

밀도 분포를 이용한 최적 위상 설계 시스템의 개발

정진평, 이건우

서울대학교 기계설계학과 CAD 연구실

Development of CAD System for Optimal Topology Design using Density Distribution

Jinpyung Chung and Kunwoo Lee

Seoul National University, Department of Mechanical Design and Production Engineering,
Computer Aided Design and Analysis Lab.

ABSTRACT

Optimal topology design is to search the optimal layout of the structure which can be used for the shape of the conceptual design stage. Our objective is to maximize the stiffness of the structure under a material usage constraint. The density of each finite element is the design variable and its relationship with Young's modulus is expressed by quadratic form. The shape is represented by the entire density distribution, the structural analysis is performed by finite element method and the optimization is achieved by feasible direction method. Unlike optimality criteria method, feasible direction method can handle various problems simultaneously, that is, multi-objectives and multi-constraints. Total optimization time can be reduced by the approximation of the material property and fewer design variables than homogenization method. Topology optimization is applied to design the shape of ribs.

I. 서 론

현대에 들어오면서, 보다 가벼우면서도 효율적인 기계 구조물들의 요구가 증가하고 있다. 외형적으로 아름다우면서도 에너지 및 환경문제를 고려하고, 기능적으로도 훌륭한 기계를 설계하기 위하여 설계자들은 기존의 방법에서 탈피하여 보다 나은 선세 기술을 추구하게 되었다.

설계자가 어떤 물체의 형상을 설계한다는 것은 주어진 구속 조건하에서 외력과 모멘트가 주어질 때, 설계 목적에 적합한 기능을 적절히 수행할 수 있는 물체의 형상을 찾는 것이다.

물체의 위상 및 형태는 개념 설계 단계에서 결정되는데, 개념 설계 단계에서 결정된 물체의 위상을 고정하고 최적화 작업을 수행하면, 단지 물체의 형상을 나타내는 정해진 수의 매개 변수의 값만을 변화시켜 가며, 최적의 형상을 찾기 때문에, 그 물체의 기본적인 윤곽(layout)은 변하지 않고, 최적의 형상을 찾는데 한계가 있게 된다. 즉, 최적화에 의해 얻어진 최종의 형상이 설계자의 초기 추측에 강하게 의존하므로, 설계자가 개념 설계 단계에서 초기 추측을 잘못하면, 진정한 최적의 형상을 얻지 못할 수도 있고, 설계를 개선해야 할 경우가 많아진다. 결론적으로, 진정한 최적의 형상을 얻으려면, 최적화 단계에서 물체의 내부에 그 물체의 위상을 변화시킬 수 있는 새로운 경계들의 생성

을 가능하게 해 주어야 한다.

설계 공정은 순환 공정이고, 설계는 필요에 따라 개선되어 질 수 있으나, 이미 형상이 결정된 설계의 개선에는 비용이 많이 들게 된다. 따라서, 개념 설계 단계에서 모든 설계 결정 사항들이 보다 철저하고 정확하게 계획되고 수행되어야 한다. 하지만 이 단계에서 설계자들을 도와 줄 수 있는 것은 단지 설계자의 직관, 창의성, 경험, 판단력 등의 추상적인 개념들뿐이다. 본 연구에서는 개념 설계를 설계자의 주관적 결정에 의존하지 않고, 컴퓨터를 이용한 수치해석적 방법으로 주어진 공간상에서 객관적인 최적의 형상을 찾아서, 개념 설계를 자동화하고자 한다. 즉, 개념 설계 단계에서 설계자가 물체의 형상을 초기 추측할 필요 없이, 설계 영역(design domain), 구속 조건(design constraints), 힘의 크기와 방향(load condition)만 지정하여 주면, 최적화 기법을 이용하여 자동으로 최적의 구조적 성능을 발휘하는 기계 구조물의 위상을 찾을 수 있고, 개념 설계 단계에서 원하는 최적의 형상을 얻을 수 있다.

위상 최적화의 가장 평범한 기법은 ground structure이고, [Topping 1983, Haftka 1992] 가장 대표적인 연구는 homogenization method이다. 이 방법은 물체를 수 많은 구멍들을 가지고 있는 미세 구조로 가정하여, 최적의 구조적 성능을 발휘하는 구멍들의 분포를 찾는다. [Bendoc 1988, Suzuki 1991] 유전 알고리즘을

이용한 위상 최적화는 jensen 등에 의해 시작되었고, [Sandgren 1992] Sequential approximate optimization algorithm을 사용한 위상 최적화가 kumar 에 의해 수행되었다. [Kumar 1992] Yang 은 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 하여, sequential linear programming 으로 최적화를 수행하였다. [Yang 1994]

본 연구에서는 물체의 미세 구조에 관심이 있는 것이 아니므로, 단지 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 하여 최적화를 행하였다. 최적화 알고리즘으로 feasible direction method 를 사용하여, 여러개의 목적 함수와 구속 조건에서도 위상 최적화가 가능하도록 하였고, 불편요한 계산 시간을 단축하여, 설계 속도를 향상 시켰다. 특히, 물체의 기본적인 형상이 정해져 있는 경우에는 강성을 증가시키기 위하여, 리브를 설치하는 것이 일반적인데, 이 리브의 형상을 결정하는데 위상 최적화 기법을 사용하였다.

