

## Generalized Stochastic 페트리네트를 이용한 유연생산시스템의 성능 평가

### Performance Evaluation of FMS Using Generalized Stochastic Petri Nets

서경원,<sup>\*</sup> 박용수,<sup>\*</sup> 박홍성,<sup>\*\*</sup> 김종원<sup>\*\*\*</sup>

\*서울대학교 대학원 기계설계학과

\*\*강원대학교 제어계측공학과

\*\*\*서울대학교 기계설계학과

#### ABSTRACT

A symbolic performance analysis approach for flexible manufacturing systems (FMS) can be formulated based on the integration of Petri Nets (PN) and moment generating function (MGF) concept. In this method, generalized stochastic Petri Nets are used to define performance models for FMS, then MGF based approach for evaluating stochastic PN is used to derive performance parameters of PN, and finally system performance is calculated. A GSPN model of machine cell is shown to illustrate the proposed method for evaluating such performance indices as production rate, utilization, work-in-process and lead time. The major advantage of this method over existing performance evaluation of FMS is the ability to compute symbolic solutions for performance. Finally, future research toward automating performance measure for GSPN models of FMS is discussed.

#### 1. 서론

자동화 생산 시스템을 분석하기 위해 이를 이산 현상 시스템으로 보고, 그 모델의 유효성과 성능을 평가하는 방법이 제시되어 왔다. 이를 통해 설계변수의 결정, 성능 예측 및 스케줄링에의 적용, 그리고 실시간 운용에 걸쳐 다양한 응용이 있다. 이러한 노력 중 이산 현상 시스템을 기술하는 한 방법인 페트리네트를 적용하여 자동화 시스템의 모델링과 성능을 평가한 다양한 연구가 수행되어 왔다.

Molloy[4]는 확률 페트리네트와 마코프 체인이 같음을 보여 통신 시스템에서의 단위 시간당 처리량과 평균 지연을 구하였지만, 무한대의 상태 수를 임의로 줄여 근사적으로 해석하였다. Balldoo[2]는 기계 3대와 부품 2종의 유연생산시스템을 큐잉 네트워크와 Generalized Stochastic 페트리네트(GSPN)으로 각각 해석, 유연생산시스템의 스케줄링과 공정 유연성을 고려한 모델로 GSPN이 적합함을 보였으나 유연생산시스템의 큰 상태 수를 모두 고려하여 마코프 체인으로 해석

하기 어려우므로 상태를 제한하였다.

Viswanadham[6]과 Al-Jaar[1]도 GSPN을 이용, 자동화 시스템을 해석하여 성능 지표를 구하였지만 그 해석을 단순한 시스템 - 이송 라인, 또는 컨베이어 벨트로 구성된 유연생산시스템 등 -에 적용, 복잡한 시스템에서 큰 상태 수가 나오는 시스템의 해석의 한계를 보였다.

본 논문에서는 기존의 페트리네트를 이용한 자동화 생산 시스템이 상태 수가 큰 실제 시스템에 적용하기 어려운 단점을 보완하기 위해 모멘트 생성 함수를 응용하여 성능 지표를 해석적으로 구하는 Guo[3]의 방법을 이용, 유연생산시스템의 성능 평가를 하고자 한다. 그리고 이러한 방법을 유연생산시스템의 한 예인 가공셀에 적용, 그 유효성을 확인한다.

본 논문에서 포함하는 내용은 다음과 같다.

첫째, 유연생산시스템의 해석적 성능 평가를 위해 확률 개념이 도입된 Generalized Stochastic 페트리네트를 도입하고, 이를 해석하기 위해 모멘트 생성 함수를 적용시키는 기법을 수행한다.

둘째, 해석 결과를 시뮬레이션과 비교, 제시된 성능 해석의 타당성을 보인다.

셋째, 유연생산시스템의 설계변수의 결정을 위한 성능 지표를 제시한다.

본 논문의 제 2장에서는 Generalized Stochastic 페트리네트와 모멘트 생성 함수를 이용한 페트리네트의 성능 평가 방법을 소개하고, 제 3장에서 성능 평가 기법을 적용할 가공셀을 선정하고 성능 평가의 기법을 적용하여 그 결과를 검토하고 제 4장에서 결론과 향후 연구과제를 기술한다.

