

B-스플라인 노트벡터 값 변화에 의한 곡선 형상 변화 예측

The forecast of curve shape reforming by variation of B-spline knot vector values

김 회 중*, 정 재 현

(한국해양대학교 대학원 기계공학과*, 한국해양대학교 기계공학과)

Kim H. Joong, Jeong J. Hyun

Abstract

B-spline curves and surfaces are effective solutions for design and modelling of the freeform models. The control methods of these are using with control points, knot vectors and weight of NURBS. Using control point is easy and resonable for representation of general models. But the movement of control points bring out the reformation of original convex hull.

The B-splines with nonuniform knot vector provide good result of the shape modification without convex hull reforming. B-splines are constructed with control points and basis functions. Nonuniform knot vectors effect on the basis functions. And the blending curves describe the priorities of knot vectors. Applying of these, users will forecast of the reformed curves after modifying controllable primitives.

key words: B-spline curve(B-스플라인 곡선), convex hull(컨벡스 헬), control point(제어점), nonuniform knot vector(비정형 노트벡터), basis function(원리함수), blending curve(혼합곡선)

1 서론

B-스플라인 형상은 제어 점으로 연결된 제어 다각형이 구성하는 컨벡스 헬 내에서 형상이 구현된다. 사용자는 제어 점을 이용하여 형상을 생성하고 수정할 수 있다. 그리고 제어 점의 이동에 따른 컨벡스 헬 내의 형상 변화를 예측할 수 있다. B-스플라인 형상을 수정하는 일반적인 방법은 이러한 제어 점 조절이다. 그러나 제어 점의 이동은 컨벡스 헬을 변형시킨다. 변형 범위를 고정하고 정밀하게 형상을 수정하는 경우에는 제어 점 이동에 의한 형상 예측이 쉽지 않다. 이에 반하여 노트벡터는 컨벡스 헬 변형 없이 형상을 수정할 수 있다. 노트벡터의 이용은 제어 점의 이동보다 쉽게 형상 변화를 예측할 수 있도록 한다.

B-스플라인 곡선은 고유 원리함수와 제어 점에 의해 형상이 구현된다. 때문에 B-스플라인 곡선 형상을 파악하기 위해서는 원리함수의 파악이 우선적으로 필요하다. 원리함수의 구성 요소는 제어 점의 수 $n+1$, 곡선 차수 k 그리고 노트벡터 값 x 이다. 이 요소들은 최소 x

$= n + k + 1$ 의 관계를 가지며 상호 영향을 미친다.

B-스플라인 곡선은 다양한 노트벡터의 배열을 가진다. 가장 일반적인 것으로 동일 간격 배열을 가지는 uniform 노트벡터와 양끝이 차수만큼 반복되면서 동일 간격 배열을 가지는 open uniform 노트벡터가 있다. 그리고 배열이 불규칙적인 nonuniform 노트벡터가 있다. Nonuniform 노트벡터는 다른 노트벡터에 비하여 구현이 까다로운 단점이 있으나, 다양한 형상 제어 능력을 제공한다. 이러한 노트벡터를 이용한 B-스플라인 형상 제어는 제어 점에 의한 형상 조절에 추가로 다양한 제어 기법을 제공한다.

본 연구는 B-스플라인 형상 제어 시스템 개발에 있어, 형상 제어 기법으로서 B-스플라인 곡선을 다룬다. 이를 위해서 먼저 nonuniform B-스플라인 형상을 생성할 수 있는 라이브러리를 구축한다. 그리고 B-스플라인 곡선의 원리함수 변화를 분석하여 제어 점, 노트벡터 그리고 원리함수의 상호관계를 파악한다. 이를 이용하여 노트벡터에 의한 형상 변화 예측의 유용함을 확인한다.

2. B-스플라인 원리함수와 노트벡터

$n+1$ 개 컨트롤 포인트 $P(t)$ 와 B-스플라인 원리함수 $N_{i,k}$ 로 구성된 B-스플라인 곡선 $C(t)$ 는 다음 식으로 나타내어진다.

