

경사법에 의한 균질·등방성 대수층의 최적 매개변수 결정

권 오현*, ○ 조 효섭**, 이 성수***

1. 서론

현대사회가 발전되어감에 따라 수질이 악화되고, 반면에 맑은 물에 대한 욕구가 커짐에 따라 지하수에 관심이 커지고 있다. 지하수의 무분별한 사용으로 지하수가 고갈되거나 지반이 침하되고, 식생의 상태 등에 문제가 발생되고 있다. 또한 수(압)면 경사가 급해지면 오염물질의 유입이 촉진될 우려가 있다. 적절한 지하수 채수량의 결정이나 올바른 지하수 유동해석을 위해서는 대수층의 매개변수를 결정이 중요하다. 일반적으로 저류계수와 전달계수는 양수시험을 통하여 알 수 있지만, 이런 매개변수들은 대상 지역의 대표성을 갖지 못하므로, 유한차분법이나, 유한요소법 및 최적화 기법 등으로 지역의 대표성을 갖는 매개변수를 결정하고자 하는 연구가 많이 수행되고 있다.

Yeh⁽¹⁾ 등은 대수층의 전달계수 및 저류계수를 Theis의 방법에 의하지 않는 준선형화 기법으로 결정하였다. 또한, Hill⁽²⁾은 3차원 지하수 흐름해석에 공역경사법을 이용하였으며, 이것으로 여러방법의 효율을 비교 연구하였다. Yoon⁽³⁾ 등은 비균질·등방성인 비피압 대수층을 유한요소법으로 해석하였다.

본 연구는 역문제(inverse problem)를 구성하여 균질·등방성 매질을 갖는 피압대수층의 매개변수 결정하기위한 연구로서 최급강하법(steepest decent)⁽⁴⁾을 사용하여 지역의 대표 매개변수를 결정하였다. 이연구의 범위와 제한점은 다음과 같다.

- ① 지하수 흐름은 방사성흐름의 부정류상태이며, 매질은 균질성이고 등방성이라고 가정하였다.
- ② 대수층은 피압대수층이며, 연구 대상지역에는 불투수층이나 하천 등이 인접하지 않은 것으로 보았다.
- ③ 양수시험은 과도상태의 측정치를 사용하였으며, 그 밖에 피압대수층의 Theis 방정식 유도에 따른 가정(수평방향 투수계수만 고려하고 언직방향 투수계수 무시함)을 전제로 한다.

2. 피압 대수층의 부정류

2.1 지배방정식과 경계조건

일정 채수량 Q_w 을 우물에서 양수하는 경우, 피압대수층, 비정상, 방사상흐름에서 수두강하는 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(r, t) = H - h(r, t) \dots\dots\dots (1)$$

여기서, H : 양수 이전의 초기 수두

$h(r, t)$: 양수 이후의 수두

$\phi(r, t)$: 양수 이후의 수두강하

* 충남대학교 공과대학 토목공학과 교수
 ** 충남대학교 공과대학 토목공학과 박사과정
 *** 충남대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

대수층영역에서의 검사체적으로부터 유출 및 유입 유량 Q_1 과 Q_2 는 각각 식(2)와 식(3)으로 쓸 수

대수층영역에서의 검사체적으로부터 유출 및 유입 유량 Q_1 과 Q_2 는 각각 식(2)와 식(3)으로 쓸 수 있다.

$$Q_1 = k 2 \pi r b \frac{\partial h}{\partial r} \dots\dots\dots (2)$$

$$Q_2 = k 2 \pi (r+dr) b \left[\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) dr \right] \dots\dots\dots (3)$$

여기서 식(3)은 식(2)의 Taylor급수 1차항까지 사용하였다. 또한 Δt 동안 검사체적내의 지하수 체적의 변동은 식(4)와 같다.

$$\frac{dV}{dt} = Q_2 - Q_1 \dots\dots\dots (4)$$

식(4)의 좌변은 단위체적의 포화대수층으로부터 수두가 1 m 강하할때 방류되는 유량인 비저류량으로 나타내면 식(5)와 같다.

$$\frac{dV}{dt} = (\pi (r + dr)^2 - \pi r^2) b S_s \frac{dh}{dt} \dots\dots\dots (5)$$

여기서, S_s : 비저류량

또한 식(2)와 (3)을 식(1)의 수두강하로 고쳐쓰고, 식(5)와 함께 식(4)에 대입하고 정리하면 식(6)과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots (6)$$

