

적응적 방법을 이용한 동적 유한요소해석

An Adaptive Procedure in Finite Element Analysis of Elastodynamic Problems

최 창근*
Choi, Chang-Koon

정 흥진**
Chung, Heung-Chin

ABSTRACT

An automated procedure which allows adaptation of spatial and time discretization simultaneously in finite element analysis of linear elastodynamic problems is presented. For dynamic problems having responses dominated by high frequency modes, such as those with impact, explosive, traveling and earthquake loads high gradient stress regions change their locations from time to time. And the time step size may need to vary in order to deal with whole process ranging from transient phase to steady state phase. As the sizes of elements in space vary in different regions, the procedure also permits different time stepping. In such a way, the best performance attainable by the finite element method can be achieved. In this study, we estimate both of the kinetic energy error and strain energy error induced by spatial and time discretization in a consistent manner. Numerical examples are used to demonstrate the performance of the procedure.

1. 서론

유한요소해석에 대한 경험이 적은 비전문가라도 효과적으로 신뢰할 수 있는 유한요소 모델링을 할 수 있도록 부분 및 전체적인 오차의 추정치를 근거로 사용자가 원하는 정확도를 만족시키는 유한요소 모델을 자동으로 생성시켜주는 방법이 적응적 유한요소법이다. 적응적 방법의 궁극적 목적은 신뢰할 수 있는 정확도의 해를 효과적인 방법으로 얻어내는데 있으며 이를 위해서는 신뢰할 수 있는 오차의 추정방법과 효율적인 오차의 제어방법이 필수적이다.

이 방법은 최근 선형 정적문제와 열전달문제등에 성공적으로 적용된 바 있지만 동적해석문제에 대해서는 문제의 복잡성때문에 적용에가 드문 형편이다. 즉, 정적유한요소해석에서와는 달리 동적유한요소해석에서는 공간영역의 분할에 의한 오차외에도 시간영역을 분할함으로써 인한 오차가 발생하게 된다. 본 연구에서는 공간적 분할오차 및 시간적 분할오차를 동시에 제어하는 새로운 적응적방법을 제시하였다.

2. 동적 유한요소해석에서의 분할 오차

유한요소해석에서 오차의 발생요인은 (1) 물리적 해를 간략화된 수식으로 표현함으로써 인한 수학적 모델링의 오차, (2) 재료, 기하 및 경계 조건등과 관련된 입력데이터의 불확실성에 따른 오차, (3) 연속체의 구조를 유한개의 요소로 표현함으로써 인한 공간적 세분화오차 및 (4) 하드웨어상의 반올림오차등이 있다. 여기에서 만약 시간영역(Time Domain)을 이용한 동적유한요소해석의 경우에는 (5) 시간에 따라 연속적으로 변하는 물리량의 변화를 각 시간단계의 사이에서 일정한 함수로 제한함으로써 생기는 시간적 분할오차가 추가된다. 이러한 오차들 중에서 적응적 해석에서 관심의 대상이 되는 오차는 공간적 및 시간적 분할오차이며 이 오차는 정확해와 유한요소해와의 차이로 정의되며 이를 정량적으로 나타내기 위하여 보통 에너지 놈(Norm)을 사용한다. 그러나 대부분의 공학적 문제의 경우 정확해를 안다는 것은 불가능하므로 오차를 추정하는 방법을 사용하게 된다. 오차추정의 방법에는 해석전 오차추정방법(*priori Error Estimation*)과 해석후 오차추정방법(*posteriori Error Estimation*)이 있다. 해석전 오차의 추정방법으로는 영역의 세분화에 따른 오차량의 수렴속도 및 상한값을 추정할 수 있고 해석후 오차의 추정방법에서는 해석후의 해의 분포 및 여러단계의 해석결과로부터 추정하게 된다. 동적해석문제의 경우 해석영역내의 에너지는 다음과 같다.

$$E(u, \dot{u}) = E_{strain}(u) + E_{kinetic}(\dot{u}) \quad (1)$$

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

즉, 총에너지는 변형에너지와 운동에너지로 나누어지며 이때 오차의 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(e, \dot{e}) = E_{strain}(e) + E_{kinetic}(\dot{e}) \quad (2)$$

$$= E'_{strain}(e) + E_{strain}^s(e) + E_{kinetic}'(\dot{e}) + E_{kinetic}^s(\dot{e})$$