2. 위상 최적화를 위한 문제의 공식화

위상 최적화를 위해서는 다음의 세 가지 도구가 필요하다. Figure 2.1 은 본 연구에서 위상 최적화를 위해 사용한 도구를 개략적으로 보여 주고 있다.

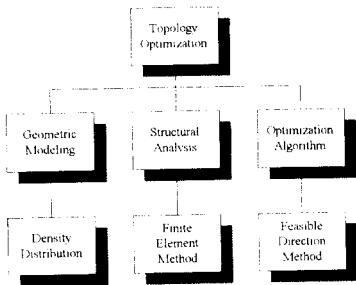


Figure 2.1 Topology Optimization Overview

2.1 물체 형상의 표현 방법

전통적인 기하학적 모델링 기법은 물체의 내부 또는 외부의 경계를 b-spline 과 같은 자유 곡선 또는 자유 곡면으로 표현하는 것이다. 이와 같이 전통적인 기법을 사용하여 물체의 형상을 표현하면, 물체의 위상이 고정되기 때문에, 위상 최적화를 위한 물체의 형상 표현 방법으로는 적합하지 않다. 또, 이와 같이 물체의 위상이 고정된 상태에서 유한 요소 해석 등의 수치해석 기법을 사용하여 해석을 하려면, 물체의 형상이 변화할 때마다 메쉬(mesh)를 다시 잘라야 하는 부담이 있다.

본 연구에서는 입의의 설계 영역을 유한 요소(finite

element)로 분할한 뒤, 각 요소의 밀도로 형상을 표현하고자 한다. 즉, 설계 영역의 전체적인 밀도 분포가 물체의 형상을 표현해 준다. 밀도가 0 인 부분은 물체가 없는 것으로 간주할 수 있고, 밀도가 1로 갈수록 물체의 재료가 집중되어져야 한다. 이 방법을 사용할 경우, 2 차원 물체의 형상 뿐 아니라, 3 차원 물체의 형상까지도 표현할 수 있다.

2.2 목적 함수와 구속 조건

본 연구에서 최적화의 목표는 주어진 질량에서 강성을 최대화한 구조물의 형상을 찾는 것이다. 따라서, 목적 함수는 mean compliance 이며, 구속 조건은 재료의 질량, 즉 사용되는 재료의 한계이며, 물체의 표현 방법이 각 유한요소의 밀도 이므로, 설계 변수로는 각 유한 요소의 밀도를 사용했다.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && \text{Mean Compliance } L(\rho) \\
 & L(\rho) = \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{t\} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \{u(\rho)\}^T \{f\}^B d\Omega + \int_{\Gamma} \{u(\rho)\}^S \{f\}^S d\Gamma \\
 & \quad + \sum_e \{u(\rho)\}^T \{F\}_e^e + c_p \int_{\Omega} \rho (1 - \rho) d\Omega \\
 & \text{subject to :} && \text{Mass Limit } M_0 \\
 & M(\rho) = \int_{\Omega} \rho d\Omega - M_0 \leq 0 && (2.1) \\
 & \text{and side constraints :} && \rho = \{\rho^e\} \\
 & 0 \leq \rho^e \leq 1 && e = 1, 2, 3, \dots, m
 \end{aligned}$$

여기에서 $\{\cdot\}$ 는 벡터 조작자(vector operator)를 나타낸다. $\{f\}^B$ 는 표면력(surface traction), $\{f\}^S$ 는 body force, $\{F\}_e^e$ 는 집중력(concentrated force), $\{u\}$ 는 변위, $\{\varepsilon\}$ 는 변형율, $\{t\}$ 는 응력, ρ^e 는 각 유한 요소의 밀도, m 은 유한 요소의 개수, Γ 는 표면력이 작용하는 영역, Ω 는 전체 설계 영역, M_0 는 질량 한계이고, $L(\rho)$ 는 mean compliance 로서, 변위 $\{u\}$ 를 발생시키는 힘에 의해 하여진 일의 2 배, 즉 변형 에너지(strain energy)의 2 배이다. $L(\rho)$ 가 크다는 것은 힘이 주어질 때, 변형 에너지를 흡수할 수 있는 능력이 크다는 것을 의미하고, 강도 높은 구조물일 수록 변형이 작고, 에너지를 적게 흡수하므로 $L(\rho)$ 의 값이 작다.

