

2족 보행 로보트 시스템에 대한 슬라이딩 모드 제어 알고리듬의 적용에 관한 연구

A Study on the Application of Sliding Mode Control Algorithm to the Biped Robot System

한규범*, 백윤수**, 양현석***

*연세대학교 대학원 기계공학과 **연세대학교 기계설계학과 ***연세대학교 기계공학과

ABSTRACT

In the systems such as walking robots or high speed operating manipulators, the effect of nonlinear terms is important and can not be neglected. Therefore the application of linear control law to such systems is inadequate. Moreover, because of the mathematical modeling errors the systems may become unstable.

In this study, we designed a nonlinear controller with sliding mode scheme, which is robust to the modeling errors and applied this control algorithm to the 5 DOF biped robot system. Through the computer simulations, we examined walking characteristics and walking stability of the 5 DOF biped robot system.

Key Words : Biped Robot (2족 보행 로보트), Sliding mode Control (슬라이딩 모드 제어), Walking Characteristics (보행 특성), Walking Stability (보행 안정성)

1. 서 론

일반적인 산업용 로보트의 경우 용접용 로보트 또는 조립용 로보트와 같이 대부분 주어진 작업 공간 내에 고정되어 있는 매니퓰레이터의 경우가 대부분이며, 이동이 필요할 경우에는 바퀴 또는 궤도의 수단을 이용한다. 그러나 최근에 이르러 다리를 가진 보행 로보트에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다[3][4][5][6].

바퀴나 궤도에 비하여 보행 로보트 시스템은 계단 또는 험난한 지형상의 운동을 가능하게 하고 인간의 접근이 불가능한 영역에서의 작업을 가능하게 한다는 장점을 가지고 있다. 특히 2족 보행 로보트 시스템의 경우 궁극적으로 인간의 기능을 대체할 수 있는 로보트의 개발이라는 측면과 하자를 손상당한 장애자들을 위한 의용 공학분야에 대한 응용 효과가 대단히 크다는 점에서 연구의 필요성이 커지고 있다[1][2].

제어 시스템을 설계함에 있어서 대상계에 대한 수학적인 해석의 복잡성으로 인하여 시스템의 작동 범위가 작다는 조건하에서 수학적으로 선형화하여 해석하는 경우가 많다. 그러나 2족 보행 로보트 시스템과 같이 빠른 보행을 필요로 하는 경우에 있어서는 비선형 항의 영향을 무시할 수 없게 되므로 비선형 제어기의 설계가 필요하게 된다.

Lyapunov 안정화 이론과 Feedback linearization의 개념을 바탕으로 하는 비선형 제어 기법의 일종인 슬라이딩 모드 제어 기법은 시스템 모델링의 오차의 영향을 보상해 줄 수 있는 장인성을 가지고 있다[7].

본 연구에서는 5개의 자유도를 가진 2족 보행 로보트 모델에 대하여 운동 방정식을 유도하고 동적으로 안정성을 유지할 수 있도록 계획된 보행 궤적에 대하여 슬라이딩 모드 제어 알고리듬을 적용하여 시스템의 보행 특성과 안정성을 검토한다.

2. 시스템의 수학적 모델

5자유도를 가진 2족 보행 로보트의 모델은 Fig.1과 같다. 시스템의 운동은 몸체 부분에 위치한 4개의 회전 액추에이터와 각 발목에 위치한 1개의 회전 액추에이터에 의하여 이루어진다. 세개의 회전 액추에이터 $M_1(M_1^*)$ 과 M_2, M_3 은 몸체 부분을 들어올려 주는 역할을 함으로써 roll축에 대한 회전 운동을 가능하게 하고 두개의 회전 액추에이터 M_4 와 M_5 는 한쪽 다리가 들려진 상태에서 공중에 들어 올려진 다리와 지지되고 있는 다리를 회전 시켜 pitch축에 대한 운동을 가능하게 함으로써 보행이 이루어지게 하는 역할을 하도록 한다.

식(1),(2)에서 $T_r = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T$, $T_p = [T_4 \ T_5]^T$ 이고 각 행렬들의 계수는 부록에 나타내었다.