여기서 위 첨자는 시간의 분할(t) 및 공간의 분할(s)에 의해서 생기는 오차의 에너지를 구별한다. 해석전 오차추정방법(priori Error Estimation)에서는 오차의 에너지는 다음과 같은 조건식을 만족한다.

$$E(e(t), \dot{e}(t))^{1/2} \leq c \left\{ h^{\nu} [\|u(0)\|_{k+1} + \|u(t)\|_{k+1}] + h^{\mu} \left[\|\dot{u}(0)\|_{k+1} + \|\dot{u}(t)\|_{k+1} + \int_0^t \|\ddot{u}(\tau)\|_{k+1} d\tau \right] \right\} \quad (3)$$

여기서 $\nu = k+1-m$ 이고 $\mu = \min\{k+1, 2(k+1-m)\}$ 이다. 이 식은 유한요소체논의 크기를 0으로 수렴시키면 오차의 크기도 0으로 수렴하며 체논의 크기뿐만 아니라 시간적분의 정확도도 오차에 영향을 미친다는 것을 의미한다. 따라서 공간적인 분할오차 뿐만 아니라 시간적인 분할오차를 동시에 제어해야 만이 원하는 정도의 정확도를 가지는 해를 구할 수 있다.

3. 시간분할오차($E'(e)$)의 적응적 제어

동적 해석을 위한 미분방정식 $M\ddot{u} + K\dot{u} + Cu = F$ 의 해는 대개의 경우 직접적분법(Direct Time Integration)으로 구하게 되는데 적분의 정확도 및 수렴성은 Time Step의 크기에 영향을 받는데 이 Time Step은 해석자의 경험이나 직관에 의해 문제의 성격을 참고하여 결정해야만 한다. 물론 명시적방법(Explicit Method)에 의한 해석에서는 해의 정확도 보다는 수렴성을 고려하여 Time Step의 크기를 결정하지만 묵시적방법(Implicit Method)에서는 안정성이 보장된 방법을 쓰는 경우에 요구되는 해의 정확도에 따라 Time Step의 크기를 결정하게 된다. 따라서 일반적으로 사용되는 묵시적 시간적분법인 Newmark Method나 Wilson Method를 사용하는 경우에는 Time Step의 크기를 조정함으로써 해의 정확도를 제어할 수 있다. 그러나 실제문제의 경우 시간해석영역에서 구조물의 감쇠효과나 하중강도의 변화가 존재하므로 모든 시간영역에서 같은 크기의 Time Step을 사용한다는 것은 매우 비효율적일 수가 있다.

본 연구에서는 직접적분법중에서 일반적으로 많이 사용되는 Newmark 방법을 이용하였다. 이 방법에서는 다음과 같은 가정을 사용한다.

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + [(1-2\beta)\ddot{u}_t + 2\beta\ddot{u}_{t+\Delta t}] \frac{\Delta t^2}{2} \quad (4)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1-\gamma)\ddot{u}_t + \gamma\ddot{u}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (5)$$

여기서 상수 β, γ 및 Δt 에 따라서 해의 정확도 및 수렴성이 달라진다. 만약 평균 가속도 방법($\beta=1/4, \gamma=1/2$, Constant Averagy Acceleration Method)을 사용할 경우 시간간격내에서의 가속도는 시간간격 양끝시각에서의 가속도의 평균값을 일정하게 유지한다고 가정하므로 연속적으로 변하는 실제 가속도와는 다르며 여기서 오차가 발생하게 된다. 이러한 오차는 수치적분기법상 피할 수 없는 것이므로 시간간격을 줄임으로서 줄일 수 있지만 해석의 경제성 및 효율성 측면에서 시간간격을 결정하여야 한다. 이 시간간격은 수치해석에 대한 전문가가 경험이나 직관에 의해 하중함수와 구조물의 특성을 고려하여 결정하고 대개의 경우 전 해석영역에서 일정하거나 혹은 효율성을 높이기 위해 몇개의 해석구간으로 나누어 다른 시간간격을 사용한다. 이 부분이 시간분할에 따른 오차를 평가하고 이에 따른 시간간격을 자동적으로 결정하는 적응적기법이 필요한 부분이라 할 수 있다. 그러나 동적문제에서 전 시간영역에서의 오차를 정확히 추정한다는 것은 매우 어렵다. 따라서 국지적 오차추정방법을 이용하여 각 시간단위별로 오차를 추정하여 적절한 Time Step을 구하였다. 적분시 가속도의 가정으로 인한 오차는 다음과 같다