밀도를 설계 변수로 최적화를 하면, 0 과 1 의 밀도값이 아닌, 중간 밀도값들이 많이 나타난다. 이러한 중간 밀도를 갖는 재료는 재자이 어려울 뿐더러, 제작 비용도 많이 듦다. 또, 설계자가 형상을 결정하는데 있어서도 이러한 중간 밀도를 배제하여야 할

지, 포함시켜야 할지 판단을 어렵게 한다. 따라서, 본 연구에서는 아래의 식과 같이 목적 함수에 penalty term을 추가해 중간 밸도를 가능한 한 없애고 있다. 최적화 알고리즘으로는 feasible direction method를 사용하고 있다.

2.3 밸도와 재료의 특성 관계

구조 해석을 위해서는 실제 변수인 밸도(density)와 재료의 특성(material property)과의 관계를 알아야 한다. 1 장의 관련 연구에서 언급했듯이 homogenization method를 사용해서 이 관계를 구할 수도 있다.[Bendsoe] 본 연구에서는 물체의 microstructure에 관심이 있는 것이 아니라, 밸도를 실제 변수로 개념 설계 단계에서의 물체의 형상을 얻으려는 것이 목적이므로, 물체의 밸도와 탄성계수(young's modulus)와의 관계를 다음과 같이 가정하였고, $n = 2$ 를 사용하였다.

$$\frac{E'}{E^o} = (\rho')^n \quad (2.2)$$

2.4 유한 요소 해석을 이용한 구현

구조물의 유한 요소 해석을 위해 메쉬를 생성할 때, 전체의 실제 영역을 메쉬로 분할한 뒤, 밸도가 0인 부분, 즉 빈 공간에 해당하는 유한 요소의 탄성 계수(young's modulus)의 값을 적당히 작은 값으로 하면, 이 부분의 유한 요소를 잘라낸 것과 비슷한 효과를 얻을 수 있다. 이 방법을 사용하면 물체의 위상이 변해도 그에 따라 메쉬를 다시 자를 필요 없이 빈 공간에 해당하는 유한 요소의 탄성 계수(young's modulus)값만 변화시켜 주고 구조 해석을 하면 된다. 이러한 메쉬 생성 기법을 Constant Meshing Technique이라 하는데, 본 연구에서는 이 기법을 사용하여 해석을 할 때마다 메쉬를 다시 자르지 않고, 메쉬는 고정시킨 상태에서 설계 변수인 각 유한 요소의 밸도를 변화시키기며 해석을 하고 있다. 따라서, 물체의 형상이 변화으로 인해 메쉬를 다시 자르는 부담을 줄일 수 있다.

Mean compliance를 계산하기 위해서 가상 변위의 원칙(The Principle of Virtual Displacement)에 기초한 유한 요소 해석 기법을 사용했다. 가상 변위의 원칙은 그 물체에 대한 compatible한 가상의 작은 변위에 대하여 전체 내부 가상일(total internal virtual work)은 전체 외부 가상일(total external virtual work)과 같다는 것이다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{\delta e\}^T \{r\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{f\}^n d\Omega + \int_{\Gamma} \{\delta u\}^T \{f\}^s d\Gamma + \sum_i \{\delta u\}^T \{F\}^i \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서 δ 는 가상 조작자(virtual operator)이다. 따라서, $\{\delta e\}$ 는 가상 변형율이고 $\{\delta u\}$ 는 가상 변위이다. 이 때 변위 $\{u\}$ 는 절대 좌표계에 대한 값이다.

물체를 유한 요소로 잘랐을 때, 각 요소내에서 국소 좌표계(local coordinates system)에 의해 나타나야 하는 변위는 다음과 같이 displacement interpolation matrix $[H']$ 와 각 노드점에서의 변위 $\{\bar{u}\}$ 로 나타나어 질 수 있다.

$$\{u'\}(x, y, z) = [H'](x, y, z)\{\bar{u}\} \quad (2.4)$$

여기서 $[]$ 은 행렬 조작자(matrix operator)이고, e 는 유한 요소를 나타낸다. $[B']$ 를 변형율-변위 행렬(strain-displacement matrix)라고 할 때,

$$\{\epsilon'\}(x, y, z) = [B'](x, y, z)\{\bar{u}\} \quad (2.5)$$

라고 할 수 있고, $[C']$ 를 요소의 탄성 행렬(elasticity matrix)이라고 할 때,

$$\{r'\} = [C']\{\epsilon'\} \quad (2.6)$$

라고 할 수 있으며, 본 연구에서 각 유한 요소의 밸도가 다르고, 밸도와 탄성 계수와의 관계는 식 (2.2)와 같이 정의하였으므로, $[C']$ 는 다음과 같이 나타나어질 수 있다.

