

## 경계요소법을 이용한 계면균열의 응력특이성에 관한 고찰 ( Study on the Stress Singularity of Interface Crack by using Boundary Element Method )

조종우(인하대학교 기계공학과), 곽시영(인하대학교 기계공학과 대학원)

C. Cho ( Inha Univ), S.Y. Kwahk ( Graduate School, Inha Univ.)

### ABSTRACT

The boundary element method was used for studying singularities of an interface crack with contact zones. Because the contact zone size was extremely small in a tension field, a large number of Gaussian points were used for numerical integration of the Kernels. In order to estimate the contact zone size, iteration method was used. The interface crack tips with contact zones showed no oscillatory behavior and J-integral values across the interface were conserved.

### 1. 서론

계면균열(interface crack)은 서로 다른 두 재료가 하나로 접합되었을 때 그 접합면에 존재하는 균열을 지칭한다. 이러한 균열은 금속 용접이나 접착제를 사용한 접착, 복합재료에서 기자(matrix)와 섬유(fiber)사이의 경계면 등에 존재할 수 있다.

계면균열에 대한 연구는 공학적 응용면에서 중요시 되므로 많은 사람들의 관심을 끌어왔다. 하지만 계면균열을 하중시 열린선단(open crack tip)을 가진 균열로 가정한 1959년 Williams[1] 이후의 많은 연구들은 균열 선단에서 응력장의 진동(oscillatory singularities)이 나타나고, 경계면이 충돌되는 등 물리적으로 적합하지 않은 해를 구하였다. 이것을 해결하기 위하여 몇 사람에 의해 새로운 모델이 제안되었고 그 중 Comninou[2]는 접촉역(contact zone)을 가진 단한 균열 선단(closed crack tip)을 가진 모델(Fig.1)을 제안하여 응력장의 진동현상과 경계면의 충돌현상을 제거시켰다.

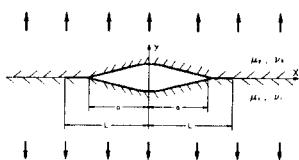


Fig 1 The interface crack model with closed tips

본 연구에서는 인장하중과 전단하중에서 Comninou의 계면균열 모델을 경계요소법을 이용하여 수치 모델링하였다. 모델은 평면변형 상태에 있으며 열린선단을 가진 균열로 가정한 모델과는 다른 응력확대계수(stress intensity factor, K)가 구해진다. 또 다른 파괴변수로서 J적분값이 계면균열에서도 적분경로에 대해 무관한 성질이 있음을 보이고, J적분값과 응력확대계수와의 관계식을 이용하여 응력확대계수를 구함으로써 계면균열에서도 보존적분을 이용할 수 있음을 보였다.

### 2. 경계요소에 의한 수치해석

#### 2.1 경계요소법

경계요소법은 물체의 경계에서만 요소를 분할하며 경계에 대한 변위와 응력벡터(traction)사이의 적분관계를 이용하여 해석하는 기법이다.

본 연구에서 다루려는 계면균열모델에서 선단에 형성되는 응력 분포를 고찰하기 위하여 균열 주위의 경계요소를 매우 작게 분할하고 균열선단에 형성되는 접촉역의 크기를 해석한다. 이러한 접촉문제에 대해서는 경계에서만 요소를 나누어 고려하는 경계요소법이 유한요소법보다 효율적인 해석 방법으로 인식되고 있다.

#### 2.2 접촉문제

Fig2과 같은 두 물체의 접촉을 고려할 때, 경계요소법에서 접촉하는 경계요소의 절점이 다음 조건을 만족해야 한다.

### ① 평형 조건

### ② 변위의 연속조건

위 조건에 의해서 마찰력 없이 접촉하는 절점끼리의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_x^{[1]} + x^{[1]} &= u_x^{[2]} + x^{[2]} \\ u_y^{[1]} + y^{[1]} &= u_y^{[2]} + y^{[2]} \\ t_x^{[1]} &= -t_x^{[2]} \\ t_y^{[1]} &= -t_y^{[2]} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x, y$  는 절점의 좌표값이며  $t_x, t_y$  는 경계면에서  $x, y$  각각 방향의 응력벡터이다. 또한 [1] 과 [2] 는 각각 서로 다른 두 영역을 가르킨다.