$$\ddot{e}(\tau) = \ddot{u}^n - \ddot{u}^{ex}(\tau) \quad (6)$$

여기서 \ddot{u}^m 는 수치적으로 가정된 가속도이고 \ddot{u}^{ex} 는 연속적으로 변하는 가속도이다. 이 가속도에 대한 오차를 시간에 대하여 적분하면 속도 및 변위에 대한 오차를 추정할 수 있다. 즉, 속도에 대한 오차는

$$\dot{e}(\tau) = \int_t^{\tau} \ddot{e}(\tau') d\tau' , \quad \dot{e}(\Delta t) = \ddot{u}^m \Delta t - \int_t^{t+\Delta t} \ddot{u}^{ex}(\tau') d\tau' \quad (7)$$

이고 여기서

$$\ddot{u}^m = (1-\gamma) \ddot{u}_t + \gamma \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (8)$$

이며, 가속도의 경우는

$$e(\tau) = \int_t^{\tau} \dot{e}(\tau') d\tau' , \quad e(\Delta t) = \frac{\ddot{u}^{nd}}{2} \Delta t^2 - \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{\tau} \ddot{u}^{ex}(\tau') d\tau' d\tau \quad (9)$$

이고, 여기서

$$\ddot{u}^{nd} = (1-2\beta) \ddot{u}_t + 2\beta \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (10)$$

이다. 여기서 주목하여야 할 부분은 가속도에 대한 정확해를 알 수 없으므로 선형 또는 2차 함수등으로 가정하여야 하는데 선형으로 가정하는 경우는 속도에 대한 오차가 항상 0으로 계산되므로 평가되지 않고 β 가 1/6일 경우(linear acceleration method)에는 변위에 대한 오차마저도 평가 되지 않는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 가속도의 정확해를 부분적인 2차함수로 가정하고 그 계수들은 전단계의 가속도를 이용하여 결정하였다. 그리고 시간적분과정에서 속도 및 변위의 가정에서 사용된 가속도의 분포가 각각 다르므로 오차의 평가시 이를 고려하였다. 구해진 오차의 추정값은 다음과 같이 에너지 norms의 형태로 나타내어 질 수 있다.

$$\|e\|^e = \left(\frac{1}{2} \dot{e}^T M \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K e \right)^{1/2} \quad (11)$$

이 추정된 오차의 에너지 norms의 정확도를 검증하기 위하여 정확해를 알고 있는 1자유도 문제에 적용하여 비교하였다. 한편 위에서 구한 오차의 추정값은 한 시간단계에 대한 부분오차이며 전 해석시간에 대한 전체오차는 각 부분오차를 더함으로써 대략적으로 구할 수 있다.

각 시간단위에서 추정한 오차량은 사용자가 정의한 오차의 범위에 들어야 하며 이를 벗어나는 경우에는 전 단계로 되돌아가서 Time Step을 조정한 후 다시 계산하여야 한다 즉 다음의 조건식을 만족하여야 한다.

$$\gamma_1 \varepsilon_i \|u\| \leq \|e\|^e \leq \gamma_2 \varepsilon_i \|u\| \quad (12)$$

여기서 ε , γ_1 , γ_2 은 각각 시간분할오차의 허용상대값, 상한값, 하한값이고 사용자의 정의에 따라 결정되며 총 에너지 norm, $\|u\|$ 은

$$\|u\| = \left(\frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} + \frac{1}{2} u^T K u \right)^{1/2} \quad (13)$$

