

적응적체눈세분화를 위한 변절점 평면 쉘 요소 Variable-node-flat shell element for adaptive mesh refinement

최창근*
Chang-Koon Choi

이완훈**
Wan-Hoon Lee

ABSTRACT

A variable-node-flat shell element designated as CLS which has variable mid-side nodes with drilling freedom has been presented in this paper. The shell element to be applied in finite element analysis has been developed by combining a membrane element named as CLM with drilling rotation d.o.f. and plate bending element. The combined shell element possess six degrees of freedom per node. By introducing the variable-node elements which have physical midside nodes, some difficulties associated with imposing displacement constraints on irregular nodes to enforce interelement compatibility in common adaptive h -refinement on quadrilateral mesh are easily overcome. Detailed numerical studies show the excellent performance of the new shell elements developed in this study.

1. 서론

곡면의 형상을 가지는 일반적인 쉘구조물을 유한요소를 이용하여 수치해석을 수행할 경우 사각형요소를 이용하여 모델링을 할 수 있으며, 실제로 아치형 댐 혹은 원통모양의 형태를 가지는 쉘 구조물 등의 문제에 지금까지 사각형 평면 쉘 요소가 많이 이용되어 왔다. 이러한 방법은 수학적인 측면 보다는 물리적인 의미에서, 연속인 곡면의 거동양식은 크기가 작은 평면요소로 적절히 모델링 하게 되면 충분히 표현될 수 있다는 가정에서 부터 시작된다. 직관적으로, 사각형 평면 쉘 요소를 이용한 구조물의 모델링에서 사용되는 요소의 크기가 작아지게 되면 보다 정확하게 구조물의 형태를 표현할 수 있을 것이고, 또한 좋은 해석결과를 얻을 수 있을 것이다. 실제로 많은 구조해석 문제에 있어서 평면 쉘 요소를 이용하여 적절한 수치해석의 결과를 얻을 수 있고, 보 또는 트러스 부재가 쉘 구조물에 연결된 경우 곡면 쉘 요소보다 쉽게 모델링 할 수 있는 장점을 가진다.

변절점요소는 일반적으로 구조물의 기하학적 형상이나 집중하중등의 영향으로 응력집중 현상이 발생될 경우 국부적으로 체눈을 세분화할 때 크기가 서로다른 요소를 연결하기 위해서 사용되거나 또는 서로다른 차수의 요소를 연결하기 위해서 사용된다. 본 연구에서는 첫번째 목적의 적응적 체눈세분화의 변이영역에 이용될 수 있는 5절점, 6절점 및 7절점의 변절점 평면 쉘 요소 CLS를 구성하였다. CLS 요소는 회전자유도를 가진 변절점 평면응력요소 CLM과 변절점 평판 휨 요소를 결합하여 구성되었으며 따라서 절점당 6개의 자유도를 가진다.

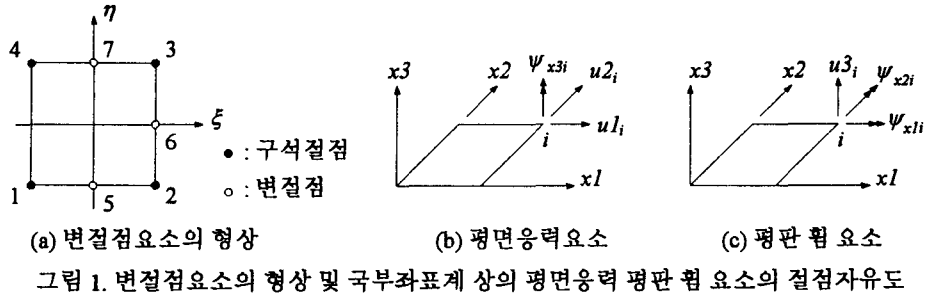
개발된 요소는 일련의 기본적인 검증을 통하여 거동의 타당성을 확인하였으며 국부체눈 세분화한 예제를 통하여 거동을 살펴보았다.

2. 변절점 평면 쉘 요소

본연구에서 개발하고자 하는 CLS 변절점 사각형 평면 쉘 요소는 그림 1(a)에서 살펴볼 수 있듯이 요소변에 변절점을 가진다. 미소변형이론에서 면내거동과 면외거동은 서로 독립적이므로 평면 쉘 요소의 강성행렬은 평면응력요소와 평판 휨 요소의 강성행렬을 단순조합하여 구성된다. 국부좌표계상에서의 평면응력요소와 평판 휨 요소의 절점자유도는 그림 1(b) 및 (c)와 같다.