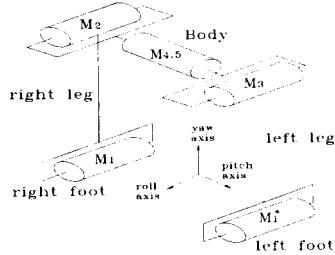


Fig.1 Conceptual Diagram of 5 DOF Biped Robot

2족 보행 로보트 시스템의 운동 방정식을 유도함에 있어서 보행 주기와 보폭이 작다고 가정하면 roll축에 대한 운동과 pitch축에 대한 운동을 독립적으로 해석할 수 있다. 이때 yaw축에 대한 운동은 무시될 수 있으며 각 조인트에서의 마찰력은 존재하지 않는다고 가정하고 발과 지면에서의 접촉점에서는 미끄러짐이 일어나지 않는다고 가정한다[6]. 또한 보행 중 두발이 동시에 지지하지 않는다고 가정하며 보행에 따른 디딤율(duty factor는 0.5로 가정한다.

Fig.2로부터 roll축과 pitch축에 대한 운동 방정식은 Lagrange 방법에 의하여 각각 식(1)과 식(2)의 형태로 구해질 수 있다. 이때 m_i 는 i 링크의 집중 질량, I_i 는 i 링크의 질량 중심에 대한 관성 모멘트, a_i 는 $i-1$ 링크의 끝단으로부터 i 링크의 질량 중심까지의 거리, r_i 는 i 링크의 길이로 정의되며 θ_i 는 Fig.2에서와 같이 정의된다. 여기서 i 는 지면에 지지하고 있는 링크로부터 차례로 부여된다.

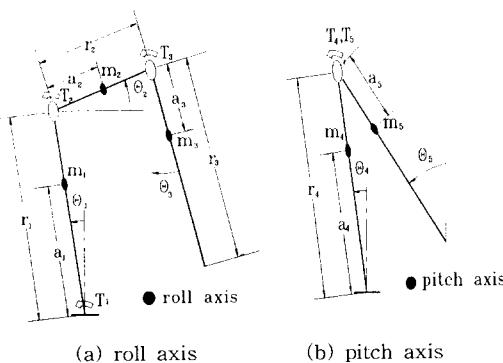


Fig.2 Biped Robot Model

$$A_r(\theta) \ddot{\theta} + B_r(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + C_r(\theta) = T_r \quad (1)$$

$$A_p(\theta) \ddot{\theta} + B_p(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + C_p(\theta) = T_p \quad (2)$$

3. 슬라이딩 모드 제어기의 설계

식(1),(2)로부터 시스템 방정식은 다음과 같다.

$$A(\theta) \ddot{\theta} + B(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + C(\theta) = \tau \quad (3)$$

또한 다입력 다출력 시스템에 대하여 슬라이딩 조건은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^T s \leq -\eta (s^T s)^{1/2} \quad (\eta > 0) \quad (4)$$

식(4)에서 벡터 s 는 다음 식(5)와 같이 상태 공간 R^n 에서 정의되는 변수로서 n 차원의 tracking 문제를 1차원의 stabilization 문제로 변환 시킨다.

$$s = \dot{\theta} + \Lambda \theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}_r \quad (5)$$

식(5)에서 $\dot{\theta}$ 는 추종 에러 $\theta - \theta_d$ 이고, Λ 는 양의 한정 행렬이며 $\dot{\theta}_r$ 은 다음과 같이 정의되는 reference 속도 벡터이다.

$$\dot{\theta}_r = \dot{\theta}_d - \Lambda \dot{\theta} \quad (6)$$

Lyapunov 함수 $V(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t) = \frac{1}{2} (s^T A s) \quad (7)$$

식(7)을 미분하면 다음 식(8)을 얻는다.

$$\dot{V}(t) = s^T (A \ddot{\theta} - A \dot{\theta}_r) + \frac{1}{2} s^T \dot{A} s \quad (8)$$

식(8)의 $A \ddot{\theta}$ 는 식(3)과 (5)를 이용하면 다음과 같이 치환될 수 있다.

$$A \ddot{\theta} = \tau - B \dot{\theta} - C = \tau - B(s + \dot{\theta}_r) - C \quad (9)$$

식(9)와 $\dot{A} - 2B = 0$ 인 성질을 이용하면 식(8)은 다

음과 같이 정리된다.