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i N_{i,k}(t) \quad (1)$$

$$t_m \leq t \leq t_{\max}, 2 \leq k \leq n+1$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+1,k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \quad (2)$$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{그 외} \end{cases}$$

x_i 는 $x_i \leq x_{i+1}$ 인 노트벡터이며 $N_{i,k}(t)$ 는 (x_i, x_{i+1}) 구간에서 제어된다. 식(2)는 de Boor-Cox 재귀 알고리즘을 이용하여 증명된다¹. 곡선 식(1)은 다음 특징들을 가진다.

- 곡선 계수에 대한 제어 점 수의 제약이 없다.
- 회전, 이동, 확대 축소에 대한 형상이 보존된다.
- 제어 점에서의 정확한 음셋 생성이 가능하다.
- 스펜 추가와 분할시 세그먼트 연속성이 유지된다.
- rational 표현으로 단면곡선을 정확하게 표현한다.

B-스플라인 곡선을 구현하기 위한 대부분의 프로그래밍에서 uniform 노트벡터를 다루고 있다. Uniform 노트벡터는 제어 다각형의 시작과 끝에서 곡선이 떨어지게 되므로, open uniform 노트벡터를 이용하면 제어 다각형에서 곡선 형상이 시작하고 끝나게 된다. 하지만 미리 사용될 곡선의 차수를 고정하여 형상의 식을 계산하면, 제어 점의 입력만으로 형상을 간단히 구현할 수 있다. Uniform 노트벡터는 nonuniform 노트벡터에 비하여 계산이 간단하고 결과가 양호하므로 많은 설계 시스템에서 사용되어 왔다.

그러나 매우 복잡한 형상을 구현하면서 변형의 크기가 작아야 할 경우는 nonuniform 노트벡터에 의한 형상 제어가 유용하다. 또한 NURBS를 구현하기 위해서는 nonuniform 노트벡터의 처리가 필수적이다.

3. B-스플라인 혼합곡선의 생성

노트벡터의 사용은 B-스플라인을 다른 자유형상 생성

기법과 구별되게 한다. 또한 노트벡터의 조절로 B-스플라인 곡선은 이전의 다른 자유형상도 구현할 수 있다. 이러한 노트벡터는 B-스플라인 곡선 식에서 원리함수에 영향을 미치게 된다.

노트벡터는 각 매개변수 값에 대한 원리함수 식(2)를 계산한다. B-스플라인 원리함수는 매개변수 t 와 노트벡터 x_i 값으로 이루어진 재귀함수로 계산에 있어 많은 시간이 걸린다. 때문에 시스템의 속도 저하를 방지하기 위해서는 부수적인 입출력 부분을 간결히 처리할 필요가 있다. 또한 차수 및 노트벡터의 배열을 고정하는 경우가 많으나, 이것은 B-스플라인의 형상 제어 특성, 특히 노트벡터의 배열 조정에 의한 형상 제어의 유연성을 잃게 한다.

B-스플라인 형상 생성 라이브러리는 임의 차수와 노트벡터가 적용이 가능하도록 원리함수를 구현하고, 혼합곡선과 B-스플라인 형상을 작성하는 모듈을 포함한다. Fig. 1은 원리함수와 혼합곡선을 출력하기 위한 루틴이다.

```

procedure Bspline_basisfunction;
  var i, value: real;
begin
  for i:=0 to n do
    for t:=0 to 1 do
      if t == 0 then
        moveto(device, t, basisfunction(i, k, t));
      else
        lineto(device, t, basisfunction(i, k, t));
      end if;
    end;
  end;

  function basisfunction(var i, k, t: real): real {
    var denom1, denom3, denom2, denom4: real;
    begin
      if k > 1 then
        denom1 := Knot[i+k-1] - Knot[k];
        if denom1 <> 0 then
          denom3 := (Knot[i]-t)*basisfunction(i,k-1,t)/denom1;
        else
          denom3 := 0;
      end if;
      if denom2 <> 0 then
        denom4 := (Knot[i+k]-t)*basisfunction(i+1,k-1,t)/denom2;
      else
        denom4 := 0;
      end if;
      basisfunction := denom3 + denom4;
    end;
    if (Knot[i] <= t) and (t <= Knot[i+1]) then
      basisfunction := 0;
  }

```

```

else
    basisfunction = 1;
end if
end;