$$[C'(\rho')] = [C^o](\rho')^n \quad (2.7)$$

여기서, $[C^o]$ 는 탄성 계수 E^o 일 때의 탄성 행렬이다. 식 (2.7)을 위의 가상 변위의 원칙의 공식 (2.3)에 대입하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \delta L'(\rho') \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\sum_i \int_{\Omega} [B']^T [C'(\rho')] [B'] d\Omega' \right] \{\bar{u}\} \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\sum_i \int_{\Omega} (\rho')^n [B']^T [C^o] [B'] d\Omega' \right] \{\bar{u}\} \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\left\{ \sum_i \int_{\Omega} [H']^T \{f'\}^n d\Omega' \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_i \int_{\Gamma} [H']^T \{f'\}^s d\Gamma' \right\} + \{F\} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{\bar{u}\} &= \{R\} \\
 \{R\} &= \{R\}^a + \{R\}^s + \{R\}^c \\
 [K] &= \sum_i \int_{\Omega} (\rho')^a [B']^T [C^a] [B'] d\Omega' \\
 \{R\}^a &= \sum_i \int_{\Omega} [H']^T \{f'\}^a d\Omega' \\
 \{R\}^s &= \sum_i \int_{\Omega} [H']^T \{f'\}^s d\Omega' \\
 \{R\}^c &= \{F\}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

식 (2.9)를 풀어서 노드점에서의 변위 $\{\bar{u}\}$ 값을 구하면, 전체의 mean compliance L 을 아래의 식과 같이 구할 수 있다.

$$L = \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} \tag{2.10}$$

2.5 감도 해석(Sensitivity Analysis)

Feasible direction method를 사용하기 위하여 설계 변수의 구배(gradient)나 hessian matrix 같은 감도(sensitivity)에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에서는 유한 요소 해석에서 사용한 평형 방정식(equilibrium equation) (2.10)을 직접 미분함으로써, 설계 변수에 대한 목적 함수의 구배값을 구해 사용하였다.

식 (2.10)을 설계 변수에 대하여 편미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \rho'} &= \{\bar{u}\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho'} \{\bar{u}\} + \frac{\partial \{\bar{u}\}^T}{\partial \rho'} [K] \{\bar{u}\} \\
 &\quad + \{\bar{u}\}^T [K] \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial \rho'}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

또, 식 (2.9)를 설계 변수에 대하여 편미분하면 다음과 같다.

$$[K] \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial \rho'} + \frac{\partial [K]}{\partial \rho'} \{\bar{u}\} = 0 \tag{2.12}$$

위의 식 (2.12)를 정리하여, 식 (2.11)에 대입하면, 다음과 같은 목적 함수의 구배를 얻는다.

$$\frac{\partial L}{\partial \rho'} = - \{\bar{u}\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho'} \{\bar{u}\} \tag{2.13}$$

설계 변수가 각 유한 요소의 밀도이고, 이 밀도는 유한 요소내에서는 그 값이 일정 상수이므로, i번째 설계 변수에 대한 다른 유한 요소의 mean compliance의 구배값은 0이 되고, i번째

설계 변수에 대한 mean compliance의 구배값은 오직 i번째 유한 요소의 mean compliance의 구배값이 된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \rho^i} &= - \{\bar{u}\}^T \frac{\partial}{\partial \rho^i} [\sum_i \int_{\Omega} (\rho')^a [B']^T [C^a] [B'] d\Omega'] \{\bar{u}\} \\
 &= - \{\bar{u}\}^T \frac{\partial (\rho')^a}{\partial \rho^i} [\int_{\Omega} [B']^T [C^a] [B'] d\Omega'] \{\bar{u}\} \\
 &= - (n)(\rho')^a \{\bar{u}\}^T [\int_{\Omega} [B']^T [C^a] [B'] d\Omega'] \{\bar{u}\} \\
 &= \frac{\partial L(\rho')}{\partial \rho^i}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

구속 조건으로는 질량을 사용하고 있으며, 각 유한 요소내에서 밀도는 일정하고, 다른 유한 요소의 밀도와는 독립적이므로, i번째 설계 변수에 대한 구속 조건의 구배는 i번째 유한 요소의 체적(volume)이 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M}{\partial \rho^i} = \int_{\Omega} d\Omega' \tag{2.15}$$

3. 적용 예 (Application Examples)

본 장에서는 밀도 분포를 이용한 위상 최적 설계를 실제 설계 문제에 적용하는 방법을 구체적으로 설명하고, 그 결과를 보여준다. 또, 본 연구의 결과와 다른 위상 최적화 기법들의 결과를 비교, 분석하고 있다.

본 연구의 설계 방법을 실제 설계 문제에 적용시키는데는 두가지 경우가 있을 수 있다. 그 하나는 단지 경계 조건과 하중 조건이 주어졌을 때, 주어진 질량에서 최대의 강성을 갖는 구조물의 위상을 찾는 것이고, 다른 하나는 물체의 기본적인 형상은 주어진 상태에서, 강성을 증가시키기 위해 리브 및 보강재의 형상을 찾는 것이다. 이 두가지 경우에 대한 본 연구의 적용은 설계자가 설계 가능 영역을 어떠한 형태로 만들어 시스템에 입력시킬 것인가의 문제로 귀착될 수 있다. 다음의 절들에서 이 두 가지 경우의 설계 문제에 대한 적용 예들을 보이고 있다.