이다. 적용적 방법의 효율성을 높이기 위하여 총에너지norm은 해석구조물이 현 해석시각까지 경험한 최대 에너지 norm을 사용하였다. 만약 평가된 오차값이 조건식(12)을 만족하지 않으면 시간간격을 현재 오차량과 허용값의 관계를 이용하여 다시 정하게 되는데 Newmark적분법에서 해석영역전체오차의 수렴속도는 $O(\Delta t^2)$ 이고 따라서 국지오차의 수렴속도는 $O(\Delta t^3)$ 이므로 만약 현재의 Time Step을 Δt 라고

하고 오차의 허용치($\|e^a\|^e$)에 해당하는 Time Step을 Δt^a 이라 하면

$$\|e\|^e \cong C_1 \Delta t^3 , \quad \|e^a\|^e \cong C_2 (\Delta t^a)^3 = \varepsilon_i \|u\| \quad (14)$$

이고 $C_1 = C_2$ 라고 가정하면

$$\Delta t' = \left(\frac{\varepsilon_t \|u\|}{\|e\|^r} \right)^{1/3} \Delta t \quad (15)$$

이다. 만약 국지적 오차의 추정에서 변위오차만을 고려하여 오차량을 변형에너지만으로 표현한다면 운동하는 구조물의 오차에너지는 심하게 변하는 것으로 평가될 수 있기 때문에 변형에너지와 함께 속도오차를 고려하는 운동에너지의 오차량도 함께 고려하는 것이 실제적이라 할 수 있다. 실제문제의 해석에 있어서 Time Step의 크기를 바꾸게 되면 묵시적방법(Implicit Algorithm)의 특징상 Effective Stiffness Matrix와 Effective Force Vector를 다시 구성해야 하므로 너무 자주 Time Step을 바꾸는 것은 좋지 않다. 본 연구에서는 연속적으로 변하는 가속도를 부분적인 2차 함수로 가정함으로써 속도에 대한 오차량도 평가가 가능하게 하였다.

4. 공간분할오차($E'(e)$)의 적응적 제어

진동수가 큰 모드에 영향을 받게되는 충격하중에 의해 발생한 급격한 경사를 갖는 응력파의 전달해석이나 기하학적, 재료적특이성에 의해 응력의 급격한 변화가 있는 부분을 가지는 구조물의 동적해석에서는 공간분할오차의 제어에 기초한 적응적 방법의 적용이 특히 효율적이다. 즉 응력의 분포가 변하거나 하중작용위치가 변할 경우 또는 기하학적 조건으로 해의 특이성이 존재하는 부분의 유한요소 체눈을 재구성함으로써 효율적으로 정확한 해를 구해주는 것이다. 시간적분을 하는 경우 유한요소의 체눈을 재구성한 후 이전단계의 물리량(변위, 속도, 가속도)들을 새로구성된 유한요소체눈에 선형사상하여야 된다. 선형사상에는 사상오차가 수반되며 때로는 이 사상오차가 제어하려는 오차량보다도 더 클경우가 발생할 수도 있으므로 너무 급격하거나 빈번한 체눈의 재구성은 바람직하지 않다.

공간적 분할오차에서 속도오차의 전체오차에 대한 기여는 변위오차에 비하여 매우적으므로 무시할 수 있는데 이는 Zeng과 Wieberg에 의해 증명된 바 있다.[2] 즉, 총오차의 에너지는 근사적으로 다음과 같다.

$$E(e, \dot{e}) \cong E_u'(e) + E_v'(e) + E_\sigma'(e) \quad (16)$$

공간분할오차에서 변위오차 및 이로 인한 응력오차는 다음과 같이 정의된다.

$$e_u = u - \bar{u}, \quad e_\sigma = \sigma - \bar{\sigma} \quad (17)$$

여기서 $u, \sigma, \bar{u}, \bar{\sigma}$ 는 각각 변위 및 응력의 정확해, 유한요소해를 나타낸다.