$$\dot{V}(t) = s^T(\tau - A \cdot \ddot{\theta}_r - B \cdot \dot{\theta}_r - C) \quad (10)$$

따라서 Lyapunov 안정 조건을 만족시키기 위한 제어 입력 τ 는 다음과 같다.

$$\tau = \hat{\tau} + k \operatorname{sat}(s/\Phi) \quad (11)$$

여기에서 $\operatorname{sat}(s/\Phi)$ 는 포화 함수(saturation function)로서 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$\operatorname{sat}(y) = \begin{cases} y & |y| \leq 1 \\ 1 & y > 1 \\ -1 & y < -1 \end{cases}$$

식(11)의 $\hat{\tau}$ 는 식(8)의 모델이 완별한 경우 함수 $V(t)$ 의 미분을 0으로 만들어주는 제어 입력으로 식(12)와 같다.

$$\hat{\tau} = \hat{A} \cdot \ddot{\theta}_r + \hat{B} \cdot \dot{\theta}_r + \hat{C} \quad (12)$$

식(12)에서 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 는 실제 시스템에 대하여 모델링된 시스템이다. 식(11)과 식(12)로부터 식(10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V} = s^T [\hat{A}(\theta) \cdot \ddot{\theta}_r + \hat{B}(\theta, \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta}_r + \hat{C}(\theta)] - \sum_{i=1}^n k_i \operatorname{sat}(s/\Phi) \quad (13)$$

식(13)에서 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 는 실제 시스템과 모델링 된 시스템과의 모델링 오차를 나타낸다.

한편 k 의 요소 k_i 는 식(14)로부터 결정된다.

$$k_i \geq |[\hat{A}(\theta) \cdot \ddot{\theta}_r + \hat{B}(\theta, \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta}_r + \hat{C}(\theta)]_i| + \eta_i \quad (14)$$

따라서 식(7)에서 정의된 시스템의 Lyapunov 함수 $V(t)$ 는 실제 시스템과 모델링된 시스템과의 오차의 범위를 예측할 수 있다면 다음과 같이 위하여 슬라이딩 조건을 만족시킨다.

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i| \quad (15)$$

4. 보행 궤적의 계획과 보행 안정성

보행 궤적의 계획에 있어서 필요한 사항은 각 보행 주기 간의 경계 조건을 만족 시킬 수 있어야 하고 지면과 충돌 시 시스템에 대한 충격력을 최대한 줄여줄 수 있어야 한다는 점이다.

디딤율(duty factor)이 0.5일 때 한 주기의 보행 후 회전한 다리는 다음 주기에서는 지면에 지지하게 되며 지지하고 있는 다리와 허공에서 회전하는 다리에 대한 파라미터와 변수도 교차된다. 따라서 한 보행 주기 종료 시점에서의 조건은 그 다음 보행의 초기 조건으로 사용할 수 있다. 이로부터 다음의 경계 조건들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \theta_{i,i+1}(0) &= -\theta_{3,i}(T), \quad \theta_{3,i+1}(0) = -\theta_{1,i}(T) \\ \dot{\theta}_{i,i+1}(0) &= -\dot{\theta}_{3,i}(T), \quad \dot{\theta}_{3,i+1}(0) = -\dot{\theta}_{1,i}(T) \\ \theta_{2,i+1}(0) &= 0, \quad \dot{\theta}_{2,i+1}(0) = 0 \\ \theta_{4,i+1}(0) &= \theta_{3,i}(T), \quad \theta_{5,i+1}(0) = \theta_{1,i}(T) \\ \dot{\theta}_{4,i+1}(0) &= \dot{\theta}_{3,i}(T), \quad \dot{\theta}_{5,i+1}(0) = \dot{\theta}_{1,i}(T) \end{aligned}$$

