

박상우*, 오경두**, 전병호**

1. 서론

최근에 전자계산기의 발달과 수문계측망의 T/M화는 유역의 호우발생시보다 정확한 홍수에경보나 수자원의 효율적 관리를 위한 실시간 유출예측모형의 개발로 이어지고 있다. 실시간 유출예측모형은 미래의 유출변화를 매시간 입력되는 새로운 자료에 근거하여 연속적으로 최적 추정하는 모형으로서 일반적으로 추계학적 강우-유출모형에 상태공간(state-space) 개념의 Kalman Filter를 도입하여 구성하며, 강우-유출모형으로 부터 정의되는 관측벡터(measurement vector) 사이의 추계학적인 상관성을 시간적(time-domain)으로 적응(adaptive) 처리하게 된다.

그러나 이러한 실시간 유출예측모형의 실제 운용에 있어서 흔히 발생하는 어려움은 모형의 차수나 매개변수의 초기치 산정 등에 있으며, 특히 매개변수 초기치의 부정확성은 Filter의 발산이나 예측정도의 저하 등을 가져온다. 본 연구에서는 Kalman Filter를 이용한 실시간 유출예측모형에서 Filter의 안정성을 유지하고 유출예측의 성취도와 실용성을 높이기 위해서 관측자료에 대한 통계적인 분석으로 부터 모형구조를 결정하고 매개변수 및 예측오차 등의 초기치를 산정할 수 있는 방법을 모색하였으며, 이의 타당성 및 정확성 등을 검토토록 하였다.

2. 이론적 배경

1) 과정모형

모형을 하나의 black-box시스템으로 간주한다면 유역에 발생한 강우량 P_t 와 유역출구에서의 하천유량 Q_t 는 각각 유역시스템에 대한 입력치와 출력치라고 할 수 있다. 이러한 경우 강우-유출관계의 과정모형은 유역시스템이 갖는 입력치 P_t 의 지체효과와 출력치 Q_t 계열의 높은 자기 상관성을 고려하여 다음과 같은 TF(Transfer Function)모형으로 나타낼 수 있다.

$$Q_t - \delta_1 Q_{t-1} - \dots - \delta_r Q_{t-r} = w_0 P_{t-b} - w_1 P_{t-b-1} - \dots - w_s P_{t-b-s} + \varepsilon_t \quad (1)$$

여기서, b 는 주어진 입력에 대한 시스템의 반응시간(delayed time)이다.

2) 과정모형의 상태공간 모형화

동적거동의 특성을 갖는 시스템에서 상태벡터 $X(t)$ 의 시간에 대한 전파를 기술하기 위한 추계학적 선형 시스템 방정식과 관측방정식의 형태는 다음과 같다.

* 서남대학교 토목공학과 교수

** 육군사관학교 토목공학과 교수

$$X(t) = \Phi(t-1) \cdot X(t-1) + \Gamma(t) \cdot w(t) \quad (2)$$

$$Z(t) = H(t) \cdot X(t) + v(t) \quad (3)$$

여기서 $Z(t)$ 는 관측벡터, Φ , Γ , H 는 천이함수를 나타내며, 시스템 잡음 $w(t)$ 와 관측잡음 $v(t)$ 는 상호 독립적인 Gaussian과정을 이루고 다음과 같은 통계치를 갖는다고 하겠다.

$$\left. \begin{aligned} E[w(t)] &= \bar{w} \\ E[v(t)] &= \bar{v} \\ E[(w(t)-\bar{w}) \cdot (w(k)-\bar{w})^T] &= D(t)\delta_{t,k} \\ E[(v(t)-\bar{v}) \cdot (v(k)-\bar{v})^T] &= R(t)\delta_{t,k} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

여기서, \bar{w} , \bar{v} 는 평균치이고, $D(t)$ 와 $R(t)$ 는 각각 $w(t)$ 와 $v(t)$ 의 공분산 행렬이며, T 는 전치행렬(transposed matrix)이고, $\delta_{t,k}$ 는 Kronecker Delta 함수로서 $t=k$ 이면 $\delta_{t,k} = 1$ 이고, $t \neq k$ 이면 $\delta_{t,k} = 0$ 이다.