이 오차를 적응적 방법에 적용하려면 정량적으로 표현되는 오차척도가 있어야 하는데 시간분할오차의 경우와 마찬가지로 에너지 norms을 사용하였고 실제로 각 요소별로 평가되므로 전체 해석영역에서의 오차의 에너지 norms은 다음과 같이 구한다.

$$\|e\|^r = \left(\sum_{i=1}^m (\|e_i\|^r)^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

여기서 m 은 해석영역의 총 유한요소 수이다. 각 요소별로 오차의 에너지 norms을 평가하는 방법은 여러가지가 있으나 실제적으로 적용이 가능한 응력의 후처리기법(Post-processing Technique)을 이용하였다. 즉, 후처리 된 응력을 σ^p 라 하고 이를 정확해라고 가정하면 각 요소에서의 오차의 에너지 norms은

$$\|e_i\|^r = \left(\int_{\Omega} (\sigma^p - \bar{\sigma})^T D^{-1} (\sigma^p - \bar{\sigma}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (18)$$

이 된다. D 는 재료강성행렬을 나타내며 이 오차의 에너지 norms은 다음 조건식을 만족하여야 한다.

$$\gamma_1 \varepsilon_s \|u\| \leq \|e\|^r \leq \gamma_2 \varepsilon_s \|u\| \quad (19)$$

여기서 ε_s 는 공간분할오차의 허용상대값이며 이 식을 만족하지 않으면 체눈을 다시 구성하여야 한다. 해석영역내에서 모든 요소가 동일한 오차값을 가지는 최적체눈은 기존 체눈의 일부를 오차값에 따라 2개이상의 체눈으로 나누거나 여러 요소를 합치는 세분화기법(Refining and Coarsening Technique)이나 기존의 체눈을 무시하고 전체체눈을 다시구성하는 체눈재구성기법(Remeshing Technique)으로 구할 수

있다. 최적체눈을 구성하기 위해 체눈을 변화시키면 변화된 체눈의 절점에서의 물리량들을 기존체눈의 물리량에서 선형사상의 방법으로 구해야 하므로 체눈이 급격히 변하는 체눈재구성기법을 사용하면 사상오차를 유발하여 신뢰도를 떨어 뜨리는 요인이 될 수 있다. 본 연구에서는 기존체눈의 변화를 최소화 하면서 최적체눈을 구성하는 체눈세분화 기법을 사용하여 선형사상오차를 최소화 하였다. 새로 생긴 절점의 물리량(변위, 속도, 가속도)들은 주변에 있는 기존체눈의 물리량들의 분포를 형상함수를 이용하여 선형사상하여 구하였다.

최적체눈이 형성되었을 때 사용자가 정한 허용 상대오차 범위에 들기위한 요소별 오차의 에너지가 $\|e_c\|$ 라면

$$\|e_c\| = \frac{\varepsilon_s \|u\|}{\sqrt{m}} \quad (20)$$

이다. 공간분할오차의 수렴속도는 형상함수의 차수가 p 일때 $O(h^p)$ 이므로, 임의요소 k 의 크기를 h_k 라 하고 이 요소의 오차가 허용오차에 들었을 때의 크기를 h_k^a 라 하면

$$h_k^a = \left(\frac{\|e_c\|^s}{\|e_k\|^s} \right)^{\frac{1}{p}} h_k \quad (21)$$

이다. 여기서 구한 체눈의 새로운 크기를 이용하여 기존의 체눈을 나누거나 합하여 새로운 최적 체눈을 구성하는 것이다.

5. 적응적 해석 알고리즘

본 연구에서는 (식12)과 (식19)로 정의 되는 조건식에 의해서 체눈과 Time Step의 크기를 조절하여 사용자가 정한 정확도의 해를 구한다. 구체적인 알고리즘은 (그림 1)에 나타내었다.

6. 예제 해석

(예제 1) 시간분할오차의 추정방법에 대한 검증

본 연구에서 제안한 시간분할오차추정방법을 검증하기위하여 정확해를 알고 있는 1자유도 문제를 해석하였다. Newmark방법에 의한 시간 t_n 에서의 변위 및 속도를 각각 u_n^N, \dot{u}_n^N 이라하고, 시간 t_n 에서 t_{n+1} 까지 적분할 때 정확해에 의한 변위 및 속도의 오차는

$$e_{ex} = u_{n+1}^N - u(t_{n+1}), \quad \dot{e}_{ex} = \dot{u}_{n+1}^N - \dot{u}(t_{n+1}) \quad (22)$$

이고 여기서 $u(t_{n+1}), \dot{u}(t_{n+1})$ 는 u_n^N, \dot{u}_n^N 를 초기조건으로 해석적 방법으로 구한 정확해이다.

