콘크리트의 이방성 손상-소성 모델

Anisotropic Continuum Damage-Plastic Model for Concrete

변 근 주[1), 송 하 원[2), 이 기 성[3), 김 종 우[4)

K.J. Byun, H.W. Song, K.S. Lee, J.W. Kim

ABSTRACT

The growth and propagation of microcracks existed in concrete cause failure of concrete. This is called "damage". The concepts of two principles, equivalent strain principle and equivalent energy principle, are reviewed and compared in the case of uniaxial compression to concrete. The damage evolution law and constitutive equation are derived by using the Helmholz free energy and the dissipation potential by means of the thermodynamic principles.

1. 서론

콘크리트나 암반과 같은 재료들에서 나타나는 하중-변형의 비선형성은 재료의 내부구조 변화 때문에 발생하며 내부구조의 변화는 두가지 기구로 대별할 수 있다. 하나는 소성이며 다른 하나는 미세공극이나 미세균열의 생성과 성장 및 전파에 의한 것이다. 콘크리트 파손의 주된 원인은 이들 내부에 존재하는 미세균열때문에 발생하며 소성론을 근거로한 콘크리트의 재료모델은 미세균열의 전파를 묘사하기에는 한계를 가지므로 미세균열의 영향을 고려할 수 있는 새로운 재료모델이 필요하다.

2. 에너지 등가 원리

연속체 손상역학은 Kachanov 와 Rabotnov에 의한 유효응력개념을 근간으로 하여 여기에 열역학의 비가역 과정을 다루는 열역학 제 2 법칙을 이용하므로써 재료의 거동에서 발견되는 현상에 대해 내적변수를 정의하므로 재료의 거동을 모형화하게 된다.

M을 손상상태를 나타내며 공칭응력을 유효응력으로 변환시키는 텐서라고 하면 공칭응력과 유효응력 사이의 관계를 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{\sigma} = M(D) : \sigma \tag{1}$$

여기서 $\bar{\sigma}$를 유효응력이라 하고 D는 손상변수로써 Murakami(1987)는 다음과 같이 표현하였다.

$$D = \sum_{i=1}^{3} D_i \, n_i \otimes n_i \tag{2}$$

(i=1,2,3 for principal directions)

손상특성텐서 $M(D)$를 행렬로 나타내면 식(3)과 같다.

1) 연세대학교 토목공학과 교수
2) 연세대학교 토목공학과 조교수
3) 한국전력기술 토목구조처 선임기술원
4) 연세대학교 토목공학과 석사과정

$$M(D)=\begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-D_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

손상된 상태의 재료를 손상되지 않은 상태로 변환할 수 있는 원리로는 Lemaitre가 제안한 변형률 등가 원리와 Sidorff가 제안한 에너지 등가원리를 들 수 있다. 변형률 등가원리는 공칭응력을 받는 손상상태의 변형률은 유효응력을 받는 손상되지 않은 상태의 변형률과 같다는 것으로 이것을 식으로 표현하면 식(4)와 같다.

$$\varepsilon^e = E^{-1} : \bar{\sigma} = E^{-1} : M : \sigma \quad (4)$$

여기서 E는 초기탄성텐서이다.

지금까지의 콘크리트에 대한 손상모델들(Krajcinovic 와 Fonseka (1981), Ishikawa 등 (1985), Mazars (1985, 1992), Yazdani 와 Shreyer (1988), Suaris 등 (1990), Ju (1987, 1989), Abu-Lebdeh 와 Voyiadjis(1993))은 변형률 등가 원리를 따라 개발되었으나 여기서는 에너지 등가원리를 이용한 손상모델을 개발하였다.

에너지 등가원리는 손상된 재료에 대한 탄성에너지는 에너지 공식에서 공칭응력이 유효응력으로 대치되는 것을 제외하고는 손상되지 않은 재료의 에너지와 같다고 하여 원리를 식으로 표현하면

손상된 재료에 대하여

$$W^e(\sigma,0) = \frac{1}{2}\sigma^T : E^{-1} : \sigma \quad (5)$$

손상되지 않은 재료에 대하여

$$W^e(\sigma, D) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^T : E^{-1} : \bar{\sigma} = \frac{1}{2}\sigma^T : M^T : E^{-1} : M : \sigma \quad (6)$$

식(6)로 부터 변형률을 구하면 식(7)과 같다.