* 한국과학기술원 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정



2.1 회전자유도를 가진 변질점 평면응력요소(CLM)

회전자유도를 가진 평면응력요소에 대한 필요성은 보요소 같이 회전자유도를 가진 요소와 접하도록 구조물을 모델링할게될 경우 발생한다. 여기서 회전자유도란 요소의 평면에 수직인 축에 대한 회전자유도를 의미한다.

회전자유도를 가지는 평면응력요소에 적용되는 분할근사를 위한 mixed 형태의 변분방정식은 식 (1)과 같다.

$$0 = \int_{\Omega} (\text{symm } \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{symm } \nabla \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \text{skew } \boldsymbol{\tau}^T \cdot (\text{skew } \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}) d\Omega + \int_{\Omega} (\text{skew } \nabla \mathbf{v}^T - \boldsymbol{\omega}^T) \cdot \text{skew } \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \gamma^{-1} \int_{\Omega} \text{skew } \boldsymbol{\tau}^T \cdot \text{skew } \boldsymbol{\alpha} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega. \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{W}$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{T}$ 는 각각 직선변위, 회전변위 그리고 응력의 영역을 의미하며 매개변수 γ 는 전단계수와 동일한 값으로 가정한다.

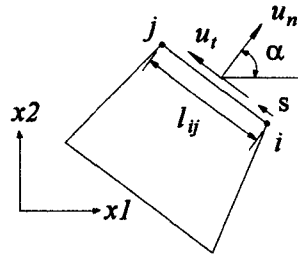


그림 2. 회전자유도를 가진 사각형요소

식(1)의 mixed 형태의 변분방정식을 그림 2의 유한요소영역 $\mathbf{V}^h, \mathbf{W}^h, \mathbf{T}^h$ 에 적용할 때 응력의 skew-symmetric은 요소내에서 일정한 것으로 가정한다.

$$\text{skew } \boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_0^e \quad (2)$$

독립회전변위장은 요소내부에 비연속성을 가지는 식(3)으로 가정된다.

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\psi}_i \quad (3)$$

여기서

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) - \frac{1}{2}(N_j + N_k), \quad N_k = \frac{1}{2}(1 + |\xi_k| |\xi_k \xi - |\eta_k| |\eta|)(1 + |\eta_k| |\eta_k \eta - |\xi_k| |\xi|),$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad j = \text{aint}(1/i) * 4 + i + 3; \quad k = i + 4 \quad (4)$$

존재하지 않는 변의 절점에 대한 형상함수는 영의 값을 가진다 ($N_5=0, N_6=0, N_7=0$).
회전자유도를 가지는 변절점 평면응력요소의 형상함수는 Allman의 변위장 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^n NIS_i \Delta \mathbf{u}_i \mathbf{t}_{ki} + N_0 \Delta \mathbf{u}_0 \\ + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{8} (l_{ki} NIS_i \mathbf{n}_{ki} - l_{ji} NFS_i \mathbf{n}_{ji}) \boldsymbol{\psi}_i + \sum_{j=5}^n \frac{1}{8} l_{op} NS_i \mathbf{n}_{op} \boldsymbol{\psi}_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $l_{ij}, \mathbf{n}_{ij} = \langle \cos \alpha \quad \sin \alpha \rangle^T$ 그리고 $\mathbf{t}_{ij} = \langle -\sin \alpha \quad \cos \alpha \rangle^T$ 는 절점 I 와 J 사이에 위치하는 요소변의 길이와 요소 외부방향 수직단위벡터 및 접선방향벡터이다.

$$\mathbf{n}_{ij} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} \end{Bmatrix}, \mathbf{t}_{ij} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha_{ij} \\ \cos \alpha_{ij} \end{Bmatrix}, l_{ij} = ((x1_j - x1_i)^2 + (x2_j - x2_i)^2)^{1/2} \quad (6)$$

식 (5) 과 (6) 및 이하 내용에서 사용된 첨자는 포트란 언어의 표현방식을 이용하면 식(7)과 같다.

$$j = \text{mod}(i, 4) + 1; k = i - 1 + 4 \times \text{aint}(1/i); o = i - 4; p = i - 3; 0 \leq n \leq 7 \quad (7)$$

식 (5)에서의 serendipity 형상함수는 다음과 같이 정의된다.