위 경계 조건들에서 하침자 i 는 각 보행 주기를 나타낸다. 경계 조건을 만족시키는 함수는 무수히 많으나 본 연구에서는 식(1),(2)의 운동 방정식을 선형화한 식으로부터 얻어진 함수를 계획 궤적으로 사용한다. 따라서 각 조인트에서의 계획 궤적은 식(16) ~ (19)과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_{1d}(t) &= \theta_{1d}(t) \\ &= \mu_1(\tanh \frac{\sqrt{\lambda}}{T} t \sinh \sqrt{\lambda}t - \cosh \sqrt{\lambda}t) \\ &\quad + \mu_2 + \mu_3 \cos \omega t \end{aligned} \quad (16)$$

$$\theta_{2d}(t) = \theta_r \sin^2(\frac{\pi}{T} t) \quad (17)$$

$$\theta_{3d}(t) = \theta_p(\sinh \sqrt{c}t / \tanh \frac{\sqrt{c}}{2} T - \cosh \sqrt{c}t) \quad (18)$$

$$\theta_{4d}(t) = \theta_p[(h_t+4)/(t/T)^3 - (2h_tT+6)/(t/T)^2 + h_t t + 1] \quad (19)$$

식(16) ~ (19)에서 T 는 보행 주기이고 θ_r 는 몸체를 들어올려주는 각도이며 $2\theta_p$ 는 다리의 최대 회전 각도이다.

보행 기구 시스템의 성능에서 중요한 점은 보행시의 안정성에 대한 사항이다. 즉 보행 중 넘어지지 않고 계획된 보행 궤적을 정확하게 추종할 수 있어야 한다.

보행 안정성에 대하여 각각의 평면, 즉 frontal 평면과 lateral 평면상에서 frontal 평면상의 안정성보다는 lateral 평면상의 안정성이 중요하다. 왜냐하면 frontal 평면 상의 운동은 단순히 보행을 위하여 전체의 몸을 약간 들어주는 역할을 하기 때문에 frontal 평면상의 무게 중심은 보행 전체를 통하여 항상 안정한 영역내에 존재할 수 있으

나 lateral 평면 상에서는 회전하는 다리가 지지하는 다리에 대하여 교차하는 운동을 하므로 무게 중심의 위치가 정성에 중요하게 된다.

Fig.3에서 보듯이 lateral 평면상의 무게 중심의 위치 x_c 는 식(20)에 의하여 구할 수 있다.

$$x_c = (m_4 x_4 + m_5 x_5) / (m_4 + m_5) \quad (20)$$

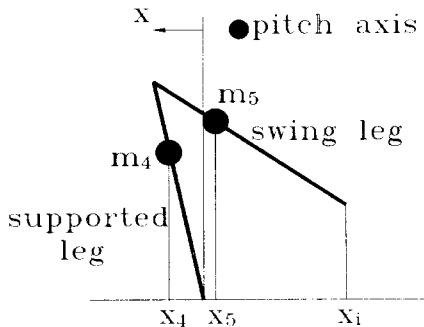


Fig.3 Stability of Biped Robot

Fig.3에서 회전하고 있는 다리의 끝점을 x_i 라고 하면 x_i 가 양의 값을 갖고 있는 상태에 대하여 무게 중심의 위치 x_c 역시 양의 값을 가지고 있어야 안정할 수 있다. 또한 x_i 가 음의 값을 갖고 있는 상태에 대하여는 무게 중심의 위치 x_c 역시 음의 값을 가져야 한다.

이상적인 경우, 즉 보행시 x_i 와 x_c 가 반대 부호를 가지는 불안정 영역이 제거되기 위하여 두 다리가 수직인 경우에 다리의 교차가 이루어져야 하며 가급적 불안정 영역이 전체 보행 주기에서 무시할 수 있을 정도로 작도록 보행 궤적을 계획하여야 한다.

이러한 보행 안정성과 관련되어 있는 요소는 보행의 폭과 보행의 주기이다. 보행의 폭은 보행 속도와 관계되는 요소로서 보행의 폭을 크게 할 수록 보행 속도를 빨리 할 수 있으나 너무 커지면 추종 성능이 떨어지고 보행 자체가 불가능하게 된다. 또한 보행 주기가 커지면 추종 성능은 좋아지나 보행 속도가 느려지고 보행 시 불안정한 영역이 생길 수도 있다. 따라서 보행 주기와 보행의 폭은 보행 속도와 추종 성능, 보행 안정성 등에 중요한 영향을 주게된다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션

본 연구에서는 보행주기 T 를 0.5(sec)로 하고 몸체의 둘림각 θ_r 을 5° , 다리의 최대 회전각 $2\theta_p$ 를 10° 로 하였으며, 샘플링 속도는 1(ms)로 하여 4절에서 계획된 궤적에

대하여 각 조인트에서의 추종 성능을 관찰하였고 lateral 평면상에서의 안정성에 대하여도 고찰하였다.