$$\varepsilon^e = \frac{\partial W^e(\sigma, D)}{\partial \sigma} = M^T : E^{-1} : M : \sigma = \bar{E}^{-1} : \sigma \quad (8)$$

Ishikawa 등(1985)은 일축압축에 대한 손상모델에서 최대응력시의 변형률에 대한 변형률의 비로 손상변수의 전개를 표현하였는데 이와 유사하게 최대변형률(ε_u)에 대한 변형률(ε)의 비로

$$d = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \quad (9)$$

와 같이 손상변수의 전개를 정의하여 식(4)와 (8)에 대입하면 그림1과 같이 두 원리의 차이를 볼 수 있다.

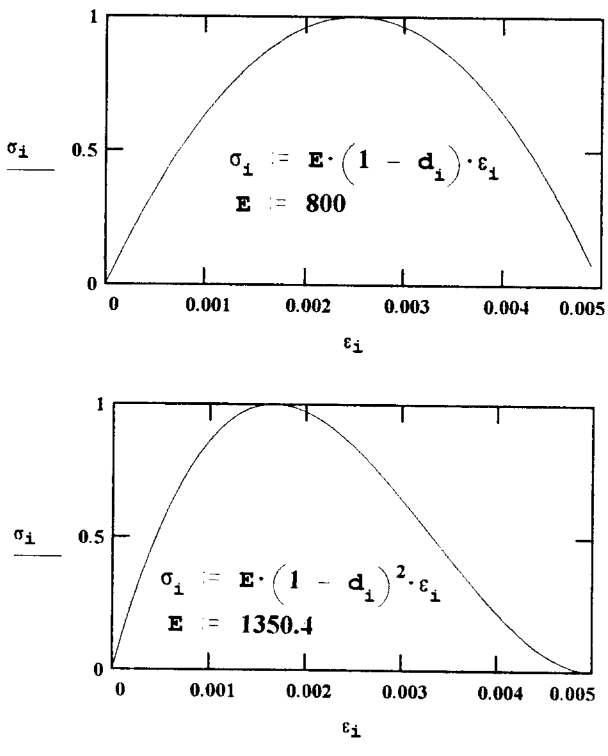

그림 1. 일축압축 응력-변형률 곡선

또한 콘크리트는 압축에는 강하지만 인장에는 약한 거동을 보이는 취성재료 이므로 인장에 의해서만 미소균열이 발달하여 손상이 발생한다고 볼 수 있다. 따라서 응력텐서의 성분중 인장응력성분만 손상에 작용시킬 수 있다. 이러한 방법을 Ortiz(1985)가 투영법을 이용하여 제안하였다.

3. 열역학과의 관계

일반적으로 물리적 과정에서 나타나는 상태변수(state variables)에 의한 함수로 표현되는 상태 포텐셜은 상태법칙과 함께 상태변수와 연관된 연관변수(associated variables)를 정의한다. 손상변수에 대해서도 손상된 탄성 포텐셜로 부터 에너지 손상 기준을 유도하게 된다.

온도가 일정한 경우 재료의 상태 포텐셜로 Helmholtz 자유에너지를 식(10)과 같이 탄성에너지, 소성에너지 및 손상에너지의 성분으로 가정할 수 있다.

$$\rho\psi(\varepsilon^e, D, q, \beta) = W^e(\varepsilon^e, D) + \psi_p(q) + \psi_d(\beta) \tag{10}$$

여기서 $\psi_p(q)$와 $\psi_d(\beta)$는 각각 유효소성변형률(q)에 관한 소성에너지와 손상계수(β)에 관한 손상에너지를 나타낸다.

변형률과 응력의 관계와 같이 손상변수 D에 대한 연관변수 Y를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{E}}{\partial D} : \varepsilon^e : \varepsilon^e \\ &= -\varepsilon^e : M^{-1} : E : \frac{\partial M^{-T}}{\partial D} : \varepsilon^e \end{aligned} \tag{11}$$

Y는 손상이 발생하면 재료가 강성을 상실하게 되므로써 해방된 에너지의 의미를 갖는다.

