량을 구할 수 있다[6].

$$\phi = \sum_{i=1}^n e_i^2 \tag{5}$$

식 (1)로부터

$$\begin{aligned}
\phi &= \sum_{i=1}^n (d_i - \sum_{j=1}^m f_{ij} c_j)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n [d_i^2 - 2d_i \sum_{j=1}^m f_{ij} c_j + (\sum_{j=1}^m f_{ij} c_j)^2]
\end{aligned}$$

목적함수를 최소화하기 위해서 cable 장력보정 vector $\{C\}$ 에 대한 편미분치에 대한

관계로부터

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_k} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^n (-2d_i f_{ik} + 2f_{ik} \sum_{j=1}^m f_{ij} c_j) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n f_{ik} \sum_{j=1}^m f_{ij} c_j - 2 \sum_{i=1}^n f_{ik} d_i\end{aligned}$$

따라서,

$$\sum_{i=1}^n f_{ik} \sum_{j=1}^m f_{ij} c_j = \sum_{i=1}^n f_{ik} d_i \quad (6)$$

식 (6)를 매트릭스 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[F]^T [F] \{C\} = [F]^T \{D\} \quad (7)$$

식 (7)로부터 선형 System Identification을 통한 사장재의 장력보정량을 산정할 수 있다.

$$\{C\} = ([F]^T \cdot [F])^{-1} \cdot [F]^T \cdot \{D\} \quad (8)$$

식 (8)에서의 deviation은 deck의 처짐, 단면계수 차이, 자중의 변화 등 여러가지 다른 차원을 갖는 요소들로 구성되어 있다. 따라서 weight coefficient {W}를 통하여 이러한 error들을 무차원화하여 적용할 수 있다.

$$\{C\} = ([F]^T \cdot [W] \cdot [F])^{-1} \cdot [F]^T \cdot [W] \cdot \{D\} \quad (9)$$

3.4 2nd order SSIM을 이용한 최적보정

영향 매트릭스의 1차 항만을 고려한 3.3 경우에는 보정량을 직접 매트릭스 연산을 통하여 구할 수 있다. 2차 항을 포함한 system identification을 이용할 경우에도 마찬가지로 error 보정후의 잔류 error를 최소화하는 목적함수를 구하게 되나, 보정량은 iteration을 통하여 구하게 된다. 시공시 구조물의 제측치를 {R}, error control system에 의하지 않은 단순한 보정계산치를 {R₀}라 하면,

$$\{R\} = \{R_0\} + \{Z\} \quad (10)$$

식(10)에 대하여 잔류 error를 최소화하기 위한 목적함수를 구성하면 다음과 같다.

$$\Phi = (\{R_0\} + \{Z\} - \{R\})^2 \rightarrow \text{Minimize } \Phi \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \{\alpha\}} = \{0\}; \text{ minimize condition} \quad (12)$$

여기서 error residual {r}을 나타내면 다음과 같다.

$$\{r\} = \{R_0\} - \{R\} \quad (13)$$

식(2)와 식(13)을 식(11)에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}_{1 \times 1}^T \cdot \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}_{m \times 1} + 2 \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{n \times 1}^T \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}_{m \times 1} + \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{n \times 1}^T \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{m \times n} + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{m \times n} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} &= 2 \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + 2 \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}_{m \times 1} \\ &+ 2 \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + 2 \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{m \times n} + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{m \times n} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{n \times 1} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}_{n \times 1}; \text{ minimize condition} \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)는 $\{\dot{\alpha}\}$ 에 대한 비선형항을 포함하므로 unbalance term을 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} &= \begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix}_{n \times 1} = \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + 2 \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}_{m \times 1} \\ &+ \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T + 2 \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \right) \cdot \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{m \times n} + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{m \times n} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{n \times 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Newton's iteration method를 식(16)에 적용하기 위한, $\{\alpha\}$ 에 대한 $\{U\}$ 의 tangential variation은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \{U\}}{\partial \dot{\alpha}} = \begin{Bmatrix} T \end{Bmatrix}_{n \times n} = \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{m \times n} + 6 \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{n \times m}^T \left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{m \times n} + \begin{Bmatrix} H(\alpha) \end{Bmatrix}_{m \times n} \right) + \begin{Bmatrix} E \end{Bmatrix}_{n \times n} \quad (17)$$

이상에서 보정량 벡터 $\{\dot{\alpha}\}$ 를 구하는 procedure를 정리하면 다음과 같다.