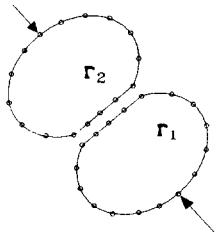


Fig 2. Contact of two body

마찰력이 없는 접촉면의 크기는 반복법(iteration method)을 사용하여 처음에는 임의의 접촉역을 가정하고 아래의 조건을 가지고 검토한다..

- ① 접촉역 끝단 바로 밖에서 경계면의 중첩이 생기는가?
- ② 접촉역안에 인장력이 존재하는가?

조건검토시 부적합한 경우가 발견되면 가정한 접촉역이 적합치 않다는 결론을 내리게 되므로 현재의 접촉법리를 재조정한다. 만일 ①번의 경우와 같이 중첩이 생긴다면 가정한 접촉역이 너무 작다는 말이므로 접촉역을 늘린다. 또한 ②번의 경우와 같이 접촉역안에서 인장이 나타나면 접촉역이 너무 큰 경우이므로 접촉역을 줄여야 한다. Fig 3은 위의 반복과정의 알고리즘을 보여주고 있다.

### 2.3 J적분

균열선단 부근의 절점의 변위나 응력을 이용하여 응력학 대개수를 구하는 것은 모델에 따라 민감하게 변하며 더 정확한 응력학대개수를 구하려면 균열선단 부근에서 경계요

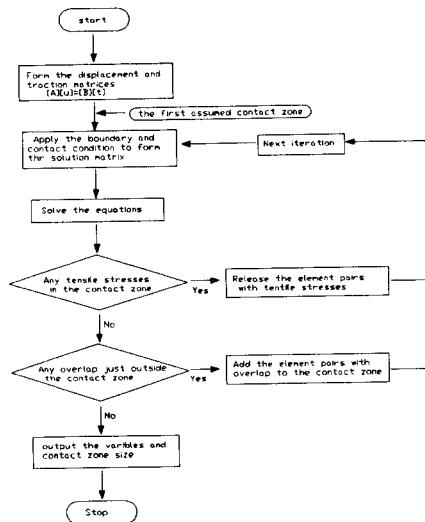


Fig 3 Flow chart for the contact iterations

소를 더욱 작게 분할해야한다. 그러나 J적분은 보존적분으로 그 값이 적분경로에 대해 무관한 성질을 가지며 이론적으로 Smelser와 Gurtin[3]은 계면균열에서 성립됨을 증명하였다.

J적분은 다음과 같이 표현된다.[4]

$$J = \int_r (W n_x - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) d\Gamma \quad (2)$$

여기서  $W$ 는 단위 체적당 변형에너지이고  $n_x$ 는 적분경로에 양의 방향으로 수직한 단위벡터이다. 또한  $t_i$  와  $u_i$ 는 각각 응력벡터와 변위를 나타낸다. 이것을 경계요소법을 이용하여 수치해석하기 위해 다음과 같은 형태로 바꿀 수 있다.

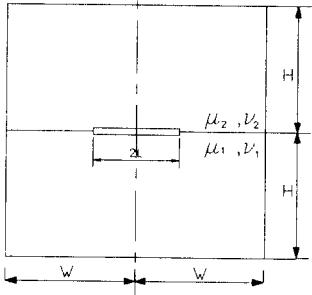
$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} n_x \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. 해석 모델

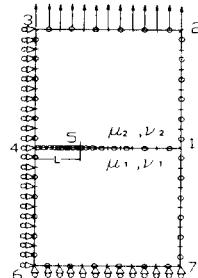
#### 3.1 인장하중

Fig 4는 인장하중을 고려한 모델이다. 이러한 해석모델에 대하여 등매개 2차요소(isoparametric quadratic element)를

사용하여 경계를 분할한 모양은 Fig 4(b)에 보였다. 요소망 구성시 모델의 대칭성을 고려하였고 W/H는 0.5이며 W = 1로 보았을 때 무차원화된 계면균열의 길이(L/W)는 1이다. 경계요소들은 연속경계요소(continuous element)를 사용하였다.