열역학 제2법칙을 나타내는 Clausius - Duhem 부등식을 식(12)와 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma\dot{\varepsilon} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \tag{12}$$

자유에너지 식(10)중 손상에 의한 에너지만을 식(12)에 대입하면

$$-Y\dot{D} \geq 0 \tag{13}$$

를 얻으며 Clausius-Duhem 부등식을 만족시키는 조건은 다음과 같다.

$$\dot{D} \geq 0 \tag{14}$$

한편 자유에너지 식(10)중 탄-소성에너지 부분을 식(12)에 대입하면 감소된 소산부등식

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - R\dot{q} \geq 0 \tag{15}$$

를 얻으며 여기서 R는 소성연관변수이며 주어진 항복면에 대해 최대소성소산이 일어난다는 가정으로 부터 소성흐름법칙과 하중조건을 포함한 소성식을 얻는다.

4. 손상-소성모델

Y의 2차 불변량을 이용하여 손상면을 식(16)과 같이 정의할 수 있다.

$$f_d(Y, B) = Y_d^{1/2} - [B_o + B(\beta)] \tag{16}$$

여기서

B_o = 초기손상치

$$B(\beta) = \frac{\partial \psi_d(\beta)}{\partial \beta}$$

$$Y_d = \frac{1}{2} Y : J : Y$$

J = 대칭의 상수텐서.

흐름법칙에 의한 직교법칙으로 부터 손상변수의 증분을 얻을 수 있다.

$$dD = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial Y} \tag{17}$$

손상면의 적합조건은

$$df_d = \frac{\partial f_d}{\partial Y}:d\,Y + \frac{\partial f_d}{\partial B}:\frac{\partial B}{\partial \beta}:d\beta = 0 \quad (18)$$

식(18)로 부터 λ_d를 얻는다.

$$\lambda_d = \delta \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y}:d\,Y}{\frac{\partial f_d}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial \beta}\frac{\partial f_d}{\partial B}} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \delta > 0, \text{ if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y}:d\,Y > 0 \\ \delta = 0, \text{ if } f_d < 0, \\ \quad \text{or if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y}:d\,Y \le 0 \end{cases} \quad (20)$$

증분형태의 응력-변형률 관계는

$$\begin{aligned} d\sigma &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^e \, \partial \varepsilon^e} : d\varepsilon^e \\ &+ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^e \, \partial D} : dD \\ &= \overline{E}: d\varepsilon^e + \overline{F}: dD \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\overline{F} = 2\,M^{-1}:E:\frac{\partial M^{-T}}{\partial D}:\varepsilon^e \quad (22)$$

손상에너지해방률의 증분은

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon^e}:d\varepsilon^e + \frac{\partial Y}{\partial D}:dD \\ &= \overline{F}: d\varepsilon^e + \overline{G}: dD \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\overline{G} = \varepsilon^e : \frac{\partial M^{-1}}{\partial D} : E : \frac{\partial M^{-T}}{\partial D} : \varepsilon^e \quad (24)$$

손상변수의 증분을 다시 나타내면

$$dD = N:\overline{F}: d\varepsilon^e + N:\overline{G}: dD \quad (25)$$

여기서

$$N = \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y}}{\frac{\partial f_d}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial \beta}\frac{\partial f_d}{\partial B}} \quad (26)$$

이 되며 정리하면 다음과 같다.

$$dD = \frac{N:\overline{F}}{(I - N:\overline{G})} : d\varepsilon^e \quad (27)$$

여기서 I는 단위텐서이다.

식(27)을 식(21)에 대입하면 손상 접선계수를 얻는다.

$$d\sigma = \overline{K}\, d\varepsilon^e \quad (28)$$

여기서

$$\overline{K} = \overline{E} + \overline{F}\frac{N:\overline{F}}{I - N:\overline{G}} \quad (29)$$

소성의 영향을 고려하기 위하여 항복면을 식(30)와 같이 정의한다.

$$f_p(\sigma, D, q) = \overline{\sigma}_d^{\,1/2} - [R_o + R(q)] = 0 \quad (30)$$

여기서

$$\overline{\sigma}_d = \overline{s} : \overline{s}$$

$$\overline{s}_{ij} = \overline{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\, \overline{\sigma}_{kk}$$

R_o = 초기소성치

$$R(q) = \lambda_p \frac{\partial \Psi_p(q)}{\partial q}$$

변형률증분을 탄성과 소성 성분으로 구분하면

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (31)$$

식(28)로 부터

$$d\sigma = \overline{K}\,(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (32)$$