1) 4 절점요소

$$\begin{aligned} NIS_i = NFS_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2); \quad i = 1, 3 \\ NIS_i = NFS_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta_i \eta); \quad i = 2, 4 \\ NS_5 = NS_6 = NS_7 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

2) 5 절점요소 - 4 절점요소에서 NFS_1, NLS_2 과 NS_5 의 함수가 대체된다.

$$NFS_1 = \frac{1}{2}(\xi - \xi)(1 + \xi)(1 - \eta), \quad NIS_2 = \frac{1}{2}(\xi + \xi)(1 - \xi)(1 - \eta), \quad NS_5 = -\xi(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (9)$$

3) 6 절점요소 - 5 절점요소에서 NFS_2, NLS_3 과 NS_6 의 함수가 대체된다.

$$NFS_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(\eta - \eta)(1 + \eta), \quad NIS_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(\eta + \eta)(1 - \eta), \quad NS_6 = -(1 + \xi)\eta(1 - \eta) \quad (10)$$

4) 7 절점요소 - 6 절점요소에서 NFS_3, NLS_4 과 NS_7 의 함수가 대체된다.

$$NFS_3 = \frac{1}{2}(\xi + \xi)(1 - \xi)(1 + \eta), \quad NIS_4 = \frac{1}{2}(\xi - \xi)(1 + \xi)(1 + \eta), \quad NS_7 = \xi(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (11)$$

식(5)의 변위장에 추가된 bubble 방정식은 다음과 같다.

$$N_0 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (12)$$

변위변형률의 symmetric 항은 다음과 같이 표현된다.

$$\text{symm } \nabla \mathbf{u} = \mathbf{B}'_i \mathbf{u}_i + \mathbf{G}'_i \boldsymbol{\psi}_i + \mathbf{R}'_i \Delta \mathbf{u}_i \quad (13)$$

여기서 \mathbf{u}_i , $\boldsymbol{\psi}_i$ 그리고 $\Delta \mathbf{u}_i$ 는 직선변위장, 회전변위장과 요소변의 접선방향의 거동에 추가되는 비적합변위를 나타내는 매개변수를 의미한다. 식 (13)의 \mathbf{B}'_i 행렬은 식 (14)와 같다.

$$\mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} N_{i \times x1} & 0 \\ 0 & N_{i \times x2} \\ N_{i \times x2} & N_{i \times x1} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq 7 \quad (14)$$

회전자유도와 관계를 가지는 변형률 행렬의 형태는 식(15) 및 (16)과 같다.

$$\mathbf{G}_i^* = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (l_{ki} \cos \alpha_{ki} NIS_{i,x1} - l_{yi} \cos \alpha_{yi} NFS_{i,x1}) \\ (l_{ki} \sin \alpha_{ki} NIS_{i,x2} - l_{yi} \sin \alpha_{yi} NFS_{i,x2}) \\ (l_{ki} \cos \alpha_{ki} NIS_{i,x2} - l_{yi} \cos \alpha_{yi} NFS_{i,x2}) \\ + (l_{ki} \sin \alpha_{ki} NIS_{i,x1} - l_{yi} \sin \alpha_{yi} NFS_{i,x1}) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

$$\mathbf{G}_i^* = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} l_{op} \cos \alpha_{op} NS_{i,x1} \\ l_{op} \sin \alpha_{op} NS_{i,x2} \\ l_{op} \cos \alpha_{op} NS_{i,x2} - l_{op} \sin \alpha_{op} NS_{i,x1} \end{bmatrix} \quad i = 5, 6, 7 \quad (16)$$

그리고 요소변의 접선방향으로 추가된 비적합모드와 관련된 항은 식(17)과 같다.

$$\mathbf{R}_i^* = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_{ki} NIS_{ki,x1} \\ \cos \alpha_{ki} NIS_{ki,x2} \\ -\sin \alpha_{ki} NIS_{ki,x2} + \cos \alpha_{ki} NIS_{ki,x1} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 7 \quad (17)$$

해석결과의 수렴성을 보장하기 위하여 비적합변위형 및 회전자유도와 관련을 가지는 식(15), (16) 그리고 (17)의 변형률 행렬은 수정을 가하여 \mathbf{G}^* 와 \mathbf{R}^* 대신 $\bar{\mathbf{G}}^*$ 와 $\bar{\mathbf{R}}^*$ 를 사용한다.