(a) Configuration of an interface crack



(b) Boundary elemeny model

Fig 4. An interface crackundertensileloading is shown for the configuration and numerical model. Boundary element method is used for analysis

성질이 다른 물체의 물성치는  $\beta = 0.4854$  을 사용하였고, 여기서 Dunders' Parameter인  $\beta$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = \frac{\mu_2(k_1 - 1) - \mu_1(k_2 - 1)}{\mu_2(k_1 + 1) + \mu_1(k_2 + 1)} \quad (4)$$

여기서  $k$ 는 평면응력경우에는  $k=(3-\nu)/(1+\nu)$ , 평면변형의 경우에는  $k=(3-4\nu)$ 로 표현되며  $\mu_1, \mu_2$ 는 각각의 전단계수(shear modulus)이다.

Fig 4(b)의 경계조건은 다음과 같다.

$t_x = 0, t_y = 0$	along 1-2 or 1-7
$t_x = 0, t_y = T$	along 2-3
$u_x = 0, t_y = 0$	along 3-4
$t_x = 0, t_y = 0$	along 4-5
$t_x = 0, u_y = 0$	along 6-7

(5)

또한 5-1면의 조건은 앞에서 언급한 접촉조건이 사용된다.

### 3.2 전단하중

전단하중의 모델링은 순수 전단상태를 만들기 위해 특별히 고려를 해야한다.

Fig 4(a)의 모델에 대해 전단하중을 고려한 경계요소의 분할은 Fig 5에 보였다. 경계요소모델의 W/H는 1이며  $\beta = 0.41$  인 재료가 고려되었고 W = 1로 보았을 때 무차원화된 계면균열의 길이(L/W)는 0.5이다. 또한 ①번 절점은 강체운동을 방지하기 위해  $u_x = 0, u_y = 0$  으로 고정하였다.

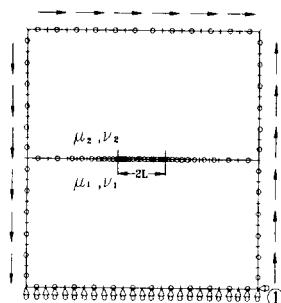


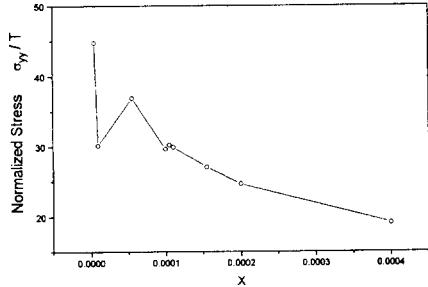
Fig 5 Boundary element discretization for interface crack in a shear field.

## 4. 결과 및 고찰

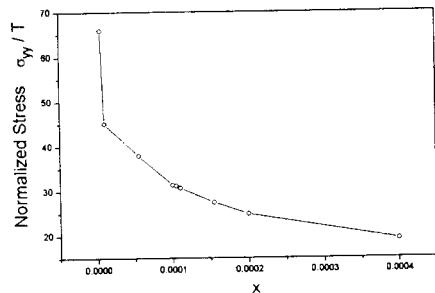
### 4.1 응력장의 진동현상

인장하중이 고려한 모델(Fig 4(b))을 열린선단을 가진 균열로 가정하여 해석하였을 때는 미소범위에서 응력의 진동현상(oscillatory)이 일어남을 Fig 6(a)에서 볼 수 있다. 그러나 Fig 6(b)의 해석결과와 같이 미소범위의 접촉역을 가진 닫힌선단을 가진 균열로 가정한 모델(Fig 7)을 사용했을 때는 이 진동현상이 없어짐을 볼 수 있다.