설계 변수의 초기값은 0에서 시작하여, feasible direction method가 목적 함수와 구속 조건식의 계산과 목적 함수와 구속 조건식의 gradient의 계산을 거듭하여, 주어진 질량 한계를 넘지 않으면서, 최대의 강성을 갖는 설계 변수의 값을 찾는다.

본 설계의 목적은 compliance를 최소화한 구조물의 형상을 찾는 것이다. 구속 조건은 질량 한계로서, 밀도가 1인 전체 질량의 25%이고, SI 단위계를 사용하였다.

3.1 Canti-lever Beam

첫번째 적용 예는 2 차원 평면 응력 문제로서, Figure 3.1에서 보는 바와 같이 직사각형의 설계 가능 영역이 주어지고, 그 왼쪽 변이 구속된 상태에서 오른쪽 변의 중심에 수직 집중 하중이 작용하는 경우이다.



Figure 3.1 Feasible Domain of 2-D Canti-Iver Beam

각 변의 치수, 탄성 계수(Young's modulus), 포아송의 비(Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

$$D_x = 16.0 \text{ mm}$$

$$D_y = 10.0 \text{ mm}$$

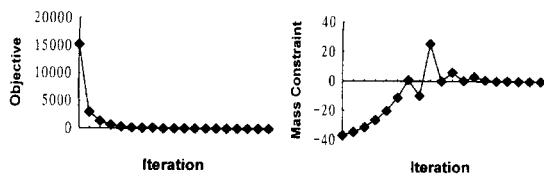
$$E = 2.07 \times 10^5 \text{ MP}$$

$$\nu = 0.3$$

$$F = 300 \text{ N}$$

유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 32×20 mesh로 구성되어 있으며, 설계 변수는 요소의 개수와 일치하는 640 개이다.

목적 함수에 Penalty term이 없는 경우, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 18 회, 목적 함수와 구속 조건식 gradient의 계산 횟수는 3 회이다. 이 계산 과정을 그래프로 나타낸 것이 Figure 3.2이다. Penalty 상수값이 10 인 경우, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 85 회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 11 회로서, penalty term이 없는 것보다 계산 횟수가 증가한다.

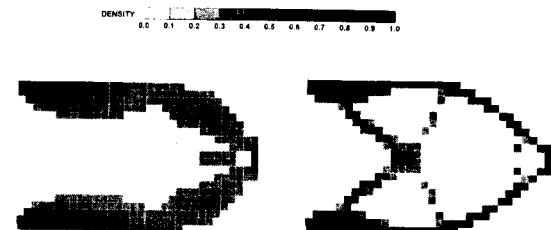


(a) Objective Function Values (b) Constraint Equation Values

Figure 3.2 Convergence of Objective and Constraint

위의 그래프에서 볼 수 있듯이, 목적 함수값은 빠른 수렴 정도를 보이나, 질량 구속 조건의 경우 상대적으로 느리게 수렴함을 알 수 있다. 또, 수렴 과정이 지그재그형으로 나타나는데 이는 feasible direction method의 특성에서 기인한다 하겠다. 위상 최적

화를 통해 얻은 형상은 아래의 Figure 3.3에서 보여주고 있다.



(a) Without Penalty $C_p = 0$ (b) With Penalty Constant $C_p = 10$

Figure 3.3 Optimal Layout of the Canti-lever Beam

Figure 3.3 의 (a)는 목적 함수에 중간 밀도를 제거하기 위한 penalty term이 없는 경우의 최적화된 형상이고, (b)는 penalty constant $C_p = 10$ 의 penalty term을 포함하고 있는 목적 함수를 사용하여 최적화된 형상이다. Figure 3.3 (b)의 최적화된 형상은 1.2.5 절의 homogenization method를 이용한 결과와 유사함을 알 수 있다. 따라서, 본 연구에서 가정한 밀도와 재료의 특성과의 관계가 homogenization method를 사용하여, 엄밀하게 구한 밀도와 재료와의 관계와 그리 큰 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 단, 본 연구에서는 목적 함수에 penalty term을 추가했다. Penalty term의 penalty 상수의 값이 mean compliance에 비하여 작으면 중간 밀도가 많이 나타나고, 그 값이 크면 중간 밀도값이 적어진다. Figure 3.3의 최적화된 형상을 보면, (a)의 경우 중간 밀도가 많이 나타나면서 밀도 분포의 영역이 (b)에 비해 넓고, (b)의 경우, 상대적으로 중간 밀도가 적으면서 꼭 필요한 영역에만 밀도가 분포됨을 알 수 있다. 설계자는 임의로 penalty 상수를 조정하여, 밀도 분포를 조정할 수 있고, 원하는 형상을 얻을 수도 있다. 본 연구에서 위상 최적화를 하는데 걸린 시간은 SGI Indigo2 컴퓨터를 사용하여 약 1 시간 30 분이었고, homogenization method의 경우 8 시간 가량이 소요되었으며, 시간적인 측면에서 본 연구가 효율적임을 알 수 있다. 그 이유는 homogenization method를 사용해 수치해석적으로 밀도와 재료 특성과의 관계를 구하는데 걸린 시간을 절약할 수 있고, 설계 변수의 수가 homogenization method를 사용하면 2 차원 설계의 경우 전체 유한 요소 개수의 3 배, 3 차원 설계의 경우 6 배이기 때문이다.