변위변형률행렬의 skew-symmetric항은 식(18)로 정의된다.

$$skew \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}_i^* \mathbf{u}_i + \mathbf{g}_i^* \boldsymbol{\psi}_i + \mathbf{r}_i^* \Delta \mathbf{u}_n \quad (18)$$

여기서

$$\mathbf{b}_i^* = \langle -\frac{1}{2} N_{i,x2}; \frac{1}{2} N_{i,x1} \rangle \quad 1 \leq i \leq 7 \quad (19)$$

그리고

$$\mathbf{g}_i^* = [-\frac{1}{16} (l_{ki} \cos \alpha_{ki} NIS_{i,x2} - l_{yi} \cos \alpha_{yi} NFS_{i,x2}) + \frac{1}{16} (l_{ki} \sin \alpha_{ki} NIS_{i,x1} - l_{yi} \sin \alpha_{yi} NFS_{i,x1}) - N_i] \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (20)$$

$$\mathbf{g}_i^* = [-\frac{1}{16} l_{op} \cos \alpha_{op} NS_{i,x2} - \frac{1}{16} l_{op} \sin \alpha_{op} NS_{i,x1} - N_i] \quad i = 5, 6, 7 \quad (21)$$

또한

$$\mathbf{r}_i^* = [-\sin \alpha_{ki} NIS_{ki,x2} + \cos \alpha_{ki} NIS_{ki,x1}] \quad i = 1, \dots, 7 \quad (22)$$

변분방정식 (1)의 첫번째 항은 식 (23)로 표시할 수 있는 요소의 강성행렬을 의미한다.

$$\mathbf{K}_m^* = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^* \bar{\mathbf{G}}^* \bar{\mathbf{R}}^*]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}^* \bar{\mathbf{G}}^* \bar{\mathbf{R}}^*] d\Omega \quad (23)$$

식(1)의 두번째 항은 식(24)으로 표기된다.

$$\mathbf{h}^* = \int_{\Omega^e} \langle \mathbf{b}^*; \mathbf{g}^*; \mathbf{r}^* \rangle^T d\Omega \quad (24)$$

앞에서 나타낸 표기법을 이용하여, 분할근사를 위한 mixed 형태의 변분방정식은 행렬의 형태로 식(25)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^* & \mathbf{h}^* \\ \mathbf{h}^{*T} & -\gamma^{-1}\Omega^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \tau_0^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\psi} \\ \Delta \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

응력의 skew-symmetric 부분은 각요소에서 독립적으로 보간되기 때문에 식(25)에서 이에 해당하는 부분은 요소의 차원에서 제거되어 강성행렬은 식(26)과 같다.

$$\hat{\mathbf{K}}_m^* \mathbf{a} = \mathbf{f}; \quad \hat{\mathbf{K}}_m^* = \mathbf{K}_m^* + \frac{\gamma}{\Omega} \mathbf{h}^* \mathbf{h}^{*T} \quad (26)$$

식(26)의 강성행렬은 요소의 차원에서 비적합매개변수를 소거하기 위해서 정적응축을 행하며, 식(25)의 요소의 강성행렬 \mathbf{K}_m^* 와 \mathbf{h}^* 는 논의된 Allman 형태의 변위장을 이용하여 4절점 요소의 경우 3x3 수치적분으로 변절점 요소의 경우 수정된 가우스 적분법으로 산정된다.

2.2 변절점 평판 쉘 요소

Reissner-Mindlin 평판이론을 바탕으로 하는 평판 쉘 요소는 연직처짐변위장과 회전변위장을 별도로 가정하며 변위장은 C^0 연속성만 만족하면 되고 전단변형을 고려할 수 있다. 요소의 변에 변절점을 가지는 변절점 평판 쉘 요소에 적용되는, 요소의 내부에 불연속성을 가지면서 요소간의 적합성을 만족시키는 현상함수는 식 (4)와 같다.

일반적인 감절점 Mindlin 평판 쉘 등매개변수요소의 형상은 그림 3과 같고 변절점 평판 쉘 요소의 변위장은 식 (27)와 같이 정의된다.