## 4.2 접촉역의 크기



(a) The stress in open crack



(b) The stress in close crack

Fig 6. Stress behaviors are shown near crack tip in the case of open tip and closed tip respectively

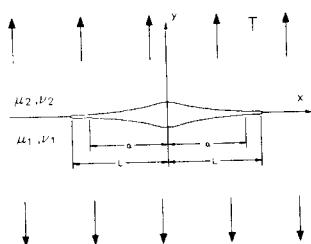


Fig 7 The interface crack in a tension

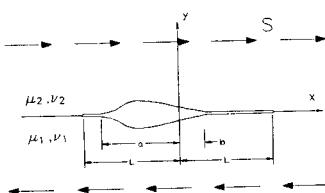


Fig 8 The interface crack in a shear field

접촉역의 크기는 앞의 알고리즘에 의해 구해진다. 인장하중시  $a/L = 0.99999 = 1 - 10^{-5}$ 가 되며 이는 Comninou[2]에서의  $|\beta| < 1/2$  일 때 접촉역의 크기 ( $a/L$ ) =  $1 - 10^{-4} \sim 1 - 10^{-7}$  의 범위를 만족한다.

전단하중에서의 접촉역은 Fig 9에 나타내었다.  $b/L$ 은 약 0.35이며, 이것은 Comninou[5]에서의 해석 결과와 대체로 일치하고 있음을 볼 수 있다. 여기서  $b/L$ 의 정의는 Fig 8에 보였다.

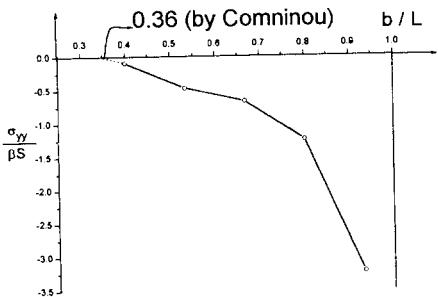


Fig 9 The left contact Zone and normal traction in  $(b,L)$

## 4.3 응력확대계수( $K$ )의 해석

본 연구에서는 응력확대계수를 결정하는 방법으로 응력외삽법(stress extrapolation method)을 사용하였다. 응력외삽법은 균열선단으로부터 거리  $r$ 에 대한 응력확대계수( $K$ )를 직선화하여,  $r = 0$ 로 외삽시켜서 균열선단에서의 응력확대계수를 구할 수 있다.

$\theta = 0$  선상에서 절점의 응력을 이용하였을 때, 응력확대계수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy} \quad (6)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}$$

응력외삽법에 의해 구한 인장하중시의  $K_{II}$ 값과 전단하중시의  $K_{II}$ 값을 Fig 10, Fig 11에 각각 나타내었다.

인장하중에서 응력외삽법을 이용해서 구한 무차원화된  $K_{II}/TL^{1/2}$ 은 약 1.63으로 이것은 Comninou[2]의 무한평판에서의 값인 1.87보다 낮은 값이 구해졌다. 이것은 본 연구에서 사용한 경계요소 모델의 경계조건이 유한 길이를

갖는 평판으로 고려되었기 때문이다.

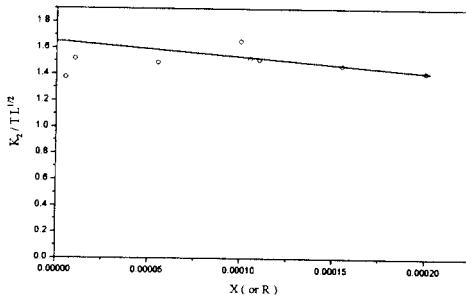


Fig. 10 The Stress Intensity Factor plot  
by stress extrapolation in a tension field

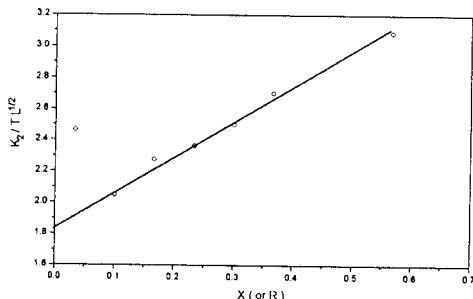


Fig. 11 The Stress Intensity Factor plot  
by stress extrapolation in a shear field

전단하중에 대한 무차원화된  $K_{II}/TL^{1/2}$  은 약 1.82로 이것은 Comninou[2]의 무한 평판에서의 값인 1.81과 잘 일치한다. Table. 1에서는 균열길이가 다를 때 경계요소법을 사용하여 구한  $K_{II}$  값과 Comninou[5]가 무한 평판에 대해서 계산한  $K_{II}$  값을 비교하였다.  $W/L$  이 클 때, 즉 무한평판에 가까울수록 이론치에 근접함을 알 수 있다.