```

Fig.1 A routine for calculating B-spline basis function & blending curve

혼합곡선은 매개변수 값 변화에 따라 각 노드 값에 의한 제어 점의 상대적 영향을 표시한다. 만일 입력되는 자료 중에 노트벡터 배열이 빠져 있다면 각 제어 점 사이의 제어 다각형 세그먼트에 비례하여 노트벡터를 생성하게 한다. Nonuniform B-스플라인 원리함수에서 매개변수의 최대 값은 노트벡터의 최대 값과 같으므로 입력 노트벡터 값을 실수 1에 대하여 상대 값으로 표현하였다. Fig. 2는 형상 라이브러리를 이용한 3차원 nonuniform B-스플라인 곡선으로 HP 9000/720 워크스테이션의 X-Window상에서 생성하였다².

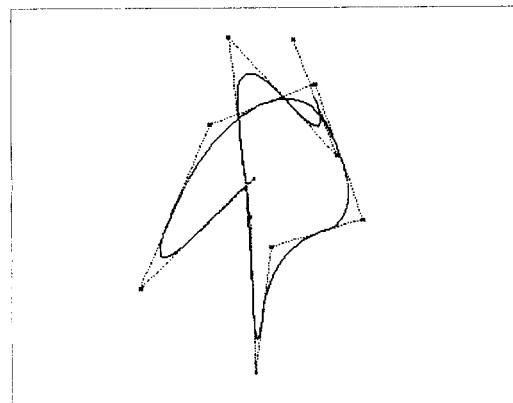
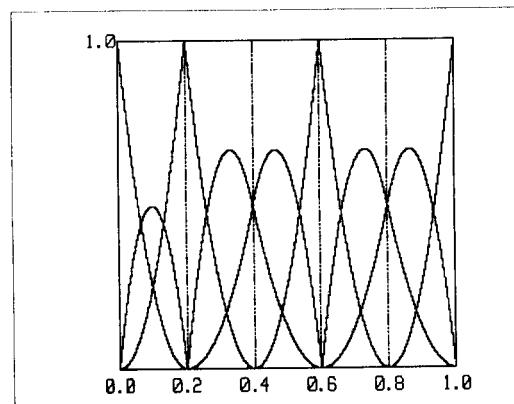


Fig.2 A B-spline curve with nonuniform knot vectors



$k = 3, n + 1 = 10$, knot vectors [0 0 0 0.2 0.2 0.4 0.6 0.6 0.8 1 1 1]

Fig.3 The generation of nonuniform B-spline blending curves

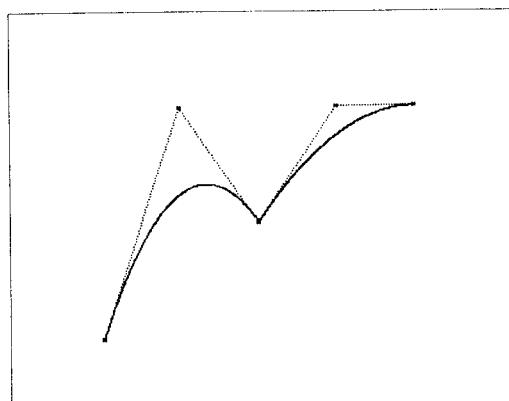
혼합곡선은 노트벡터 값에 따른 원리함수 값 변화를 나타내므로, 혼합곡선을 파악하면 각 노트벡터 값이 영향을 미치는 제어 다각형 범위를 알 수 있다. Fig. 3은 Fig. 2의 혼합곡선이다.

4. 혼합곡선과 B-스플라인 곡선의 상호관계를 이용한 형상 변화 예측

Nonuniform B-스플라인 곡선에서 임의 노트 값을 변화시켜 곡선과의 상호관계를 분석하고 형상 변화의 예측 가능성을 확인한다. 노트벡터 배열에서 5번째 값을 4번째 값과 6번째 값 사이에서 $1/6$ 씩 증가시킨다. Fig. 4(a)~(e)에서 각 노트벡터 값 변화에 대한 혼합곡선과 B-스플라인 곡선의 변화를 나타낸다. 내부의 노트벡터 값이 끝 노트 값 1.0-입력 값 3.0-에다가 갈수록 해당 노트벡터에 영향을 받는 혼합곡선이 오른쪽으로 이동하고 곡선은 해당 다각형 스펜으로부터 멀어진다.