## 2. 페트리네트과 모멘트 생성 함수 기법

### Generalized Stochastic 페트리네트

정의 1. Generalized Stochastic 페트리네트는 여섯 개의 요소( $P, T, I, O, M_0, F$ )로 된 집합으로 이루어져 있다. 이 때  $(P, T, I, O, M_0)$ 은 기존의 페트리네트를 의미하며  $T$ 는  $T_I$ 와  $T_E$ 로 나뉘고,  $F: R[M_0] \times T \rightarrow R$ 은 각각의 마킹  $M \in R[M_0]$ 에서  $t \in T$ 로의 firing 함수이다. 그리고  $t \in T_I$ 는 시간이 없는 트랜지션이고  $t \in T_E$ 는 지수함수적으로 분포된 시간을 갖는다.

Generalized Stochastic 페트리네트에는 두 종류의 마킹이 있다. vanishing 마킹은 최소한 하나의 가능한 시간을 갖지 않는 immediate 트랜지션을 갖는 마킹이고, tangible 마킹은 지수분포 트랜지션만이 가능한 마킹이다.

tangible 마킹은 enabled된 어떤 마킹도 fire될 수 있다. 그 확률은 enabled된 트랜지션의 firing rate에 비례한다. 그리고 vanishing 마킹의 firing 규칙은 다음과 같다. (1) 하나의 immediate 트랜지션만이 fire될 수 있다. (2) 동시에 일어날 수 있는 트랜지션은 연속적으로 일어난다. (3) 서로 충돌이 일어나는 트랜지션인 경우에는 그 중 하나의 트랜지션만이 fire된다.

### 모멘트 생성 함수를 이용한 접근 방법

Guo[3]는 모멘트 생성 함수를 이용하여 확률 페트리네트를 해석하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 모멘트 생성 함수, 신호 흐름 선도로부터의 Mason 법칙을 통합하여, 확률적으로 모델 되는 이산 현상 시스템의 성능을 해석적으로 구할 수 있게 한다.

모멘트 생성 함수는 다음과 같이 정의한다.

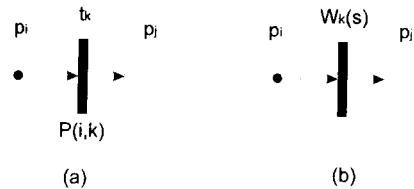


Fig. 1 전달함수의 정의

### 정의 2. 모멘트 생성 함수

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} f(t) dt$$

$f(t)$  : 확률밀도함수

모멘트 생성 함수는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} M(s)|_{s=0} = E(t^n)$$

$n=1$  일 경우 확률변수  $t$ 의 평균값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(t) = \frac{\partial}{\partial s} M(s)|_{s=0}$$

페트리네트의 특별한 경우로 트랜지션이 하나의 입력 플레이스와 출력 플레이스를 갖고, 하나의 토큰만이 있을 때 이를 상태기 페트리네트라고 한다.

상태기 페트리네트에서  $P(i, k)$ 를  $p_i$ 에서  $p_j$ 로 가는 트랜지션  $t_k$ 가 일어날 확률이라고 하자. 그러면 전달 함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

### 정의 3. 전달함수(transfer function)

$$W_k(s) = P(i, k) M(s)$$

이와 같이 정의한 전달함수를 이용하면 페트리네트가 신호 흐름으로 나타내어진다.(Fig. 1.(b)) 신호 흐름으로 나타내어진 시스템은 Mason 법칙에 의해 전체 이득을 구할 수 있다.

## 3. 유연생산시스템 성능 평가

유연 생산 시스템의 성능 평가를 위해 기본 구성 요소 중의 하나인 가공셀을 먼저 해석한다.

본 연구에서는 Fig. 2의 배치와 같은 가공셀을 해석한다. 가공셀은 가공을 위한 공작 기계와 부품의 운송을 위한 S/C (Stacker Crane), 그리고 완제품이나 반제품을 임시로 저장해 두는 AS/RS (Automated Storage/Retrieval System) 등으로

이루어져 있다.