한편, 고정모형인 식(1)의 TF(r,s,b)모형에서 매개변수 $\delta_1, \dots, \delta_r$ 및 w_0, \dots, w_s 는 어떤 유역시스템의 성질을 나타내는 중요한 계수라고 하겠으며, 이런 매개변수를 t 시점에서의 상태벡터 $X(t)$ 로 간주하면 다음과 같다.

$$X(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_r \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

식(5)의 매개변수 $\delta_1, \dots, \delta_r$ 및 $\omega_1, \dots, \omega_s$ 는 t 시점까지의 자료로부터 결정되는 확정론적 계수이며, 일반적으로 $t-1$ 시점의 값과 비교하여 그 변화가 거의 없으므로 시스템방정식은 시스템 잡음을 무시할 수 있다고 가정하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X(t) = \Phi(t-1) \cdot X(t-1) \quad (6)$$

여기서 $\Phi(t-1)$ 은 $(n \times n)$ 차원의 단위행렬(identity matrix)이다.

한편, 식(1)을 매트릭스 형태로 바꾸어 쓰면 식(7)과 같이 되며, 이로부터 식(3)과 같은 관측방정식을 구성할 수 있다.

$$Q_t = (Q_{t-1} \ \dots \ Q_{t-r} \ P_{t-b} \ -P_{t-b-1} \ \dots \ -P_{t-b-s}) \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \delta_r \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ \cdot \\ \omega_s \end{bmatrix} + v_t \quad (7)$$

3) Kalman Filter 알고리즘

식(2) 및 식(3)과 같은 상태공간 모형이 주어졌을 경우, t-1시점에서 t시점에 대한 상태예측치 $X(t|t-1)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$X(t|t-1) = \Phi(t-1) \cdot X(t-1|t-1) + \Gamma(t) \cdot w \quad (8)$$

그리고 시간이 경과되어 t시점에서의 관측벡터 $Z(t)$ 를 이용할 수 있다면 t 시점의 상태추정치 $\hat{X}(t|t)$ 는 상태예측치 $\hat{X}(t|t-1)$ 를 이용하여 식(9)와 같이 선형 순환형태로 표시할 수 있다.

$$\hat{X}(t|t) = \hat{X}(t|t-1) + K(t)[Z(t) - H(t) \cdot \hat{X}(t|t-1) - \bar{v}] \quad (9)$$

여기서 $K(t)$ 는 Kalman gain으로 다음과 같으며,

$$K(t) = P(t|t-1) \cdot H(t)^T [H(t) \cdot P(t|t-1) \cdot H(t)^T + R(t)]^{-1} \quad (10)$$

상태예측오차의 공분산행렬 $P(t|t-1)$ 과 상태추정오차의 공분산행렬 $P(t|t)$ 는 각각 다음과 같이 된다.

$$P(t|t-1) = \Phi(t-1) \cdot P(t-1|t-1) \cdot \Phi(t-1)^T + \Gamma(t) \cdot D(t) \cdot \Gamma(t)^T \quad (11)$$

$$P(t|t) = [I - K(t) \cdot H(t)] P(t|t-1) \quad (12)$$

한편, 시스템 방정식이 식(6)과 같이 시스템 잡음을 갖지 않는 경우에는 식(11)의 $P(t|t-1)$ 이 다음과 같이 수정된다.

$$P(t|t-1) = \Phi(t-1) \cdot P(t-1|t-1) \cdot \Phi(t-1)^T \quad (13)$$

4) 초기치 산정방법

시스템이 시불변이라는 조건하에서 $i \leq t$ 인 경우, 시스템의 입력치 $P_{i,i-b}, P_{i,i-b-1}, \dots, P_{i,i-b-s}$ 및 출력치 $Q_{i,i}, Q_{i,i-1}, \dots, Q_{i,i-r}$ 이 서로 독립이라고 가정하면, $Q_{i,i}$ 를 종속변수로 하고 $Q_{i,i-1}, \dots, Q_{i,i-r}$ 및 $P_{i,i-b}, -P_{i,i-b-1}, \dots, -P_{i,i-b-s}$ 를 독립변수로 하는 다중회귀 모형은 식(1)의 TF모형과 유사하게 식(14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{i,i} = \delta_1 Q_{i,i-1} + \dots + \delta_r Q_{i,i-r} + \omega_0 P_{i,i-b}$$

$$-\omega_1 P_{i, i-b-1} - \dots - \omega_s P_{i, i-b-s} + v_i = A_i^T \cdot X + v_i \quad (14)$$

여기서, $A_i^T = (Q_{i, i-1} \dots Q_{i, i-r} P_{i, i-b} -P_{i, i-b-1} \dots -P_{i, i-b-s})$ 이고,

$X = [\delta_1 \dots \delta_r \omega_0 \omega_1 \dots \omega_s]$ 이며, v_i 는 A_i^T 와 독립이고, 자기상관성이 없는 계열로서 평균과 분산이 각각 0, R인 오차항이다.