제어기의 설계에 있어서 모델링 오차는 실제 시스템에 대하여 최대 20%의 범위를 가진다고 가정하였다.

Table.1과 Table.2는 본 연구에서 사용한, frontal 평면과 lateral 평면에서의 2족 보행 기구 시스템에 대한 시스템 파라미터의 값을 보여준다.

Table.1 Values of parameters of biped robot (frontal plane)

i	m_i (kg)	I_i ($kg \cdot m^2$)	r_i (m)	a_i (m)
1	0.560	4.17×10^{-3}	0.308	0.2630
2	0.664	9.00×10^{-4}	0.075	0.0375
3	0.560	4.17×10^{-4}	0.308	0.0450

Table.2 Values of parameters of biped robot (lateral plane)

i	m_i (kg)	I_i ($kg \cdot m^2$)	r_i (m)	a_i (m)
4	0.892	6.21×10^{-3}	0.308	0.2630
5	0.892	6.21×10^{-3}	0.308	0.0450

또한 3절의 슬라이딩 모드 제어기의 설계에서 결정해 주어야 설계 파라미터 λ , η , Φ 들은 시스템의 요구 성능 등 제반 사항들을 고려하여 선택해 주어야 하며[7] 본 연구에서는 Table. 3과 같이 설계 파라미터를 선택하였다.

Table.3 Parameters of sliding mode controller

η	λ	Φ
2	30	1.5

Fig.4 ~ Fig.8은 계획 궤적 $\theta_{1d} \sim \theta_{5d}$ 에 대한 시스템의 추종을 초기 자세로부터 5 step 동안 컴퓨터 시뮬레이션한 결과를 보여준다.

Roll 축에 대한 초기 자세 $\theta_1(0), \theta_2(0), \theta_3(0)$ 은 모두 2° , pitch축에 대한 초기 자세 $\theta_4(0), \theta_5(0)$ 은 0° 로 하였고 초기 속도는 모두 $0(\text{rad/sec})$ 로 하였다.

Single-supported phase에서 Double-supported phase로 변환하는 한 보행이 끝나는 시점에서 지지 다리와 회전 다리의 회전각은 서로 교차되며, 4절의 경계 조건에서 보듯이 한 보행의 종료 시점의 각도와 각속도는 다음 보행의 초기값으로 주어진다.

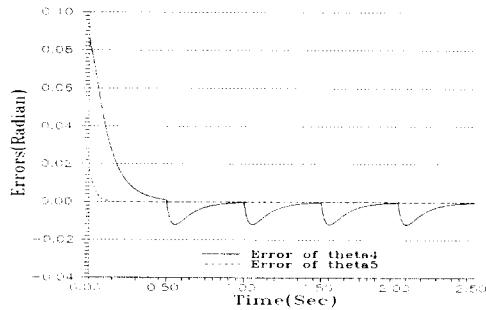


Fig.10 Errors(lateral plane)

Fig.11 ~ Fig.13은 frontal 평면상의 운동에 관련된 T_1 , T_2 , T_3 를 나타낸다. 한 보행 주기후 다음 보행 주기에서는 지면에 지지하고 있는 다리와 허공에서 회전하고 있는 다리가 서로 교차되므로 이에 관련된 제어 입력도 역시 바뀌어야 된다. 즉 Fig.1에서 액츄에이터 M_1 , M_2 , M_3 의 제어입력 T_1 , T_2 , T_3 는 다음 보행 주기에서는 M_1^* , M_3 , M_2 에 의한 제어 입력으로 대체된다.