SINE함수를 하중함수, $f(t) = p \sin \omega t$ 로 정하고 다음과 같은 특성치를 갖는 1자유도 모델 (그림 2)을 해석하였다.

$$m=1, k=6, c=0.19596, p=1, \omega=1$$

Time Step의 크기는 0.05, 0.1, 0.2로 정하여 각각에 대하여 해석을 수행한 후 오차의 추정치와 정확해에 의한 오차와 비교하였다. (그림 3, 4, 5)는 변위 및 속도의 오차 추정치와 정확해에 의한 오차를 Time Step의 크기별로 비교한 것이고 (그림 6)는 유효지수(Effectivity Index)를 이용하여 에너지의 오차를 비교한 것이다.

변위오차는 매우 정확하게 추정하는 것을 알 수 있고 속도오차의 경우는 변위오차의 추정치보다는 덜 정확하지만 시간간격에 따라 정확해에 의한 오차에 수렴하는 안정된 결과를 보임을 알 수 있다. 그리고 적응적 방법에 적용되는 에너지의 오차는 비교적 정확하게 추정됨을 알 수 있다.

(예제 2) 시간 및 공간의 적응적 분할에 의한 오차의 제어

본 연구에서 제안한 적응적 알고리즘의 효율성을 살펴보기 위하여 1차원 유한요소로 이루어진 구조물(그림 7)에 충격하중이 작용하는 문제에 대하여 해석하였다. 이 구조물은 탄성계수가 10.0, 단면적이 10.0, 단위 질량이 5.0, 감쇠계수가 0.02 이고 하중함수로 $f(t) = 5.0 \sin^2 8\pi t$ 를 사용하였으며

편의상 단위는 생략하였다. 시간 및 공간분할오차에 대하여 동시에 적응적 방법을 사용한 경우(ST11)와 시간 및 공간분할오차중 하나만 고려한 것(ST10, ST01), 그리고 기존의 해석방법(ST00)을 이용한 경우등 4가지 경우에 대하여 해석을 하였고 이를 (표 1)에 나타내었다. γ_1, γ_2 는 각각 1.5와 0.5를 사용하였다. (그림 8, 9)는 각각의 경우에 하중작용점의 변위를 나타낸 것이고 (그림 10)은 ST11의 경우 시간 및 공간분할오차의 상대값을 나타낸 것이다. (그림 11)은 Time Step 크기의 시간별 변화를 나타내고 (그림 12)는 체논의 시간별 변화를 도시한 것인데 응력의 진행에 따라 체논의 밀도가 높은 부분이 따라 이동함을 알 수 있다.

7. 결론

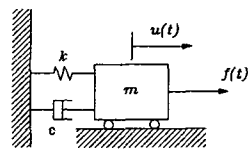
- 새로운 시간분할오차의 추정법을 제시하였고 예제해석을 통해 이의 효율성을 살펴보았다.
- 시간분할 오차의 추정에서 속도오차를 평가함으로써 공간분할오차와의 일관성을 확보하였다.
- 공간분할오차 및 시간분할오차를 동시에 적응적으로 제어 함으로써 기존의 동적유한요소해석보다 효율적으로 해를 얻을 수 있었다.
- 본 연구에서 제시한 알고리즘은 2차원 및 3차원 문제에 변형없이 적용될 것이라 생각된다.

8. 참고 문헌

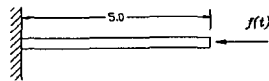
1. Yue-Cong Wang, Viriyawan Murtri, and Somasundaram Valliappan, " Assessment of the accuracy of the newmark method in transient analysis of wave propagation problems", *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol. 21, 1992, pp. 987-1004.
2. L. F. Zeng and N.-E. Wiberg, " Spatial mesh adaptation in semidiscrete finite element analysis of linear elastodynamic problems" , *Comput.mech.*, Vol. 9, 1992, pp. 315-332.
3. O. C. Zienkiewicz and Y. M. Xie, " A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis", *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol. 20, 1991, pp. 871-887.
4. N.-E. Wiberg and X. D. Li, " A post-processing technique and an a posteriori error estimate for the Newmark method in dynamic analysis", *Earthquake eng. struct. dyn.*, Vol. 22, 1993, pp. 465-489.