1. Get $\{\dot{\alpha}\}^0 = \{\dot{\alpha}\}^{1\text{-st order}} = -\left(\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \dot{r} \end{Bmatrix}$ as first trial of $\{\dot{\alpha}\}$
2. $\{U\}^0, [T]_0$ 계산
3. $d\{\dot{\alpha}\}^0 = -[T]_0^{-1} \cdot \{U\}^0$ 계산
4. $\{\dot{\alpha}\}^1 = \{\dot{\alpha}\}^0 + d\{\dot{\alpha}\}^0$ 계산
5. Reiterate the procedure, 2 through 4 by n times until $\{U\}^n < \varepsilon$ (≈ 0.0)
6. Update $\{\dot{\alpha}\}$
 $\{\dot{\alpha}\}^n = \{\dot{\alpha}\}^{n-1} + d\{\dot{\alpha}\}^n$ (say equal to $\{\dot{\alpha}\}$)

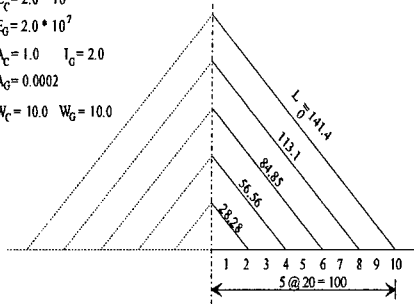
그림 4. 2nd SSI를 이용한 보정량 $\{\dot{\alpha}\}$ 계산 procedure

4. 해석 예제

4.1 System Identification을 이용한 원인분석

그림 5는 Balanced Cantilever Method에 의해 시공되는 사장교의 일부를 보여주고 있다. 원인분석의 결과를 모사하기 위해서, 임의의 오차를 포함한 예제를 해석하여 이 결과를 계측데이터로 이용하여 원인분석을 수행하였다. 각 오차항은 거더의 강성, 거더의 자중, 케이블의 강성, 초기 케이블의 길이(장력)에 오차를 주어서 설계치와 비교하였다. Beam과 Cable Element를 사용하여 기하비선형 해석을 수행하였다. 표 2. 는 1st order SSIM과 2nd order SSIM에 의한 오차원인분석 결과를 보여주고 있다. 해석결과 모두 비교적 정확한 분석결과를 보여주고있고, 특히 2차 SSIM 방법에 의한 원인분석은 매우 정확한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

$E_c = 2.0 \cdot 10^4$
 $E_G = 2.0 \cdot 10^7$
 $A_c = 1.0 \quad I_G = 2.0$
 $A_G = 0.0002$
 $W_c = 10.0 \quad W_G = 10.0$



Error Mode	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	Camber Error
Node 1	-0.00431	-0.00240	-0.00133	-0.00409	-0.01248
2	-0.01598	-0.00895	-0.00503	-0.01537	-0.04667
3	-0.03332	-0.01874	-0.01070	-0.03240	-0.09801
4	-0.05487	-0.03098	-0.01797	-0.05397	-0.16253
5	-0.07941	-0.04500	-0.02648	-0.07898	-0.23678
6	-0.10591	-0.06023	-0.03592	-0.10651	-0.31788
7	-0.13359	-0.07621	-0.04601	-0.13576	-0.40341
8	-0.16184	-0.09261	-0.05652	-0.16612	-0.49155
9	-0.19029	-0.10917	-0.06727	-0.19706	-0.58091
10	-0.21873	-0.12576	-0.07813	-0.22828	-0.67068

그림 5. 원인분석 예제

표 1. 거더의 캠버량 오차

	$\{\alpha\}$	입력 오차값	1-st order SSIM 예측값	2nd order SSIM 예측값
1	거더 단면계수	- 10.0 %	- 9.19 %	- 10.08 %
2	거더 자중	+ 5.0 %	+ 4.56 %	+ 5.06 %
3	케이블 강성	- 15.0 %	- 13.78 %	- 15.12 %
4	초기 케이블 길이	+ 0.5 %	+ 0.46 %	+ 0.51 %

표 2. 1st order & 2nd order SSIM에 의한 오차 원인분석

실제 시공시에는 위에서의 시공 원인분석을 통하여, 다음단계의 오차를 예측함으로써 현재의 보정량을 계산할 때 미리 적용하여 보정치를 구하게 된다.