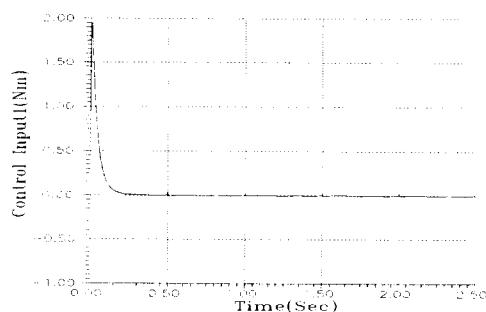


Fig.11 Control input T_1

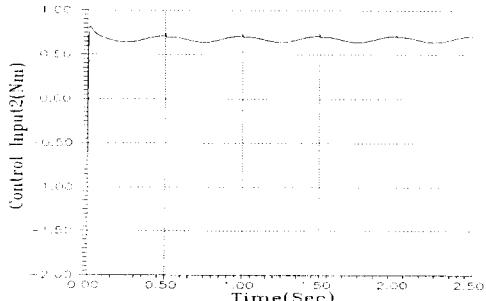


Fig.12 Control input T_2

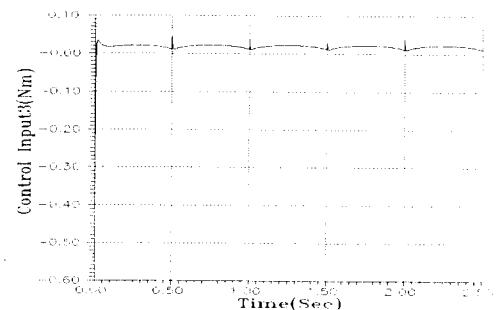


Fig.13 Control input T_3

Fig.14 ~ Fig.15는 lateral 평면상의 운동에 관련된 제어입력 T_4 , T_5 를 나타낸다. Frontal 평면상의 경우와 마찬가지로 M_4 , M_5 에 의한 제어입력 T_4 , T_5 는 다음 보행 주기에서는 M_5 , M_4 에 의한 제어 입력으로 대체된다.

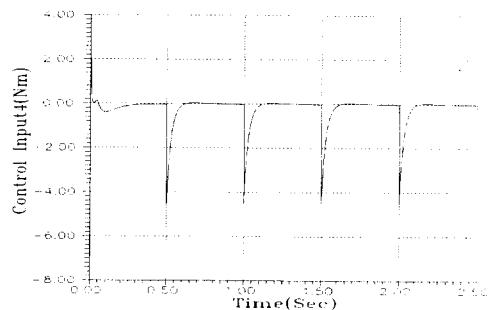


Fig.14 Control input T_4

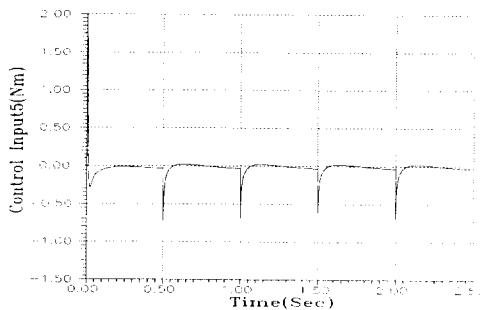


Fig.15 Control input T_5

Fig.16은 Fig.3에서 나타낸 바와 같이 지지하고 있는 발로부터 수직축에 대해 보행중 lateral 평면상의 회전하

그리고 그림에서 관찰할 수 있듯이 보행 주기보다 짧은 시간
이내에 모든 시스템의 응답이 계획 궤적에 대하여 추종
됨을 볼 수 있다.