표1 해석 조건

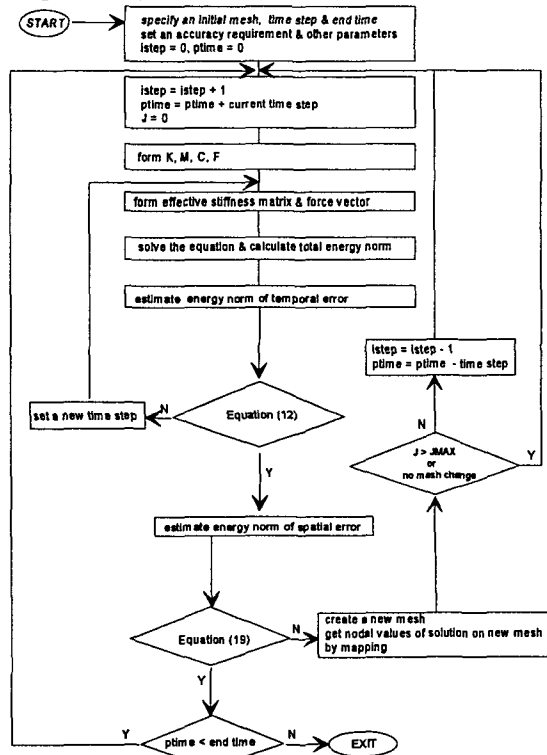
	ϵ_s	ϵ_t	Δt_i	N_i	CPU TIME
ST11	0.005	0.005	0.01	19	60.03
ST01	-	0.005	0.01	50	108.80
ST10	0.005	-	0.05	19	44.43
ST00	-	-	0.01	50	404.04



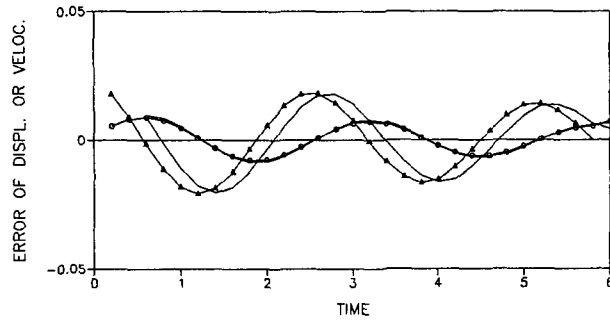
(그림 2) 1자유도 문제



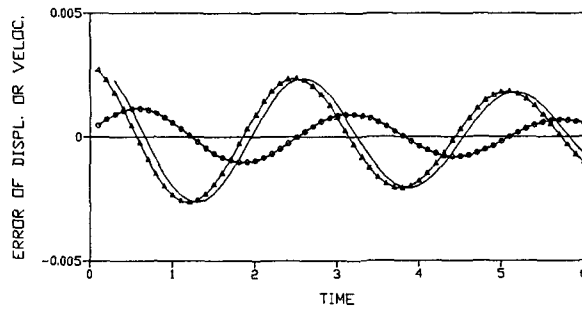
(그림 7) 1차원 막대 구조물



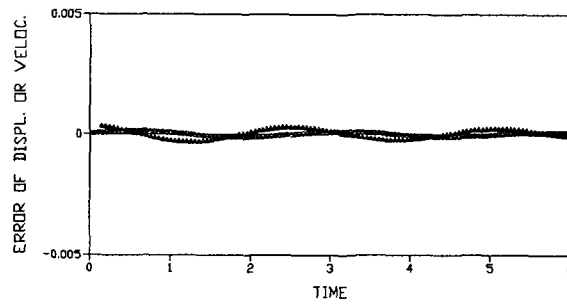
(그림 1) 적응적 해석 알고리즘



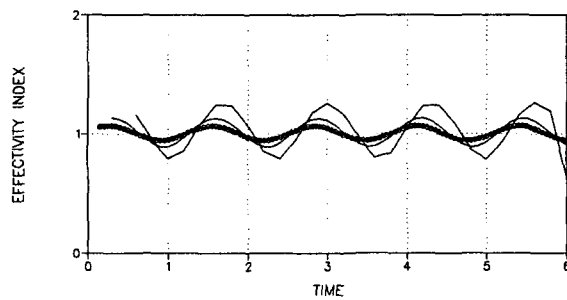
(그림 3) Time Step의 크기가 0.2일 때 변위 및 속도의 정확해에 의한 오차량과 추정치와의 비교