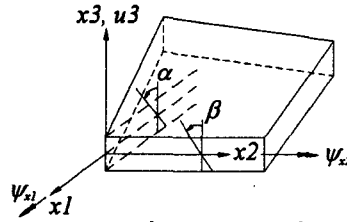


그림 3. Mindlin 평판

$$\mathbf{u} = \{u_3, \psi_{x1}, \psi_{x2}\}^T = \{u_3, \beta, \alpha\}^T \approx \mathbf{N} \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (27)$$

여기서 n은 요소의 절점 수, 평판이 x2-x3 축 상에 정의 되었을 때 u_3 은 평판의 수직방향 변위, α 는 평판의 x1-x3축 사이의 회전각, β 는 x1-x2 축 사이의 회전각이다. 평판의 곡률과 전단변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{x1} \\ \chi_{x2} \\ \chi_{x1x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{,x1} \\ -\beta_{,x2} \\ \alpha_{,x2} - \beta_{,x1} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_s^* \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{x3x1} \\ \gamma_{x2x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{x1} \\ \gamma_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{3,x1} + \alpha \\ u_{3,x2} - \beta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}_s^* \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (29)$$

여기서, $u_{3,x1}$ 는 편미분 $\partial u_3 / \partial x$ 을 의미하고 \mathbf{B}_s^* 는 쉘 변형률 행렬 그리고 \mathbf{B}_s 는 전단변형률 행렬을 의미한다.

정확한 전단변형률 행렬을 산정하기 위하여, 본 연구에서의 변절점 평판 쉘 요소에는 대체전단변형률장이 사용되었다. 사용된 대체전단변형률장은 4절점 요소에 적용할 수 있도록 제시된 Donca의 전단변형률장을 변절점 요소에 까지 확장하여 적용한 것이다.

평판 휨 요소의 강성행렬은 식(30)으로 부터 계산된다.

$$\mathbf{K}_p = \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i^* \mathbf{B}_i dV + \int_V \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j^* \mathbf{B}_j dV \quad (30)$$

그리고 등방성재료의 경우

$$\mathbf{D}_i^* = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_j^* = \frac{\Psi Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \frac{5}{6} \quad (31)$$

여기서 E 는 영계수, ν 는 포아슨비, t 는 평판의 두께 그리고 Ψ 는 전단보정계수이다.

평판 휨 요소의 강성행렬과 하중행렬을 계산하는데 있어 4절점요소의 경우 3x3 가우스 적분이 사용되며 변절점이 존재하는 경우 수정된 가우스 적분법이 적용된다.

3. 수치적분법

동태변수요소의 강성행렬 자연좌표 상으로 사상된 요소의 영역 ($-1 \leq \xi, \eta \leq +1$)에서 일반적인 가우스 적분법에 의해 산정되지만 본 연구의 변절점요소는 변절점이 존재하는 점을 중심으로 변위장의 미분치가 불연속을 이루므로 특이적분이 된다. 따라서 연속인 부영역별로 3x3 수치적분이 수행되어야 한다. 5절점요소의 경우에는 두개의 부영역이 생기지만 6절점 및 7절점과 동일하게 4개의 부영역으로 처리하였다. 수정된 가우스 적분을 위한 자연좌표계상의 적분점 및 가중치는 표1과 같다.

표 1 수정된 가우스 적분점 및 가중치

Point	ξ_i, η_i	Weight
1	-0.887298335	0.277777778
2	-0.500000000	0.444444444
3	-0.112701665	0.277777778
4	+0.112701665	0.277777778
5	+0.500000000	0.444444444
6	+0.887298335	0.277777778

4. 예제해석

새로이 구성된 변절점 평면 쉘 요소 CLS의 거동을 살펴보기 위해서 간단한 수치예제를 해석하였다. 요소거동의 기본적인 거동의 타당성을 검토하는 면내거동과 면외거동에 대한 조각시험 및 eigenvalue 시험에 대하여 CLS 요소는 모두 통과하였다.