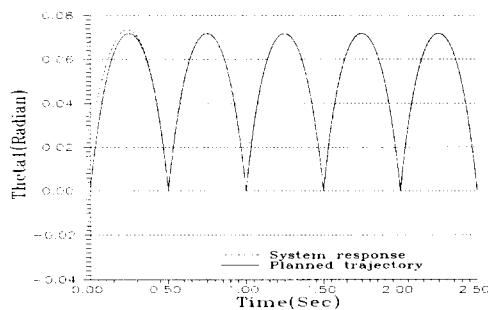


Fig.4 Planned trajectory of $\theta_1(t)$ and system response

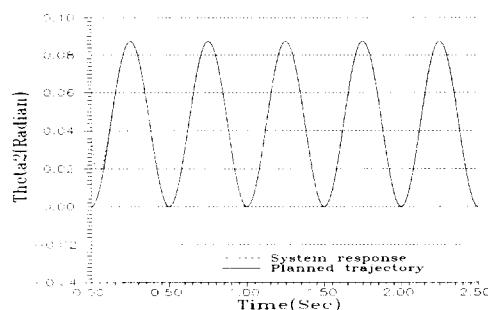


Fig.5 Planned trajectory of $\theta_2(t)$ and system response

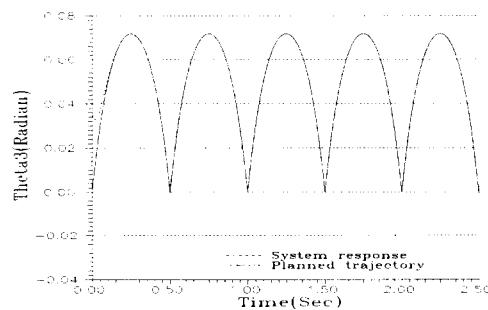


Fig.6 Planned trajectory of $\theta_3(t)$ and system response

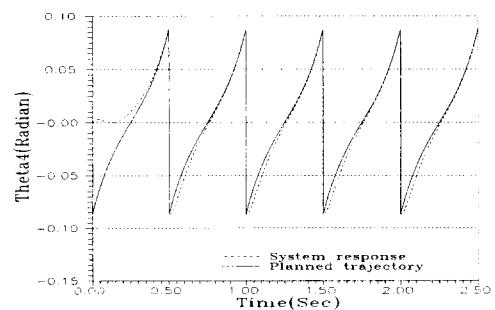


Fig.7 Planned trajectory of $\theta_4(t)$ and system response

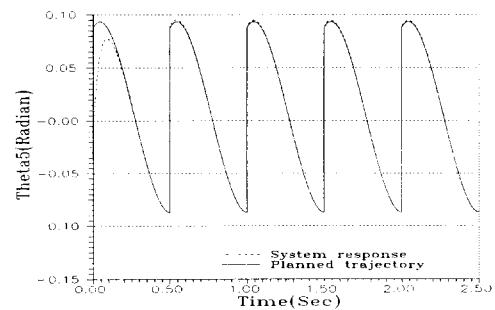


Fig.8 Planned trajectory of $\theta_5(t)$ and system response

Fig.9 ~ Fig.10은 각각 frontal 평면과 lateral 평면에
대하여 각 조인트의 계획 궤적에 대한 오차를 나타낸다.

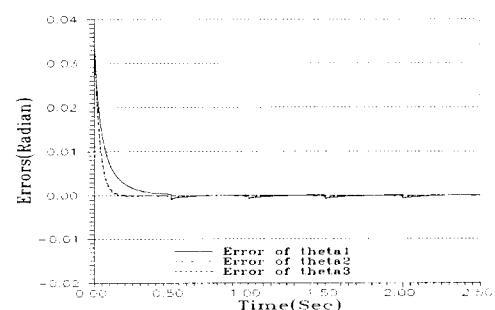


Fig.9 Errors(frontal plane)

는 다리의 끝점의 위치와 무게 중심의 위치를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 지지하는 다리와 회전하는 다리가 교차하는 시점에서 보행 로보트 시스템이 쓰러질 수 있는 불안정한 영역이 관찰된다. 즉, 4절에서 설명한 바와 같이 회전하는 다리의 끝점의 위치와 시스템의 무게 중심의 위치가 몸체를 중심으로 반대 쪽에 위치하는 시점이 생긴다. 그러나 보행 주기와 보행 폭을 위 시뮬레이션과 같이 선택한 경우 불안정한 영역은 전체 보행 주기에 비하여 무시될 수 있을 만큼 짧은 시간이므로 관성력에 의하여 시스템은 안정된 보행을 이룰 수 있다.

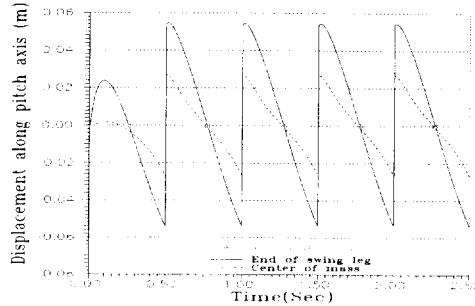


Fig.16 Stability of Biped Robot

Fig.17은 초기 자세로 부터 2 step 동안의 보행 과정을 그래픽한 결과이다.