여기서, S : 저류계수($S_s \cdot b$), T : 전달계수($k \cdot b$), k : 투수계수, b : 대수층의 깊이
이때 초기조건 및 경계 조건은 식(7) 및 식(8)과 같다.

$$\phi = 0, \quad t = 0, \quad \forall r [r_0, \infty] \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \phi}{\partial r} &= - \frac{Q_w}{2 \pi T}, \quad r \rightarrow 0, \quad \forall t > 0 \\ \phi &= 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \forall t > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

식(6)을 다음 식(9)와 같은 상사변수(similarity variable) U 을 도입하고 연쇄법칙을 사용하여 편미분방정식을 상미분방정식으로 변환하여 쓰면 식(10)과 같다.⁽⁵⁾

$$U = \frac{S r^2}{4 T t} \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dU^2} + \frac{1+U}{U} \frac{d\phi}{dU} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

여기서, U : 상사변수, r : 방사상거리, t : 수두강하 시간
이때 초기조건 및 경계조건은 식(11)와 (12)로 쓸 수 있다.

$$\phi(\infty) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} U \frac{d\phi}{dU} = \frac{-Q_w}{4\pi T} \dots\dots\dots (12)$$

식(10)은 상미분방정식이므로 적분하여 풀고, 이때 적분상수를 구하기 위하여 식(11)와 (12)을 사용하며, 식(10)의 해는 식(13)와 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Q_w}{4\pi T} \int_{\infty}^U \frac{e^{-U}}{U} dU \\ &= \frac{Q_w}{4\pi T} \int_U^{\infty} \frac{e^{-U}}{U} dU \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

식(13)의 적분항을 우물함수(Well function)으로 나타내면 식(14)와 같이 쓸 수 있으며, 이때 식(13)을 Theis의 비평형 방정식이라고 한다.

$$\phi = \frac{Q_w}{4\pi T} W(U) \dots\dots\dots (14)$$

식(14)의 W(U)을 우물함수라고 하며, 급수전개로 나타내면 식(15)과 같다.

$$W(U) = -0.577216 - \ln U + U - \frac{U^2}{2 \cdot 2!} + \frac{U^3}{3 \cdot 3!} - \dots\dots\dots (15)$$

식(14)을 여러 관측정이 있는 경우로 다시 쓰면 식(16)과 같다.

$$\phi_{i,j} = \frac{Q_w}{4\pi T} W(U)_{i,j} \dots\dots\dots (16)$$

여기서, i : 관측정의 수(양의 정수)
j : 수두강하 측정시간을 나타내는 일련번호

2.2 역문제의 구성

2.2.1 목적함수 및 제약 조건식

목적함수는 각 관측정의 수두강하와 계산치의 수두강하의 차이 곱의 합이 최소가 되도록 식(17)와 같이 구성하였다.

$$\min J = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} (\phi_{i,j} - \hat{\phi}_{i,j})^2 \dots\dots\dots (17)$$

$\phi_{i,j}$: i번째 관측정의 j번째 시간의 계산된 수두강하 값

$\hat{\phi}_{i,j}$: i번째 관측정의 j번째 시간의 관측된 수두강하 값

i = 1, 2, 3, ……………, N (N = 관측정의 총수)

j = 1, 2, 3, ……………, M (M = 관측 측정시간의 총수)

제약조건식은 식(18)과 같다.

$$\phi_{i,j} = \frac{Q_w}{4\pi T} W(U)_{i,j} \dots\dots\dots (18)$$

이때 식(17), (18)에서 시간과 공간 변수를 통합하면 다음의 모형이 된다.

$$\min J = \sum_{k=1}^I \frac{1}{2} (\phi_k - \hat{\phi}_k)^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

s. t.

$$\phi_k = \frac{Q_w}{4 \Pi T} W(U)_k \quad \dots\dots\dots (20)$$

여기서, $k : (j + (i-1) \times M)$ 일련의 정수(1,2, ,I)

2.2.2. 경사법에 의한 해법

경사법에서 최급강하법은 다음 식(21)과 같이 정의 된다.

$$X^{n+1} = X^n - \nabla y \Delta r \quad \dots\dots\dots (21)$$

여기서, $X = \begin{bmatrix} T \\ S \end{bmatrix}$ $\Delta r : \text{step size}$
 $n : \text{추적점의 수}$

$$\nabla y = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial T} \\ \frac{\partial J}{\partial S} \end{bmatrix}$$

식(21)에서 경사벡터 ∇y 는 식(19)으로부터 구하면 식(22), (23)과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial T} = \sum_{k=1}^I \left[(\phi_k - \hat{\phi}_k) \frac{\partial \phi_k}{\partial T} \right] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial J}{\partial S} = \sum_{k=1}^I \left[(\phi_k - \hat{\phi}_k) \frac{\partial \phi_k}{\partial S} \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

식(22)과 식(23)의 편미분식은 다음과 같이 중앙차분화로 나타내면 식(24), (25)와 같다.