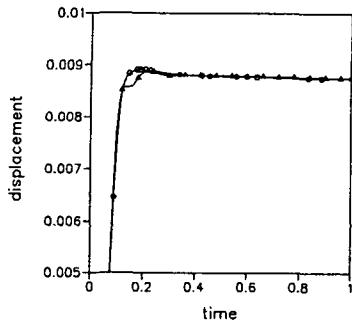
(그림 4) Time Step의 크기가 0.1일 때 변위 및 속도의 정확해에 의한 오차량과 추정치와의 비교



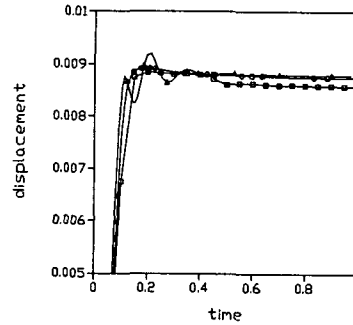
(그림 5) Time Step의 크기가 0.05일 때 변위 및 속도의 정확해에 의한 오차량과 추정치와의 비교



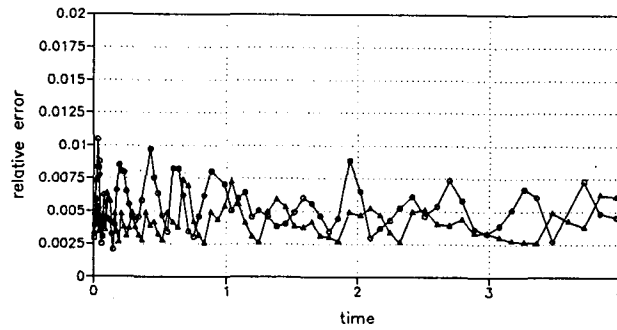
(그림 6) 사용된 Time Step별 에너지 오차량의 유효지수



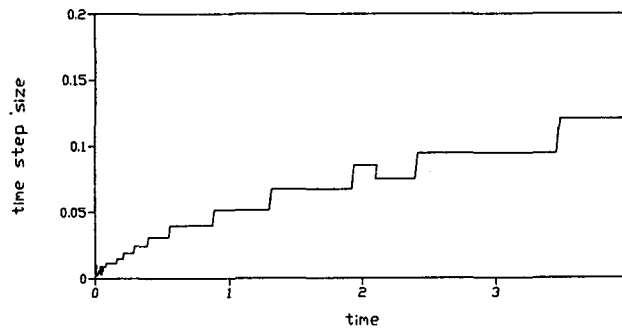
(그림 8) ST11(circle) 와 ST00(tri.)의 변위



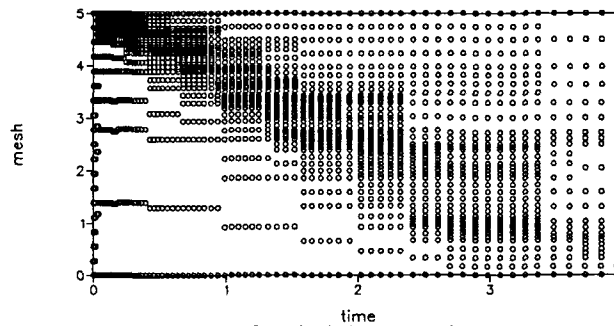
(그림 9) ST11(circle), ST01(tri.), ST10(sq.)의 변위



(그림 10) 시간분할오차와 공간분할오차의 상대값 변화 (ST11의 경우)



(그림 11) Time Step의 크기 변화 (ST11의 경우)



(그림 12) 메쉬의 변화 (ST11의 경우)