4.2 케이블 장력보정에 의한 처짐오차 보정

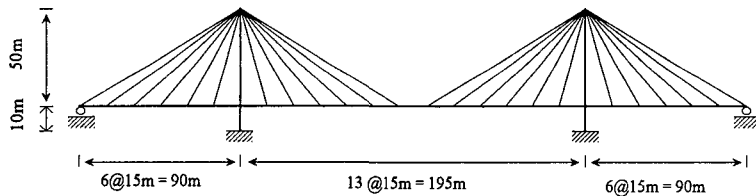


그림 6. 케이블 장력보정 예제

중양경간 195 m, 양 지간 90 m의 3경간 사장교의 장력보정을 수행하였다. 본예제는 케이블이 각각 3개가 설치될 때 1차 예측 보정을 하고, 최종단계의 key segment가설 전에 2차의 보정을 수행하였다. 각 보정시 가설된 거더의 처짐과 케이블의 장력을 계속치로 하여 장력 보정을 수행한다. 예측시스템을 적용한 경우는 1차 보정시 최종단계의 결과를 예측하여 현재의 원인분석 결과를 함께 고려하여 보정을 수행한다. 그림 7은 예측을 하지않고 장력 보정만을 한 경우, 예측을 함께해서 보정한 경우의 최종단계에서의 처짐과 케이블의 장력값의 오차를 나타내고 있다.

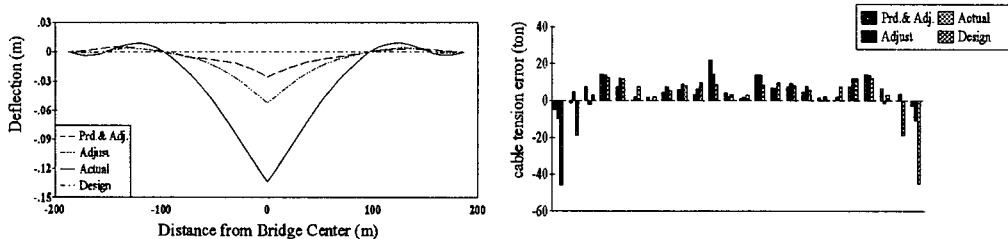


그림 7. 케이블 장력보정 결과

장력보정에 의한 최종 처짐은 그림 7에서 보듯이 상당한 처짐의 개선효과를 보임을 알 수 있었다. 또한, 예측을 통해 보정을 한 경우 최종단계에서 매우 우수한 처짐조정을 할 수 있음을 보였다.

4.3 최종 단계 key segment 가설작업 조정

사장교의 시공에 있어서 최종단계의 key segment의 leveling 작업을 계측보정 시스템을 통하여 보정을 하였다. 최종단계 key seg. 가설전에 중앙의 양단 각각 3개와 사장교 양끝단 각각 2개 씩의 케이블을 이용하여 처짐보정을 하였다. 그림 8에서 서로 단차가 지어진 key seg. 연결부가 매우 정확히 leveling 됨을 보여주고 있다. 그림 9는 계측보정 시스템의 post processor를 통하여 거더의 해석결과를 나타내고 있다. Post processor를 시공명령어에 따라 각 시공단계의 해석 결과 및 장력보정, 예측의 결과들을 나타낼 수 있다.