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial T} = \frac{\phi_k(T + \Delta T, S) - \phi_k(T - \Delta T, S)}{2 \Delta T} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial S} = \frac{\phi_k(T, S + \Delta S) - \phi_k(T, S - \Delta S)}{2 \Delta S} \quad \dots\dots\dots (25)$$

여기서 Δs 와 ΔT 는 작은 임의의 값이다.

2.2.3. 경사법의 연산 절차

경사법의 연산단계는 다음과 같다.

i) $Iter = 0$, ΔT , Δs , Δr , ϵ 입력(여기서, ϵ 은 허용오차)

ii) 초기 T_0, s_0 값 입력

iii) $\sum_{k=1}^I \left[(\phi_k - \hat{\phi}_k) \right]$ 계산

iv) 식(24), 식(25)으로부터 $\frac{\partial \phi_k}{\partial T}$, $\frac{\partial \phi_k}{\partial S}$ 계산

v) 단계 iv)에서 구한 값으로부터 경사벡터 ∇y 값을 식(22), (23)로부터 계산

vi) 새로운 T_1, s_1 값을 식(21)로부터 계산

vii) $\nabla y \leq \epsilon$ 이면 연산 멈춤,

아니면 $T_0 = T_1, s_0 = s_1$ 으로 바꾸고, $Iter = Iter + 1$,

다시 ii) 단계로 돌아감.

3. 적용례 및 계산결과

3.1 적용자료

본 연구는 경기도 어느 피압대수층에서 양수정 1개, 관측정 4개소로 측정한 표 1의 수두강하 자료를 사용하였다.

표 1. 수두강하 관측자료

단위 : m

측정시간 (분)	관측정 #1	관측정 #2	관측정 #3	관측정 #4	측정시간 (분)	관측정 #1	관측정 #2	관측정 #3	관측정 #4
40	1.9700	.2440	.0330	.0020	1080	3.3200	1.5190	.6800	.0530
60	2.0600	.3320	.0770	.0050	1260	3.3500	1.5280	.6720	.0520
80	2.1500	.4200	.1150	.0080	1440	3.3800	1.5370	.6640	.0510
100	2.2400	.5080	.1500	.0110	1620	3.4100	1.5460	.6560	.0500
120	2.3300	.5960	.1850	.0140	1800	3.4400	1.5550	.6480	.0490
140	2.4200	.6840	.2200	.0170	1980	3.4700	1.5640	.6400	.0480
160	2.5100	.7720	.2550	.0200	2160	3.5000	1.5730	.6320	.0470
180	2.6000	.8600	.2900	.0230	2340	3.5300	1.5820	.6240	.0460
200	2.6900	.9480	.3250	.0260	2520	3.5600	1.5910	.6160	.0450
220	2.7800	1.0360	.3600	.0290	2700	3.5900	1.6000	.6080	.0440
240	2.8700	1.1240	.3950	.0320	2880	3.6200	1.6090	.6000	.0430
260	2.9600	1.2120	.4300	.0350	3060	3.6500	1.6180	.5920	.0420
280	3.0500	1.3000	.4650	.0380	3240	3.6800	1.6270	.5840	.0410
300	3.1400	1.3880	.5000	.0410	3420	3.7100	1.6360	.5760	.0400
320	3.2300	1.4760	.5350	.0440	3600	3.7400	1.6450	.5680	.0390
340	3.3200	1.5640	.5700	.0470	3780	3.7700	1.6540	.5600	.0380
360	3.4100	1.6520	.6050	.0500	3960	3.8000	1.6630	.5520	.0370
380	3.5000	1.7400	.6400	.0530					
960	3.2500	1.4720	.6500	.0410					
양수정으로 부터 거리	2 m	10 m	14.2 m	32.3 m	양수정으로 부터 거리	2 m	10 m	14.2 m	32.3 m

우물에서 양수량 $Q_w = 0.0104 \text{ m}^3/\text{min}$

3.2 계산 결과

다차원 조사기법 중 하나인 최급강하법으로 균질·등방성 매질의 피압대수층의 전달계수와 저류계수를 구한 결과는 그림 1 및 2와 같다.