Fig. 4(a)에서 4번과 5번 노트벡터 값이 $1/3$ -입력 값 1.0-으로 동일하다. 이러한 배열은 해당 매개변수와 일치하는 값에서 제어 점을 지나는 단을 생성한다. 혼합곡선에서도 0.33에서 최대 값 1에 도달하여 단이 발생한다. 이 매개변수 값에서는 3번 제어 점에만 영향을 미친다. 곡선 형상은 3번 제어 점으로 접근하게 된다. 다른 매개변수 값에서는 여러 제어 점들이 상호 영향을 미친다. 그러므로 5번 노트벡터 값이 0.33에 접근할수록 곡선은 3번 제어 점으로 다가가게 된다. 이것으로 3번 제어 점 부근의 형상 수정에 가장 큰 영향을 미칠 수 있는 노트벡터가 5번째 임을 파악할 수 있다.

Fig. 4(b)에서는 5번 노트 값이 0.5-입력 값 1.5-가 되므로 써 곡선 형상이 훨씬 부드러워 진다. 점선으로 표



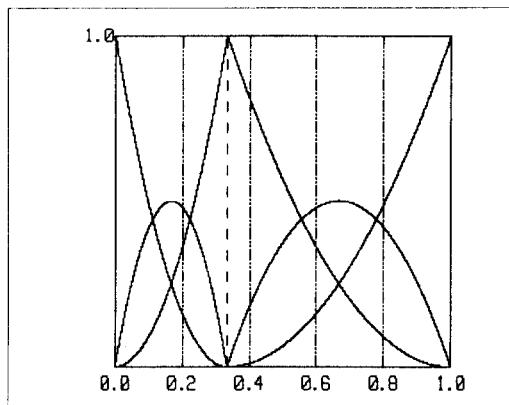


Fig. 4 (a) $k = 3$, $n + 1 = 5$, knot vectors [0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 3.0 3.0]

시된 두 매개변수 값 사이에서 노트 값 중 최대 값이 나타난다. 그리고 B-스플라인 곡선과 혼합곡선을 비교하면 두 매개변수 값 사이에서 곡선 형상이 제어 다각형에 접하고 있음을 알 수 있다. 0.33 값에서 곡선은 오른쪽으로 이동했다. Fig. 4(c)는 가장 일반적인 정형 B-스플라인 곡선의 형상을 보이고 있다. 이때 입력되는

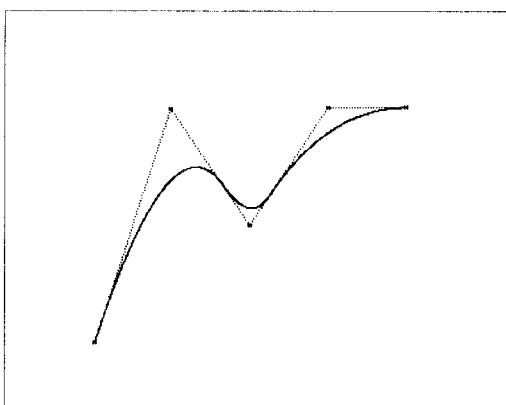


Fig. 4 (b) $k = 3$, $n + 1 = 5$, knot vectors [0.0 0.0 0.0 1.0 1.5 3.0 3.0]

노트벡터는 내부에서 등간격을 가지게 되어 open uniform 노트벡터를 이루게 된다.