Pinched cylinder

구조의 형태 및 재료의 성질이 그림 4와 같고 실린더의 중심에 집중하중 P 가 작용할 때, 실린더의 두께가 얇을 경우와 두꺼운 경우의 각각에 대하여 구조물의 1/8을 그림 6(a)와 (b)처럼 균일한 체눈으로 모델링한 것과 그림 6(c)와 (d) 처럼 국부적으로 체눈을 세분한 것에 대해 일련의 해석을 수행하였다. 결과는 표 2와 같다. 그리고 체눈이 세분화 됨에 따른 처짐 변위량의 수렴은 그림 8와 같다. 해석결과는 전단변형을 고려하지 않는 얇은 쉘 이론의 값과 비교하였다.

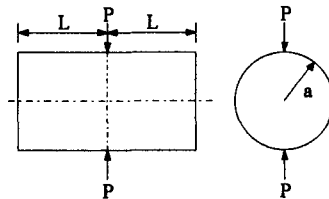


그림 4. Pinched cylinder $a=4.953$; $L=5.175$; $P=100$ or 0.1 ; $E=10e6$; $thick=0.094$ or 0.01548 ; $\nu=0.3125$

Folded plate

구조물의 형태 및 재료의 성질이 그림 5와 같고 중심에 집중하중 P가 가해진 접혀진 셸 구조물을 해석하였다 구조물의 대칭성을 고려하여 전체의 1/4 만을 그림 7과 같이 체눈을 형성하였다. 그림 7(a), (b)와 (c)는 균일한 체눈으로 그림 7(d)와 (e)는 하중이 가해진 점을 중심으로 극부체눈을 세분화한 것이다. 해석의 결과는 표 3과 같으며 해석결과의 수렴성은 그림 9에 나타낸 바와 같다. 비교 요소인 Q-19는 SAP IV에 내장된 평면 셸 요소이다.