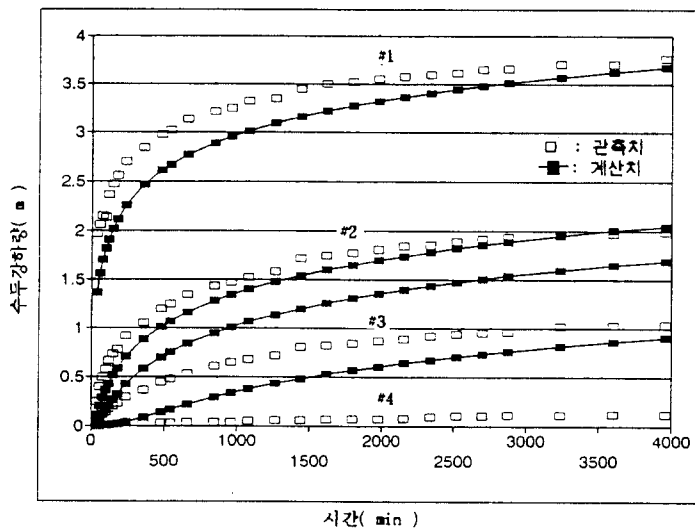


그림 1 관측치 및 계산치의 수두강하량 비교

한편, 표 1에서 관측정의 거리와 관측시간 간격이 일정하지 않으므로 관측치에 가중치를 고려하여 보았다. 계산결과는 표 2와 같다.

표 2 가중계수에 따른 매개 변수값

전달 계수 (m / min)	저류 계수	step size	비 고
0.00163	0.002580	5.0×10^{-9}	
0.00178	0.002851	1.0×10^{-9}	가중계수 고려

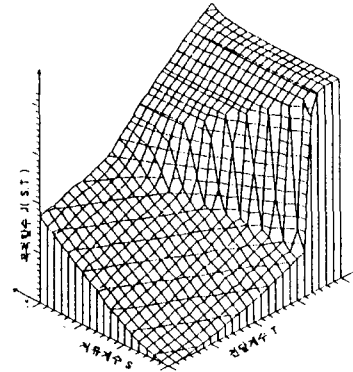


그림 2 목적함수의 Convexity

여기서 가중계수는 목적함수에 식(26)과 같이 기하평균을 적용하였다.

$$R_k = (R_{k_i} \times R_{k_j})^{1/2} \dots \dots \dots (26)$$

여기서, R_k : 가중계수, R_{k_i} : 거리 가중계수, R_{k_j} : 시간 가중계수

i : 관측정의 거리를 나타내는 일련의 정수

j : 각각 관측정의 관측시간을 나타내는 일련의 정수

4. 결론

경사법으로 균질·등방성 매질의 피압대수층의 매개변수를 계산한 결과 다음과 같다.

- i) 그림 2에서 보는 바와 같이 목적함수는 convex임으로 경사법을 적용할 수 있음을 알 수 있다.
- ii) 가중계수에 따라 전달계수는 약 9%, 저류계수는 약 10% 차이를 나타냈다.
- iii) 그러나 가중계수에 관계없이 양수정에서 가까운 관측정 #1, #2에서는 계산치와 관측치가 거의 일치하고 있으나, 양수정에서 멀리 떨어진 #3, #4에서는 잘 부합되지 않는다. 관측정 #4 부근에 source가 있는 것으로 추정된다.
- IV) 일반적으로 대수층을 비등방성으로 보아야 되지만, 관측자료가 부족하여 시도할 수 없었다. 그러나 관측정 #4 부근에 source 유무는 추후 투영법(mirror image method)를 시도하여 검토하려고 한다.

참고 문헌

1. Yeh, W.W.G and Geoge W. Tauxe, "Quasilinearization and The Identification of Aquifer Parameters" Water Resources Research, pp 375-381, April.1971
2. Hill, M.C., "Solving Groundwater Flow Problems by Conjugate-Gradient Methods and The Strongly Implicit Procedure." Water Resources Research, vol. 26, No. 9, pp 1961-1969, Sept.1990
3. Y.S. Yoon and W.W-G, Yeh, "Parameter Identification in an Inhomogeneous Medium with The Fnite-Element Method.", Soc. Pet Eng. J. (July.1976) pp.217-226 ; Trans, AIME
4. Gottfried. B.S., & Weisman, J., "Introduction to Optimization Theory" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973
5. 권오현, 지하수문학, 강의 노트, 충남대학교 대학원, 1994