부품은 입력 큐를 통해 들어오게 되고, 기계의 상태에 따라 기계로 반송되거나 AS/RS로 저장된다. 기계가 다음 작업을 할 수 있는 경우, AS/RS에 저장되어 있는 부품이 선입선출법의 스케줄링에 따라 먼저 처리되고 그 다음에 입력 큐로부터 투입되는 부품을 처리한다. 가공이 끝난 부품은 기계에서 바로 셀을 빠져나가도록 되어 있다. 부품의 가공은 한 공정으로 이루어져 있고, 한 부품 종만을 가공한다.

### 페트리네트 모델링

가공셀의 배치와 부품의 공정을 고려한 페트리네트 모델은 Fig. 3과 같다. Generalized Stochastic 페트리네트를 구성하기 위해 공정상의 모든 시간을 부품 투입 비율, 부품 가공 비율, 이송 비율로 기술하고 각각의 비율은 지수 함수 확률 분포이다.

부품 투입 비율은 단위 시간당 입력 큐로부터 부품이 투입되는 비율  $\lambda$ 로 나타내고 가공셀의 경우 부품 투입 비율은 이전 공정에서의 생산 비율, 이전 공정이 없는 경우에는 부품 셋업 비율이 된다. 부품 가공 비율은 공작 기계가 단위 시간에 가공할 수 있는 부품 비율  $\mu$ 로, 이송 비율은 S/C 이 단위 시간당 부품을 옮기는 비율  $r$ 로 나타낸다.

### 정상 상태 확률 산출

페트리네트 모델로부터 나온 reachability graph는 상태기 페트리네트로 나타낼 수 있는데(Fig.

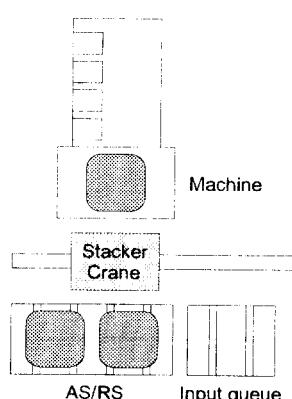


Fig. 2 가공셀의 배치도

4), 여기서 평균 순환 시간, 평균 체류 시간을 구하여 각 마킹의 정상 상태 확률을 구한다.

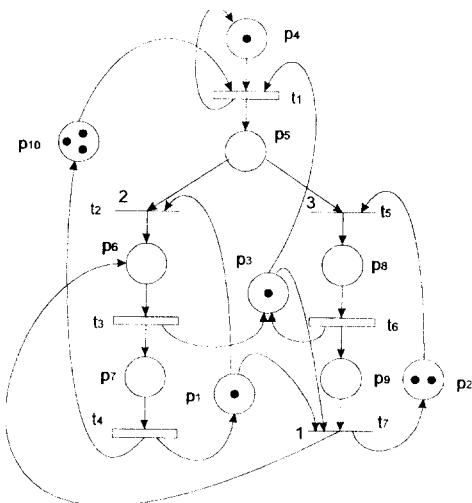


Fig. 3 가공셀의 페트리네트 모델

p1	machine available
p2	AS/RS available
p3	S/C available
p4	part available
p5	wait for machine or AS/RS
p6	move a part from input queue or AS/RS to machine
p7	machining a part
p8	move a part from machine to AS/RS
p9	part in AS/RS
p10	machining cell available
t1	start & completion of input (exponentially distributed input wait time with rate $\lambda$ )
t2	start move from input queue to machine
t3	completion of move (exponentially distributed moving time with rate $r$ )
t4	completion of machining (exponentially distributed machining time with rate $\mu$ )
t5	start move from machine to AS/RS
t6	completion of move (exponentially distributed moving time with rate $r$ )
t7	start move from AS/RS to machine

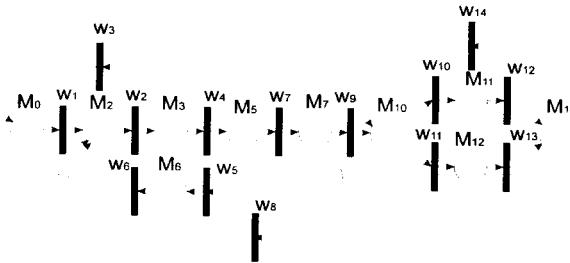


Fig. 4 상태기 페트리네트

평균 순환 시간은 한 상태에서 다시 같은 상태로 돌아오는 데에 걸리는 평균 시간으로 다음과 같이 구한다.