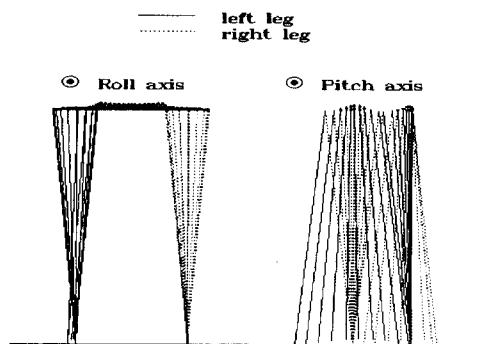


Fig.17 Graphical Simulation of Biped Robot

5. 결 론

본 연구에서는 5자유도를 가진 2족 보행 로보트 시스템에 대하여 슬라이딩 모드 제어 알고리듬을 적용하여 제어기의 성능과 보행 특성을 관찰하였다. 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

보행 로보트 시스템의 동적 안정도를 유지하도록 계획된 궤적에 대하여 설계된 슬라이딩 모드 제어기의 성능을 시뮬레이션 하였다. 이때 중요한 보행 안정성에 대하여는 보행 주기와 최대 보폭을 각각 0.5초와 10°로 계획한 경우 보행 안정성이 얻어질 수 있음을 관찰하였다.

6. 참고문헌

1. Todd, D. J., Walking Machines, 1985, Chapman and Hall.
2. Raibert, M. H., Legged Robot That Balance, 1986, The MIT Press.
3. Furusho, J. and Sano, A., 1990, "Sensor-Based Control of a Nine-Link Biped", Int. J. Rob. Res, Vol 9, No 2, pp 137-147.
4. Furusho, J. and Masubuchi, M., "A Theoretically Motivated Reduced Order Model For The control of Dynamic Biped Locomotion", J Dyn. Sys. Mea. Cont, 1987, Vol 109, pp 155-163.
5. Mita, T., et al., "Realization of a High Speed Biped Using Modern Control Theory", Int J. Con, 1984, Vol 40, No 1, pp 107-119.
6. Miura, H. and Shimoyama, I., "Dynamic Walk of a Biped", Int J. Rob.Res, 1984, Vol 3, No 2, pp 60-74.
7. Slotine, J. E., and Li, W., Applied Nonlinear Control, 1991, Prentice Hall.

부 록

(1) Frontal Plane에 대한 운동방정식의 계수

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 r_1^2 + m_3 r_1^2 \\
 a_{112} &= m_2 r_1 a_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_3 r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\
 a_{113} &= -m_3 r_1 a_3 \cos(\theta_1 - \theta_3), a_{122} = I_2 + m_2 a_2^2 + m_3 r_2^2 \\
 a_{123} &= -m_3 r_2 a_3 \sin(\theta_2 - \theta_3), a_{133} = I_3 + m_3 a_3^2 \\
 a_{21} &= a_{11}, a_{211} = a_{111}, a_{212} = a_{112}, b_{11} = b_{112} = b_{113} = 0 \\
 b_{11} &= (m_2 r_1 a_2 + m_3 r_1 r_2) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\
 b_{113} &= -m_3 r_1 a_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\
 b_{211} &= -(m_2 r_1 a_2 + m_3 r_1 r_2) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\
 b_{213} &= m_3 r_2 a_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\
 b_{31} &= m_3 r_1 a_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\
 b_{322} &= -m_3 r_2 a_3 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\
 c_{11} &= -(m_1 a_1 + m_2 r_1 + m_3 r_1) g \sin \theta_1 \\
 c_{12} &= (m_2 a_2 + m_3 r_1) g \cos \theta_2, c_{13} = m_3 a_3 g \sin \theta_3
 \end{aligned}$$

(2) Lateral Plane에 대한 운동방정식의 계수

$$\begin{aligned}
 a_{411} &= I_4 + m_4 a_4^2 + m_5 r_4^2, a_{412} = -m_5 r_4 a_5 \cos(\theta_4 - \theta_5) \\
 a_{4122} &= I_5 + m_5 a_5^2, a_{421} = a_{412}, b_{411} = b_{422} = 0 \\
 b_{412} &= -m_5 r_4 a_5 \sin(\theta_4 - \theta_5) \dot{\theta}_5 \\
 b_{421} &= -m_5 r_4 a_5 \sin(\theta_5 - \theta_4) \dot{\theta}_4 \\
 c_{41} &= -(m_4 a_4 + m_5 r_4) g \sin \theta_4, c_{42} = m_5 a_5 g \sin \theta_5
 \end{aligned}$$