3.2 Bridge-like Frame

두번째 적용 예는 아래의 Figure 3.4와 같은 설계 가능 영역이 주어질 때, 왼쪽 아래 꼭지점 부분은 모든 방향으로의 자

유도가 구속되고, 오른쪽 아래 꼭지점 부분은 y 방향으로의 자유도만 구속되며, 3 개의 수직 하중이 가해지는 설계 문제로 다리의 철골 구조물의 설계 문제와 유사하다.

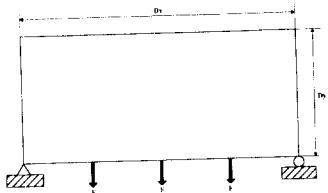


Figure 3.4 Feasible Domain of Bridge-like Frame

각 변의 치수, 탄성 계수(Young's modulus), 포아송의 비 (Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

$$D_x = 16.0 \text{ mm}$$

$$D_y = 7.5 \text{ mm}$$

$$E = 2.07 \times 10^5 \text{ MP}$$

$$\nu = 0.3$$

$$F = 700 \text{ N}$$

유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 64×30 mesh 로 구성되어 있으며, 설계 변수는 요소의 개수와 일치하는 1920 개로서, canti-lever beam 의 설계 변수의 3 배이다.

Penalty 상수값을 300 으로 하였을 때, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 160 회, 목적 함수와 구속 조건식 gradient 의 계산 횟수는 18 회이고, 최적화된 형상은 아래의 Figure3.5 와 같다.

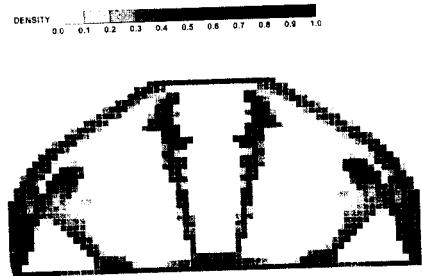


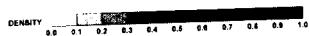
Figure 3.5 Optimal Layout of the Bridge-like Frame

3.3 평판과 리브 (Plate and Ribs)

다음의 적용 예는 평판에 균일 분포 하중과 그 중심에 집중 하중이 작용하는 경우 각각에 대한 최적 형상의 설계이다. 경계 조건은 평판의 네 변의 모든 자유도를 구속하는 것으로 하였다. 평판의 강성도를 증가시키는 방법에는 2 가지가 있을 수 있다.

그 하나는 앞의 적용 예와 마찬가지로, 질량을 감소시킬 때, 최대의 강성을 갖는 평판 자체의 형상을 찾는 것이다. 그러나, 평판이나 쉘 구조물의 실제 설계에서는 대부분의 경우 리브를 설치하여 강성을 증가시킨다. 따라서, 본 연구에서는 평판의 아래쪽에 리브를 설치할 때, 그 리브의 형상을 결정하는 방법으로서, 쉘로 구성된 리브 형태의 설계 가능 영역을 주고, 주어진 질량에서 최대의 강성을 갖는 밀도 분포를 찾는다.

Penalty 상수값은 각각 30, 180, 20, 150 으로 하였다. 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 각각 43, 27, 52, 25 회, 목적 함수와 구속 조건식 gradient 의 계산 횟수는 각각 8, 4, 11, 4 회이고, 최적화된 형상은 아래의 Figure3.6 과 같다.



(a) Optimal Layout of Plate by Concentrated Force

(b) Optimal Layout of Plate by Distributed Force

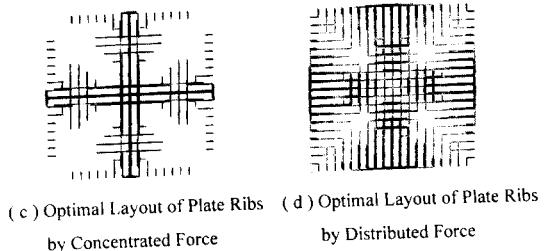


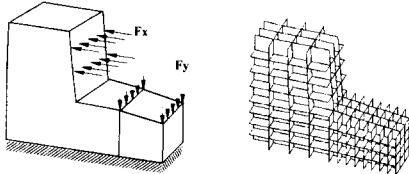
Figure 3.6 Optimal Layouts of the Plate and Ribs

평판과 쉘은 대칭의 형상이므로, xy 평면에서 4 등분하여 해석하였다. 유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 (a), (b)는 20×20 mesh 로 구성되어 있으며, 요소의 형태는 plane42, 설계 변수는 각 요소의 개수와 일치하는 400 개이다. (c), (d)는 각 요소의 개수는 440 개이고, 요소의 형태는 shell63 이다.