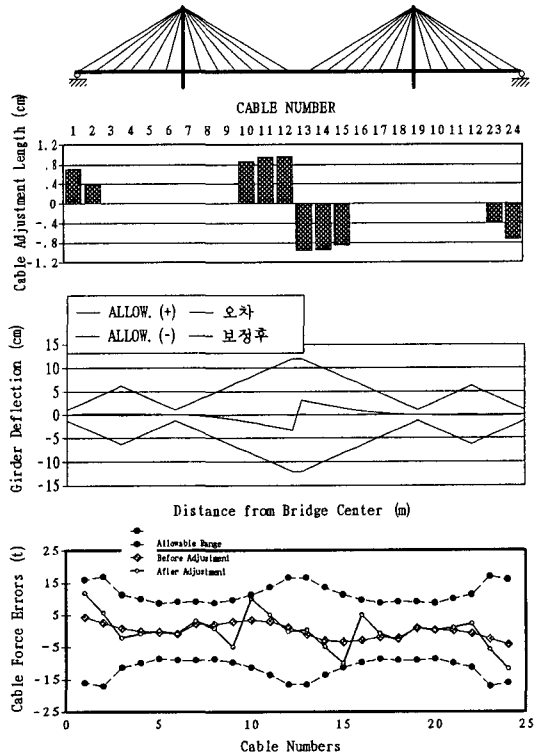


그림 8. 최종단계 key segment 집합 조정

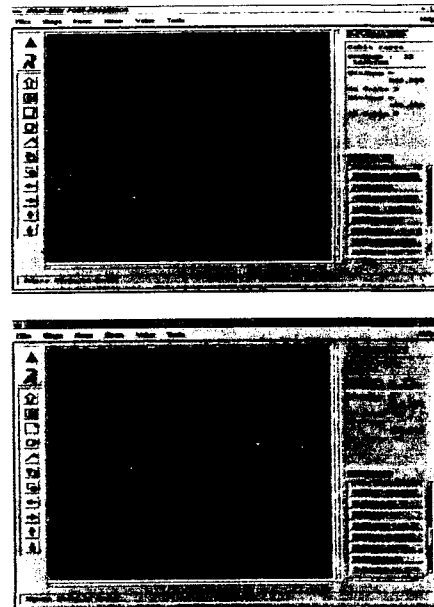


그림 9. Post processor를 통한 output

5. 결론

본 논문은 System Identification을 이용한 장력보정 시스템이 사장교의 시공중의 처짐과 케이블 장력보정을 체계적이고 효율적으로 관리할 수 있음을 보였다. 오차원인분석은 각 error mode의 linear superposition에 의한 System Identification과 error mode의 2차 term까지 고려한 2nd order System Identification 기법을 소개하였고 특히 2nd order System Identification 기법은 매우 정확히 오차원인을 분석을 할 수 있음을 보였다. 임의의 시공단계에서의 장력보정은 계측데이터를 측정하여 설계치와 비교하여 시공오차를 구하고 이 오차에 대한 오차요인을 선정하여 원인분석을 통한 장력보정을 수행하게 된다. 장력보정시 현단계의 오차만을 이용하여 보정하는 방법과 원인분석을 통해서 다음단계의 오차를 예측하여 이를 반영해서 보정을 하는 방법이 가능하다. 다음단계의 오차를 예측하여 보정하는 방법이 가장 우수한 처짐과 장력보정을 할 수 있음을 보였다. 이상의 오차원인분석, 장력보정 및 예측 시스템을 통해서 사장교의 시공중 거더의 처짐과 케이블의 장력을 체계적이고 효율적으로 관리할 수 있음을 보였다.

6. 참고 문헌

- [1] W. J. Kim, "A Study on the Static and Dynamic Spatial Behaviour of Prestressed Concrete Bridges Considering Construction Stages", *Ph.D. thesis*, Seoul Nat'l Univ., 1989.
- [2] Hyundai Institute of Construction Technology, "Development of Structural Analysis and Construction Management System for Composite Cable-stayed Bridges", *Research Report No. 93STR03*, 1993.
- [3] Hiroshi Tanaka and Masahiro Kamei, "Cable Tension Adjustment by Structural System Identification", *proc. of Int. conf. on cable-stayed bridges*, Bangkok, Nov. 18-20, 1987.
- [4] R.T. Haftka, "Second-order Sensitivity Derivatives in Structural Analysis", *AIAA 82-4295, Technical Notes*, Dec. 1982, pp 1765 - pp 1776.
- [5] Howard M. Adelman, et., al., "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems", *AIAA J.*, Vol. 24, No. 5, May 1986, pp 823 - pp 832.
- [6] L.A. Schmit and K.J. Chang, "Optimum Design Sensitivity Based on Approximation Concepts and Dual Methods", *IJNME*, Vol. 20, 1984, pp 39 - pp 75.