을 얻으며 적합조건식

$$\begin{aligned} df_p &= \frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\,\overline{K}(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial D}\,\overline{Q}(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \\ &+ \frac{\partial f_p}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial q}\,dq = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

으로부터 소성 흐름법칙($\varepsilon_p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma}$) 에서 소성변형률의 크기를 나타내는 계수 λ_p를 식(34)와 같이 구할 수 있다.

$$\lambda_p = \frac{\left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\overline{K} + \frac{\partial f_p}{\partial D}\overline{Q}\right):d\varepsilon}{\left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\overline{K}\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_p}{\partial D}\overline{Q}\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} - H^p\frac{\partial f_p}{\partial R}\gamma\right)} \tag{34}$$

여기서

$$\overline{Q} = \frac{N:\overline{F}}{I - N:\overline{G}} \tag{35}$$

$$H^p = \frac{\partial R}{\partial q} \tag{36}$$

$$\gamma = \frac{dq}{\lambda_p} \tag{37}$$

따라서 증분상태의 응력-변형률 관계는 식(38)로 유도된다.

$$d\sigma = \overline{H}\ d\varepsilon \tag{38}$$

여기서 $\overline{H}$는 손상-소성을 고려한 접선계수가 된다.

$$\overline{H} = \overline{K} - \frac{\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\overline{K} + \frac{\partial f_p}{\partial D}\overline{Q}\right)\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\right]}{\left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}\overline{K}\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_p}{\partial D}\overline{Q}\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} - H^p\frac{\partial f_p}{\partial R}\gamma\right]} \tag{39}$$

유도된 식(39)를 이용하여 콘크리트의 요소에 적용한 예는 참고문헌 11에 나타내었으며 단조하중뿐아니라 반복하중을 받는 콘크리트의 거동을 개선되게 표현하는 손상면과 항복면에 대한 연구와 유한요소해석 프로그램 작성을 통한 구조부재에 대한 연구가 진행중에 있다.

5. 결론

손상된 상태와 손상되지 않은 상태의 관계를 정의하는 원리중 에너지 등가원리를 이용하였고 열역학 법칙으로부터 자유에너지함수와 소산포텐셜을 가정하여 이차텐서로 나타낸 손상-소성모델의 전개법칙과 손상 및 소성을 고려한 구성방정식을 유도하였다.

6. 참고문헌

1. Krajcinovic, D. and Fonseka, G.U., "The continuous damage theory of brittle materials," Journal of applied mechanics, Vol.48, Dec. 1981, pp.809-824.
2. Ishikawa, M., Yoshikawa, H., and Tanabe, T., "The constitutive model in term of damage tensor," Finite element analysis of reinforced concrete structures (proceedings), Tokyo, Japan, May 1985, pp.93-103.
3. Mazars, J., "A model of a unilateral elastic damageable material and its application to concrete'" Proceedimgs of RILEM Int. Conf. Fracture Mechanics of Concrete, Lausanne, Switzerland, 1985.
4. Ramtani, S., Berthaud, Y., and Mazars, J., "Orthotropic behavior of concrete with directional aspects: modelling and experiments," Nuclear Engineering and Design 133, North-Holland, 1992, pp.97-111.
5. Yazdani, S. and Schreyer, H.L., "An anisotropic damage model with dilatation for concrete," Mechanic of Materials 7, North-Holland, 1988, pp.231-244.
6. Suaris, W., Ouyang, C., and Fernando, V.M., "Damage model for cyclic loading of concrete," Journal of Engineering Mechaincs, Vol.116, No.5, May 1990, pp.1020-1035.

7. Simo, J.C. and Ju, J.W., "Strain- and stress-based continuum damage models-I. Formulation," Int. Journal of Solids and Structures, Vol.23, No.7, 1987, pp.821-840.
8. Ju, J.W., "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects," Int. Journal of Solids and Structures, Vol.25, No.7, 1989, pp.803-833.
9. Abu-Lebdeh, M. and Voyiadjis, G.Z., "Plasticity-damage model for concrete under cyclic multiaxial loading," Journal of Engineering Mechanics, Vol.119, No.7, July 1993, pp.1465-1484.
10. Ortiz, M, "A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete," Mechanics of Materials 4, 1985, pp.67-93.
11. 이기성, 변근주, "이방성 손상모델을 이용한 콘크리트 구성방정식의 도출," 대한토목학회 논문집, 1994년 7월호 (게재예정)