Table 1 Comparison of  $K_{II}$  in a infinite plane  
with  $K_{II}$  in a finite one

균열길이 [L/W] ( W=1 )	$K_{II}$ (무한 평판)	$K_{II}$ (유한 평판)
0.5	1.278	1.29 (W/L=10)
1	1.808	1.87 (W/L=5)

#### 4.3 J적분

인장하중에서 계면균열에 대한 적분경로를 Fig 12에 나타내었다.

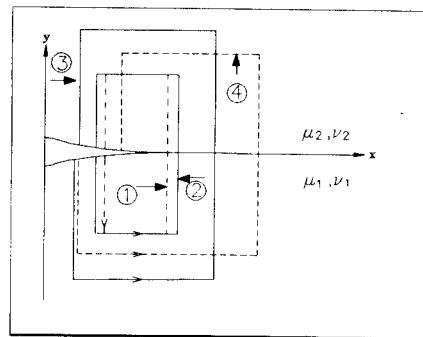


Fig. 12 J-integration paths for tensile load

J적분값과 응력확대계수와의 관계는 다음과 같다.[6]

$$J = \frac{1-\beta^2}{16} \left( \frac{1+k_1}{G_1} + \frac{1+k_2}{G_2} \right) K_H^2 \quad (8)$$

식(8)을 이용하여 Fig 12의 경로에 대해 구한 J적분값을 위의 관계식을 이용하여 응력확대계수를 구하면 인장하중 시 응력확대계수는 아래의 Table. 2 와 같다.

Table. 2 J-integral values and Stress intensity factors

경로	J적분	응력 확대 계수
①	0.0538	1.65
②	0.0560	1.68
③	0.0584	1.72
④	0.0464	1.54

#### 5. 결론

계면균열을 단垣선단을 가진 균열로 가정하여 수치모사한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 단垣선단을 가진 계면균열은 열린선단을 가진 균열에서 나타났던 전동특성을 갖지 않고, 인장하중에서도 계면상에 모우드 II의 응력확대계수가 존재하며 전단응력이 파괴에 큰 영향을 미침을 알 수 있다.
- 2) 단垣선단에서 나타나는 접촉력의 크기를 수치 모사에 의해 구할 수 있었다.
- 3) 이종재료에서 탄성계수의 비(ratio)가 크거나, 인장하중의 경우에는 접촉역의 크기가 매우 작으므로 인해 큰 오차(numerical error)가 발생하며 정확한 수치적분을 위해서는 많은 계산시간이 요구되므로 적절한 수치적분 기

법이 고려되어야 한다.

- 4) 계면균열에서도 J적분을 사용하여 응력확대계수(K)를 구  
할 수 있었다.

## 6. 참고문헌

- [1] M.L. Williams, "The stresses around a fault or crack in dissimilar media", Bulletin of the Seismological of America, vol.49, pp. 199-204, 1959.
- [2] M. Comninou, "The interface crack in a shear field", J. of Applied Mechanics, Vol.45, pp. 287-290, 1978.
- [3] R.E. Smeler and M.E. Curtin, "On the J-integral for bi-material bodies", Int. Journal of Fracture vol.13, pp. 382-384, 1977.
- [4] M.H. Aliabadi and D.P. Rooke, "Numerical Fracture Mechanics", Computational Mechanics Publications, 1991
- [5] M. Comninou, "The interface crack", J. of Applied Mechanics, Vol.44, pp. 631-636, 1977
- [6] J.H. Park, "Application of Conservation Integrals and Analysis of Plastic Deformation in an Interfacial Crack", Ph.D Thesis, KAIST, 1987