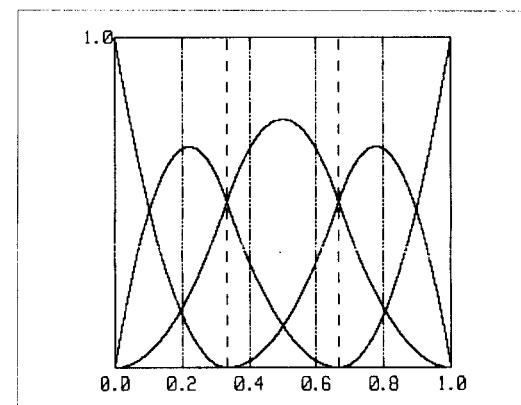
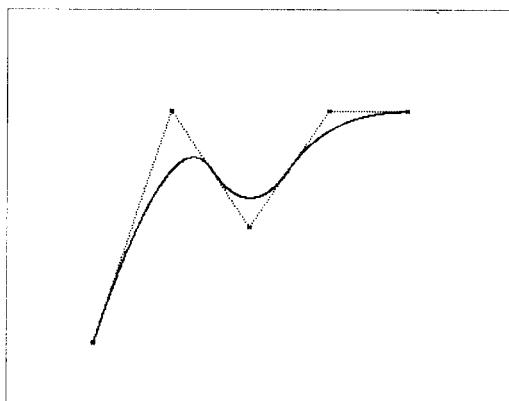
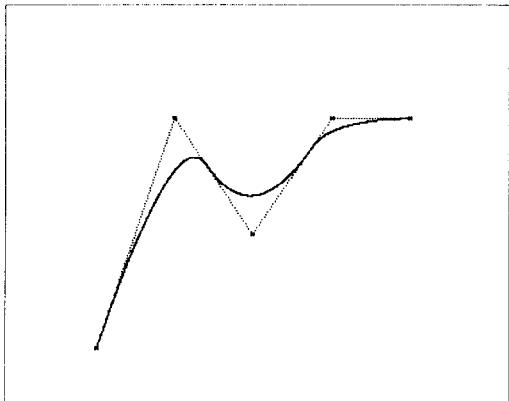


Fig. 4 (c) $k = 3$, $n + 1 = 5$, knot vectors [0.0 0.0 0.0 1.0 2.0 3.0 3.0 3.0]

Fig. 4(d)는 매개변수의 값이 최대 값 1.0-입력 값 3.0-에 근접한 상태이다. 혼합곡선이 주로 오른쪽으로 치우쳐 있으며 곡선 형상도 다각형의 마지막 스펜에 접근하고 있다.



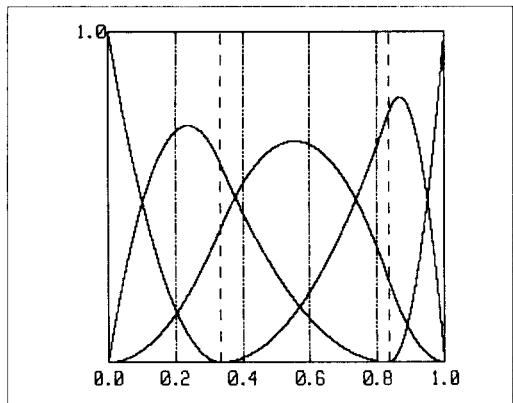


Fig. 4 (d) $k = 3$, $n + 1 = 5$, knot vectors [0.0 0.0 0.0 1.0 2.5 3.0 3.0 3.0]

Fig. 4(e)에서 노트벡터는 끝점에서 네 번 1.0이 반복된 경우이다. 곡선이 4번 제어 점에서 끝나게 되며, 혼합곡선 상에서 5번째 제어 점은 전 매개변수 범위에 걸쳐 0의 값을 가진다.

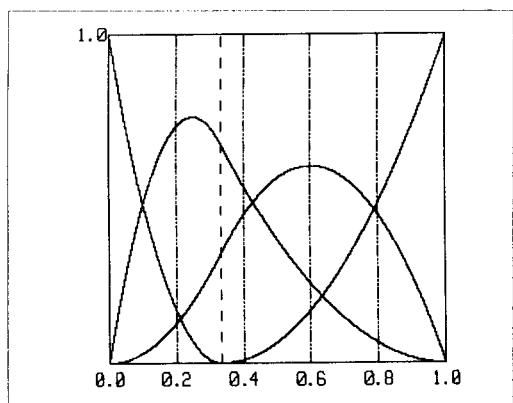
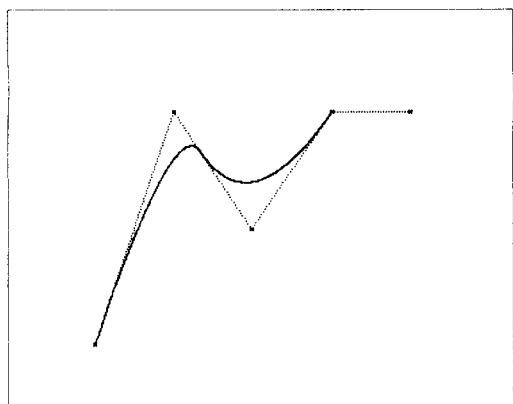