$$W_{E00'}(s) = \frac{W_1(s) W_2(s) W_3(s) (1 - (L_3 + L_4))}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4)}$$

$$L_1 = W_2(s) W_4(s) W_5(s) W_6(s)$$

$$L_2 = W_2(s) W_4(s) W_7(s) W_8(s)$$

$$L_3 = W_3(s) W_{10}(s) W_{12}(s) W_{14}(s)$$

$$L_4 = W_9(s) W_{11}(s) W_{13}(s) W_{14}(s)$$

$$T_{00'} = \frac{\partial}{\partial s} W_{E00'}|_{s=0}$$

평균 체류 시간은 한 상태가 유지되는 평균 시간으로 평균 순환 시간 중 자신의 상태에서 enable한 트랜지션만의 시간을 고려하고 나머지 시간은 무시하면 구할 수 있다.  $M_3$ 의 평균 체류 시간은 다음과 같다.

$$W_{E00'}(s) = \frac{W_1(0) W_2(0) W_3(0) (1 - (L_3 + L_4))}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4)}$$

$$T_{3'00'} = \frac{\partial}{\partial s} W_{E00'}|_{s=0}$$

정상 상태 확률은 정상 상태에서 한 상태가 존재할 비율로 평균 순환 시간 중 그 상태의 평균 체류 시간의 비로서 나타낸다.

$$P(M_i) = \frac{T_{i'00'}}{T_{E00'}}$$

#### 가공설 성능 평가 해석 결과

페트리네트 모델에서 모든 마킹의 정상 상태 확률로부터 단위 시간당 생산량, 각 자원의 효율, 재공 그리고 리드 타임 등 성능 지표를 구할 수 있다[7]. 위에서 구한 정상 상태 확률에서 유도된

성능 지수들 - 단위 시간당 생산량, 효율, 재공, 리드 타임 등 - 은 변수 ( $\lambda, \mu, r$ )에 대한 완전식으로 나온다. 설계변수를 Stacker Crane의 평균 반송 시간으로 하고,  $\lambda=6/h$  (평균 투입 대기 시간 10분),  $\mu=6/h$  (평균 가공 시간 10분)으로 하여 구한 결과는 S/C의 반송시간  $x$ [분]만의 함수가 되고 이를 시뮬레이션 패키지로  $x$ 를 바꾸어 가며 구한 결과와 비교한 그래프는 다음 그림과 같다. 모멘트 생성 함수 기법에 의해 해석적 방법으로 구한 결과는 시뮬레이션 결과와 일치함을 알 수 있다.