3.4 TV 리브 (Television Ribs)

TV 모니터내에는 CRT 를 지지해주기 위해 모니터 케이스와 CRT 사이에 리브를 설치하는 것이 일반적이다. 본 연구에서는 강성을 최대화한 즉, 변형을 최소화한 CRT 지지대의 형상을 찾

기 위해 먼저, 3 차원 체적(volume)을 갖는 설계 가능 영역을 주어, 주어진 하중 조건하에서 최적의 3 차원 체적의 형상을 찾았다. 또, 설계 가능 영역을 3.3 절에서 제시한 웰 형태로 만들어서, 최적의 리브의 형상도 찾았다. 각각의 경우에 대한 설계 가능 영역을 다음의 Figure 3.7 에 나타내었다.



(a) Feasible Volume Domain (b) Feasible Shell Domain

Figure 3.7 Feasible Domain of TV Support Volume and Shell Ribs

Figure 3.7에서 설계 가능 영역은 CRT 의 형상에 맞추어서, 그 형상이 만들어졌으며, 웰 영역에 가해지는 하중의 위치와 크기 및 경계 조건은 체적 영역에 가해지는 하중 조건 및 경계 조건과 동일하다. 탄성 계수(Young's modulus), 포아송의 비(Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

$$E = 2.44 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.35$$

$$F_x = 30 \text{ N}$$

$$F_y = 50 \text{ N}$$

지지 체적(support volume)의 경우 4 개의 체적을 이어서 만들었으며, 유한 요소 해석을 위한 요소의 개수는 480 개이고, 요소의 형태는 solid 45 이다. 웰의 경우 요소의 개수는 640 개이고, 요소의 형태는 shell 63 이다.

지지 체적의 경우, Penalty 상수값을 0.002로 하였고, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 41 회, 목적 함수와 구속 조건식 gradient 의 계산 횟수는 6 회이다. 최적화된 형상은 아래의 Figure3.8 과 같다.

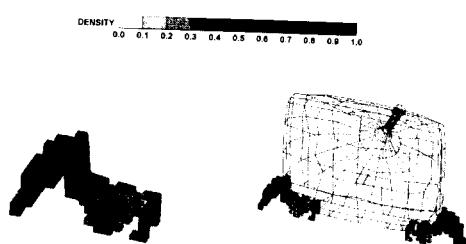


Figure 3.8 Optimal Layout of Support Volume in the Television

웰의 경우, Penalty 상수값을 0.01로 하였고, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 37 회, 목적 함수와 구속 조건식 gradient 의 계산 횟수는 6 회이다. 최적화된 형상은 아래의 Figure3.9 와 같다.

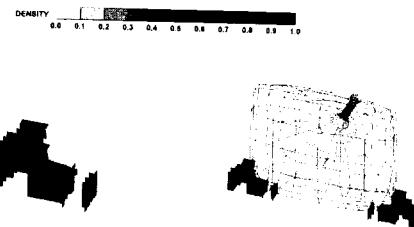


Figure 3.9 Optimal Layout of Shell Ribs in the Television

Figure 3.8에 나타난 지지 체적 최적화는 CRT 의 지지뿐만 아니라, 다양한 구조물의 지지에도 마찬가지로 응용될 수 있다.

Figure 3.9의 최적화된 리브의 형상은 바로 실제 리브의 제작에 사용될 수 있다. 이 최적화된 형상과 실제 TV에 사용되는 리브를 비교하기 위해 아래의 Figure 3.10에 TV model CT29M 의 리브의 형상을 나타내었다.



Figure 3.10 Original Ribs in the Television Model ct29m

최적화된 리브의 형상과 기존의 리브의 형상을 비교해 보면, 기존의 리브의 형상이 주로 xz 평면과 평행한 형태로 구성되어 있는데 반해, 최적화된 리브의 형상은 xy 평면과 평행하게 구성되어 있다. TV를 지지하기 위한 지지 체적 또는 리브들의 최적화된 형상과 실제 TV 모델인 CT29M 의 리브들의 mean compliance 와 질량을 비교하여 Table 3.1에 나타내었다.

	Support Volume	Optimized Ribs	CT29M Ribs
Mean Compliance	23.92	0.3116	8021.52
Mass	379013	26800	42062

Table 3.1 Comparison between Optimized Result and Original Model

위의 결과를 볼 때, 기존의 CT29M에 설치된 리브의 형상보다는 Figure 4.10에 나타난 최적화된 형상으로 리브를 설치하면, CRT를 지지하는 리브의 강성을 크게 증가시킬 수 있다. 또,

리브 전체의 질량도, 기존의 리브 질량의 63.7%로 줄일 수 있다. 사실 리브의 형상을 설계할 때, 설계자의 직관과 경험에 주로 의존하게 되는데, 이를 배제하고, 본 연구의 방법을 적용한다면 보다 효율적인 형상을 설계할 수 있을 것이다.