Fig. 4 (e) $k = 3$, $n + 1 = 5$, knot vectors [0.0 0.0 0.0 1.0 3.0 3.0 3.0 3.0]

이상의 고찰에서 다음 사실들을 정리할 수 있다.

- 노트벡터에 의한 혼합곡선의 변화는 제어 점 위치 값과 무관하다. 때문에 제어 점 위치 값의 변화는 곡선 형상을 크게 변화시킬 수 있다. 즉 제어 점에 의한 형상 수정은 그 제어 폭이 매우 크므로 미세한 변형에는 노트벡터의 사용이 유리하다.

- 혼합곡선의 매개변수 값에서 곡선 형상에 가장 영향을 많이 주는 제어 점을 파악할 수 있다. 그러므로 곡선 형상 제어에서 노트벡터의 재배열을 수행하기 위한 매개변수 값과 제어 점의 관계를 판단할 수 있다. 즉 임의 노트벡터가 형상에 미치는 영향을 알 수 있다.

- 임의 매개변수 값에서의 혼합곡선을 출력하고 곡선 형상을 구성하는 것이 가능하다. 혼합곡선과 형상 곡선의 관계를 이용하여 노트벡터를 재 배열하므로 써 새로운 형상을 구현할 수 있다.

위 내용에서는 형상을 제어하기 위한 일반적인 노트벡터의 삽입과 삭제 부분은 다루어지지 않았다. 근접한들 이상의 지점을 지정한 경우에 대한 다른 하나 지점에 영향도 고려해야 한다. 최종적인 형상 분석 시스템에는 형상 수정을 위한 노트벡터 재배열과 추가적 삽입이 첨가될 계획이다. 형상 수정에 대한 효율은 다른 기법과 비교 검토가 계획되어야 할 것이다.

5. 결론

본 연구에서는 nonuniform B-스플라인 곡선으로 생성된 평면 및 공간상의 형상을 수정에 적용하기 위한 B-스플라인 원리함수와 혼합곡선의 응용을 목적으로 하였다. 이러한 고찰은 B-스플라인 형상 분석 시스템의 제어 원리로 적용되며 다음과 같이 요약할 수 있다.

1. 기존 B-스플라인 곡선 형상 수정에서 혼합곡선과 노트벡터의 사용은 거의 무시되고 제어 점에 의한 형상 수정이 주를 이루었으나, 형상의 정밀한 수정과 그 변형을 예측함에 있어 노트벡터의 사용과 혼합곡선의 분석이 매우 유용함을 파악하였다.

2. B-스플라인 형상의 자유로운 구현을 위하여 가능한 원리함수의 특징을 모두 표현할 수 있는

nonuniform B-스플라인 원리함수와 형상 라이브러리를 구축하여 모든 경우에 적절하게 적용시킬 수 있었다.

3. 또한 혼합곡선의 분석은 형상 제어를 위한 제어 점 조작에 있어 이동의 우선 순위를 결정하는데 우선적인 판단 기준이 될 수 있는 장점이 있어, 제어 점에 의한 형상 수정에도 유용한 정보를 제공할 수 있다.

4. 곡선 형상의 변화 예측에 있어 노트벳터 변경에 의한 혼합곡선과 곡선의 출력으로 변화된 곡선 형상의 비교로 형상의 변화를 쉽게 예측할 수 있다. 이러한 단계는 개선된 알고리즘으로 원활히 수행된다면 형상 생성 및 수정에 적절한 기법으로 적용 가능하다. . .

References

1. Gordon and Riesenfeld, "B-spline curves and surfaces", Computer Aided Geometric Design, Academic Press, UK(1974)
2. "Starbase Graphics Techniques, Chapter 14 Splines", Hewlett-Packard Company, 1991