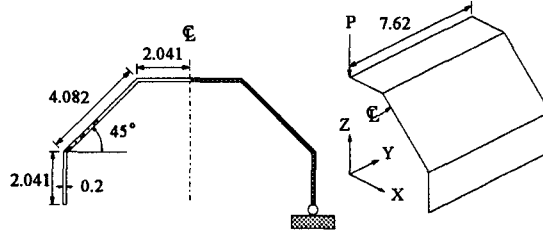


그림 5. Folded plate의 형태 $E = 3560.0$; $\nu = 0.45$; $P = 0.036$

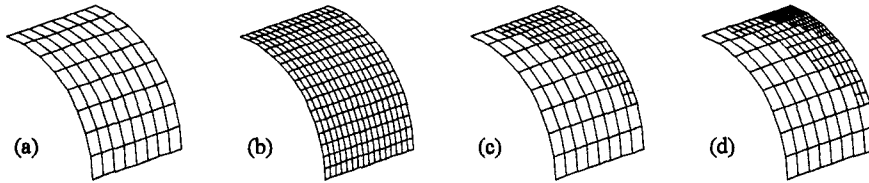


그림 6. Pinched cylinder의 해석체눈

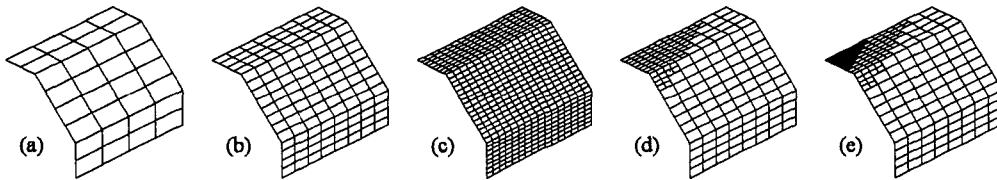


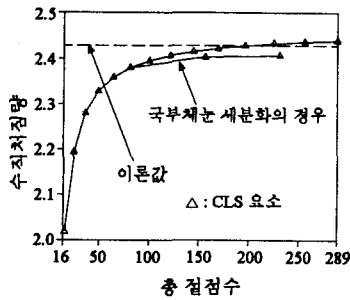
그림 7. Folded plate의 해석체눈

표 2. Pinched cylinder의 해석결과

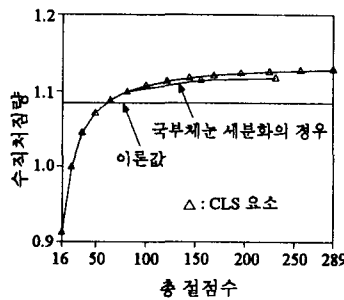
Mesh(node num.)	Thicker(*E-1)	Thinner(*E-2)
3 × 3(16)	0.9118	2.0182
4 × 4(25)	0.9986	2.1943
5 × 5(36)	1.0438	2.2801
6 × 6(49)	1.0704	2.3287
7 × 7(64)	1.0874	2.3593
8 × 8(81)	1.0987	2.3801
9 × 9(100)	1.1067	2.3951
10 × 10(121)	1.1125	2.4063
11 × 11(144)	1.1169	2.4150
12 × 12(169)	1.1202	2.4219
13 × 13(196)	1.1228	2.4275
14 × 14(225)	1.1249	2.4320
15 × 15(256)	1.1266	2.4358
16 × 16(289)	1.1280	2.4389
(c)	1.1138	2.4031
(d)	1.1166	2.4063
Thin shell theory	1.0838	2.4280

표 3 Folded plate 의 해석결과(*E-2)

Mesh, node num.	Q-19	CLS
(a), 32	1.91554	1.8896
(b), 128	1.92198	1.9275
(c), 512	1.92700	1.9402
(d), 158	-	1.9354
(e), 203	-	1.9391



(a) Thinner cylinder



(b) Thicker cylinder

그림 8. Pinched cylinder의 수렴도

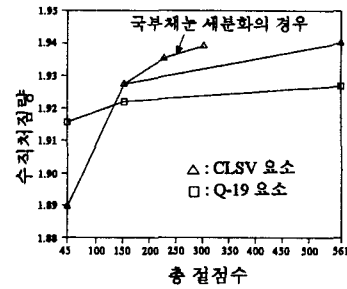


그림 9. Folded plate의 수렴도

5. 결론

본 연구에서는 3차원 쉘 구조물에서 집중하중이나 기하학적 형상으로 인하여 응력집중이 발생하는 영역의 국부채는 세분화에 이용될 수 있는 변절점 사각형 평면 쉘 요소 CLS를 개발하였다. 본 연구의 CLS 요소는 요소의 기본적인 거동에 대한 타당성을 검토할 수 있는 조각시험 및 eigenvalue 시험을 모두 통과하였으며, 예제 해석을 통하여 3차원 쉘 구조물의 적응적 체는세분화에 이용될 수 있음을 검토하였다. 또한 CLS 요소는 절점당 6개의 자유도를 가지므로 보요소 등과 같이 회전자유도를 가진 요소와 접할 경우 자연스러운 모델링이 가능하다.

참고문헌

1. Allman, D.J., 'A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity problems', *Comp. Struct.*, 19, 1-8, 1984.
2. Allman, D.J., 'A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems', *Int. j. numer. methods eng.*, 26, 717-739, 1988.
3. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
4. Choi, C.K. and Park, Y.M., 'Nonconforming Transition Plate Bending Elements with Variable Mid-side Nodes', *Computers and Structures, An International Journal*, Vol. 32, No. 2, 1989.
5. Choi, C.K., Park, Y.M., Seo, J.W. and Lee, W.H., 'Transition Elements in Plate/Shell Problems', *Proceedings of the Fourth Internal Conference and Exhibition on Civil and Structural Engineering Computing (CIVIL-COMP 89)*, London, England, Sept. 19-21, 1989.
6. Choi, C.K. and Park, Y.M., 'Transition plate bending elements for compatible mesh gradation', *J. Eng. Mech. ASCE*, 118, No. 2, 1992.
7. 최창근, 이완훈, 'Mixed 형태의 정식화에 기초한 회전자유도를 가진 변이평면요소', *전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제6권, 제 2집*, 8-15, 1993.
8. Donea, J. and Lamain, L.G., 'A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements', *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 63, 183-207, 1987.
9. Gupta, A.K., 'A finite element for transition from a fine to a coarse grid', *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 12, 35-45, 1978.
10. Hughes, T.J.R. and Brezzi, F., 'On drilling degrees of freedom', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 105-121, 1989.
11. Ibrahimbegovic, 'A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation', *Finite Elements in Analysis and Design*, 7, 167-179, 1990.
12. Reissner, E., 'A note on variational principles in elasticity', *Int. J. Solids Struct.*, 1, 93-95, 1965.
13. Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
14. Wilson, E.L., 'The static condensation algorithm', *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 8, 199-203, 1974.