4. 결론(Conclusions)

각 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 사용해 주어진 질량 한계에서 최대의 강성을 갖는 구조물의 위상을 찾는 시스템을 개발하였다. 전체 설계 가능 영역의 밀도 분포로써, 위상을 나타내었고, 이 위상은 개념 설계단계에서의 구조물의 형상으로 사용될 수 있다. 또, 물체의 기본적인 형상이 정해진 경우, 강성을 증가시키기 위한 리브의 형상을 결정하는데, 본 연구의 방법을 적용하였다.

설계 변수를 각 유한 요소의 밀도로 하였기 때문에, 2 차원 형상뿐 아니라, 3 차원 형상에도 적용 가능하다. 또, homogenization method의 경우, 2 차원 설계 변수의 개수가 각 유한 요소 개수의 3 배, 3 차원 설계 변수의 개수가 각 유한 요소 개수의 6 배인데 비해, 본 연구의 설계 변수의 개수는 2.3 차원 모두 유한 요소의 개수와 일치하므로, 전체 최적화에 소요되는 계산량이 homogenization method에 비하여 적다.

설계 변수인 밀도와 재료의 특성과의 관계는 2.4 절의 식 (2.3)과 같이 가정하였다. 이와 같이 가정하고 최적화 작업을 수행한 결과가 4.1 절 Canti-lever beam의 예에서 볼 수 있듯이, homogenization method로 구한 결과와 유사함을 알 수 있다. Homogenization method를 사용해서 밀도와 재료의 특성과의 관계를 얻으려면, 여러번의 유한 요소 해석을 해서 구한 값들을 Legendre 다항식을 사용하여 연결해 주어야 한다. 결국, 본 연구의 밀도와 재료의 특성과의 관계에 대한 가정이 이러한 복잡성을 피하면서, 보다 간편하고, 빠르게 위상 최적화 작업을 수행할 수 있도록 해준다.

본 연구에서 최적화 알고리즘으로 사용한 feasible direction method는 sequential approximate optimization algorithm에서와 같이 비선형 문제를 선형, 2 차 또는, convex의 문제로 근사화시켜 풀지 않기 때문에 시간이 좀 더 소요되는 경향이 있으나, 근사화를 시키지 않기 때문에 좀 더 정확하게 해를 구할 수 있다. 또, optimality criteria method와는 달리 여러 개의 목적 함수와 구속 조건을 동시에 최적화할 수 있다.

결론적으로, 본 연구에서 개발한 최적 위상 설계 시스템을 사용하여 개념 설계를 한다면, 설계자의 추상적이고, 직관적인 설계에서 벗어나, 보다 객관적이고, 합리적인 설계가 이루어질

수 있다고 확신한다. 특히, 물체의 형상에 대한 추측이 어려운 리브등의 설계에 보다 효율적이다. 또, 설계 비용의 절감과 아울러 주어진 조건하에서 설계자가 원하는 최적의 구조적 성능을 발휘하는 구조물의 형상을 찾을 수 있다.

REFERENCES

- [Bathe 1982] K.J.Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Civil Engineering and engineering mechanics series. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1982
- [Bendsoe 1988] M.P.Bendsoe and N.Kikuchi. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." Computer Method in Applied Mechanics and Engineering. Vol.71. pp.197-224. 1988
- [Haftka 1992] R.T.Haftka and Z.Gurdal. *Elements of Structural Optimization*, 3rd Edition. Kluwer academic publishers. 1992
- [Kirsch 1981] Uri Kirsch. "Optimum Structural Design : Concepts, Methods and Applications." McGraw-Hill Book Company, New York. 1981
- [Kumar 1992] Ashok V.Kumar and David C.Gossard. "Geometric modeling for shape and topology optimization." 4th IFIP WG 5.2. Geometric modeling in Computer-Aided Design.. Ed. Wozny, M. et. al. 1992
- [Sandgren 1992] E.Sandgren and E.Jensen. "Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm." Proceedings of 1992 SAE International Congress and Exposition. Detroit, Michigan
- [Suzuki 1991] K.Suzuki and N.Kikuchi. "A homogenization method for shape and topology optimization." Computer Method in Applied Mechanics and Engineering. Vol.93, No.2. pp.291-318. 1991
- [Topping 1983] B.H.V.Topping. "Shape optimization of skeletal structures : A review." Journal of Structural Engineering. Vol.109, No.8. pp.1933-1951. 1983
- [Yang 1994] R.J.Yang and C.H.Chuang. "Optimal topology design using linear programming." Computers and Structures. Vol.52, No.2. pp.265-275. 1994