식(14)의 미지의 매개변수 벡터 X 를 추정하는 가장 편리한 방법중의 하나는 식(15)와 같은 함수 J 를 최소화시키는 최소자승법으로서, J 를 X 에 관하여 편미분하면 식(16)과 같은 정규방정식을 얻을 수 있다.

$$J = \sum_{i=1}^t (Q_{i, i} - A_i^T \cdot X)^T (Q_{i, i} - A_i^T \cdot X) \quad (15)$$

$$\partial J / \partial X = \left(\sum_{i=1}^t A_i A_i^T \right) X - \sum_{i=1}^t A_i Q_{i, i} \quad (16)$$

식(16)에서 $\sum_{i=1}^t A_i A_i^T$ 의 역행렬이 존재한다면, X 의 최소자승 추정량 \hat{X} 는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{X} = P_i \cdot G_i \quad (17)$$

여기서, $P_i = \left(\sum_{i=1}^t A_i A_i^T \right)^{-1}$ 이고, $G_i = \sum_{i=1}^t A_i Q_{i, i}$ 이다.

식(7)의 상태벡터의 초기치 $\hat{X}(0)$ 는 과거의 관측자료에 대하여 식(17)을 off-line으로 계산한 결과를 이용할 수 있으며, 식(13)의 초기치 $P(0)$ 는 P_i 에 오차항 v_i 의 분산 추정량 \hat{R} 을 곱하여 구할 수 있다.

3. 분석과 적용에

1) 대상유역 및 분석자료

본 연구의 대상유역은 새만금 지역의 동진강 신태인 지점으로서 유역면적이 221.9 km²에 전 주, 부안, 정주 등의 우량축후소가 있다. 이 유역의 특징은 유역의 대부분이 평야지대이며, 유역상류의 운암수갱과 칠보발전소를 통해 방류된 섬진강댐의 물이 흘러 들어온다. 분석자료는 본 유역에서 1990년과 1991년에 발생한 7개의 주요 호우사상으로서 신태인 지점에서 관측된 수위자료에 한국건설기술연구원의 Rating Curve를 적용 환산한 유량자료와 3개 우량축후소의 산술평균 유량이며, 각 호우사상의 발생시간과 강우에 대한 유역의 반응시간 b 는 표 1과 같다. 이 가운데 그림 1에 도시된 1~5번 호우사상은 모형의 분석에, 6~7번 호우사상은 모형의 적용에 각각 이용하였다.

표 1. 분석호우의 발생시간과 유역의 반응시간

호우사상	발 생 시 간	반응시간 b(hr)
1	1990. 6. 19. 11:00 ~ 6. 21. 05:00	4
2	6. 23. 16:00 ~ 6. 27. 10:00	2
3	7. 11. 12:00 ~ 7. 12. 15:00	2
4	1991. 6. 1. 11:00 ~ 6. 3. 03:00	5
5	6. 9. 01:00 ~ 6. 10. 10:00	3
6	1991. 8. 1. 17:00 ~ 8. 6. 15:00	3
7	9. 4. 14:00 ~ 9. 7. 24:00	3