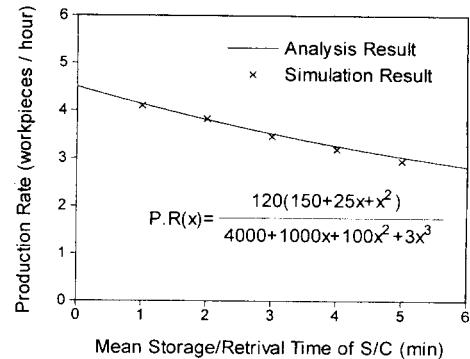


Fig. 5 단위 시간당 생산량

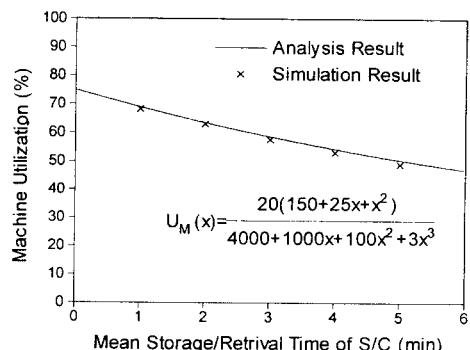


Fig. 6 기계의 효율

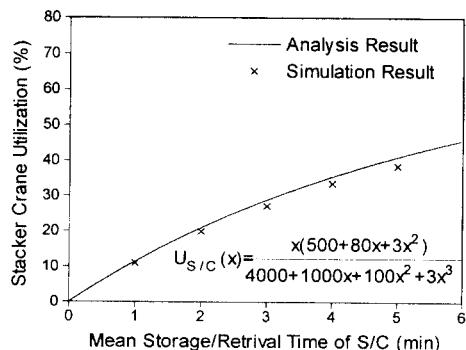


Fig. 7 Stack crane의 효율

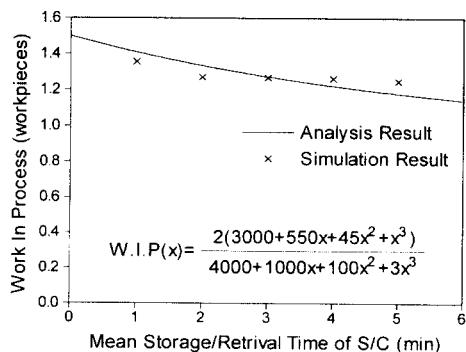


Fig. 8 재공

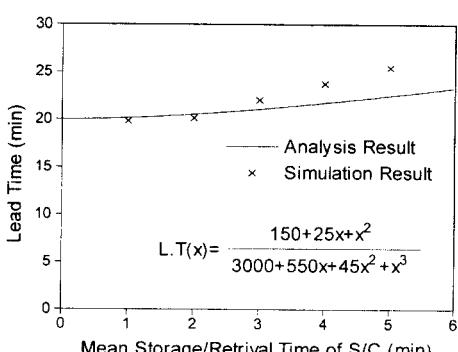


Fig. 9 리드 타임

#### 4. 결론

본 논문에서는 유연생산시스템의 성능 평가를 위한 모델을 제시하고, 그 적용례로서 가공셀의 성능 평가를 수행하였다. 이산 현상 시스템을 페트리네트로 모델링하고, 모멘트 생성 함수 기법을 도입하여 성능 지표를 구하고 시뮬레이션과 비교, 그 타당성을 검증하였다.

이러한 성능 해석을 자동적으로 수행하기 위해 Mason 법칙에 의한 이득을 자동 생성하는 코드 [8]를 이용, 주어진 모델로부터 원하는 성능 지표를 얻을 수 있는 유연생산시스템의 성능 분석기를 작성, 시스템의 설계변수의 결정 지원과 실시간 스케줄링의 의사 결정 지원 등을 할 수 있다.

#### 참고 문헌

- [1] Al-Jaar, R. Y. and A. A. Desrochers, "Performance Evaluation of Automated Manufacturing Systems Using Generalized Stochastic Petri Nets," *IEEE Trans. Robotics Automat.*, Vol. 6, No. 6, pp. 621-639, 1990.
- [2] Baldo G., G. Chiola, G. Franceschinis and G. M. Roet, "Generalized Stochastic Petri Nets For The Performance Evaluation of FMS", *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, pp. 1013-1018, 1987.
- [3] Guo, D., F. DiCesare and M. Zhou, "A Moment Generating Function Based Approach for Evaluation Extended Stochastic Petri Nets," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 321-327, 1993.
- [4] Molloy, M. K., "Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets," *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 31, No. 9, pp. 913-917, 1982.
- [5] Narahari, Y. and N. Viswanadham, "A Petri Net Approach to The Modelling and Analysis of Flexible Manufacturing Systems," *Annals of Operations Research*, Vol. 3, pp. 449-472, 1985.
- [6] Viswanadham, N. and Y. Narahari, "Stochastic Petri Net Models for Performance Evaluation of Automated Manufacturing Systems," *Inform. Decision Technol.*, Vol. 14, pp. 125-142, 1988.
- [7] Viswanadham, N. and Y. Narahari, *Performance Modeling of Automated Manufacturing Systems*, Prentice Hall, 1992.
- [8] Zhou, M. C., C. H. Wang and X. Zhoa, "Automating Mason's Rule and Its Application to Analysis of Stochastic Petri Nets," *IEEE Trans. Contr. Sys. Technol.*, Vol. 3, No. 2, pp. 238-244, 1995.