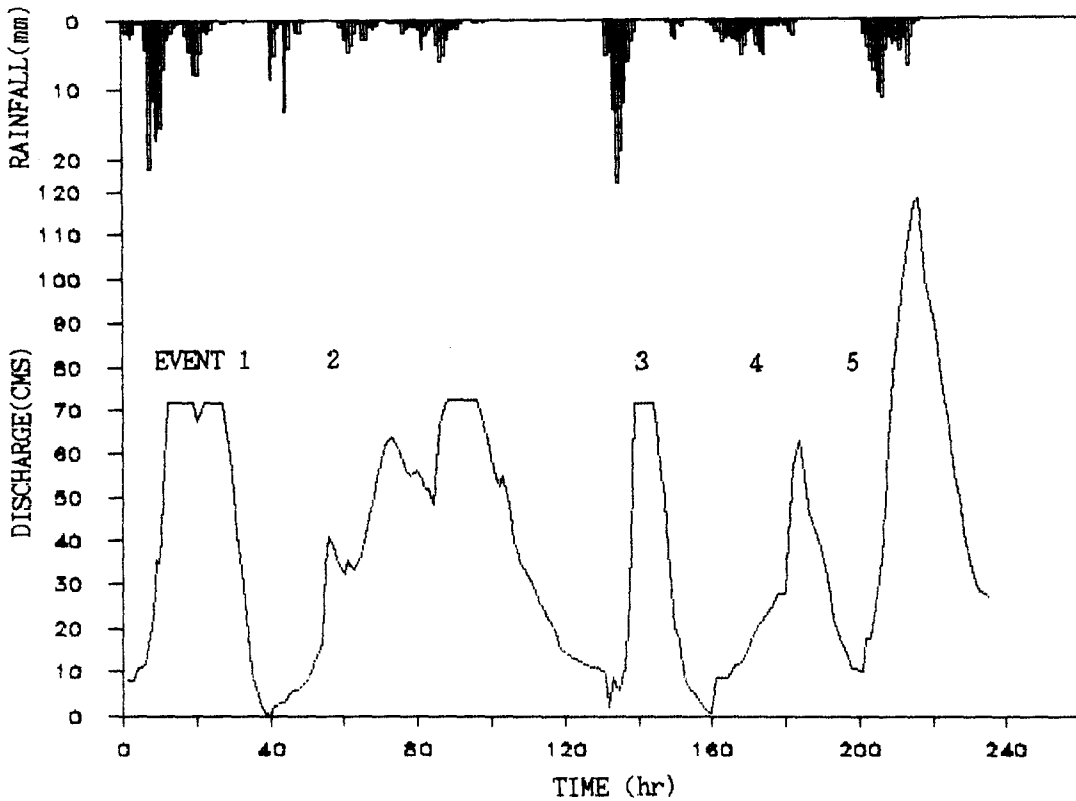


그림 1. 분석 호우사상의 수문곡선과 우량주상도

2) 분석 및 적용결과

먼저 식(1)과 같은 강우-유출과정의 TF(r, s, b)모형을 분석하기 위하여 표 1의 1~5번 호우사상에 대하여 식(17)과 같은 다중회귀분석을 실시하였다. 이때 모형의 차수 r과 s는 각각 비교적 낮은 범위의 1~3값으로 취하였고, b는 표 1의 평균값인 3으로 하였다. 분석된 결과는 식(20)과 같이 TF(2, 1, 3) 모형으로 유도되었으며, 모형의 잔차분석으로 부터 모형의 평균오차 V와 분산 R은 각각 0.214 및 14.94, RMSE(root mean square error) 및 결정계수 R²은 각각 3.87 및 0.981이었고, 최소자승법에 의하여 추정된 매개변수의 공분산행렬 P는 식(21)과 같았다.

$$Q_t = 1.441 Q_{t-1} - 0.472 Q_{t-2} + 0.416 P_{t-3} + 0.134 P_{t-4} \quad (18)$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0.0032 & -0.0031 & 0.0010 & 0.0019 \\ & 0.0030 & -0.0009 & -0.0017 \\ & & 0.0114 & -0.0080 \\ \text{(symmetric)} & & & 0.0129 \end{bmatrix} \quad (19)$$

다음으로 식(18)과 같이 결정된 TF(2,1,3) 모형에 Kalman Filter 알고리즘을 적용하여 표 1의 6,7번 호우사상에 대한 실시간 1단계전 유출예측을 수행해 본 결과는 그림 2, 그림 3 및 표 2와 같다. 여기서 식(18)의 매개변수와 식(19)의 P값을 각각 상태

벡터의 초기치 $\hat{X}(0)$ 및 상태 추정오차의 공분산행렬 초기치 P(0)로 놓고, V 와 R 값을 관측잡음의 통계치로 간주하였다.

이상과 같은 분석결과를 고찰하여 보면 본 연구의 방법은 Kalman Filter를 이용하여 실시간 유출예측을 수행하는 경우 Filter의 안정성과 유출예측의 정도를 보다 향상시킬 수 있는 방법중의 하나라고 생각된다.

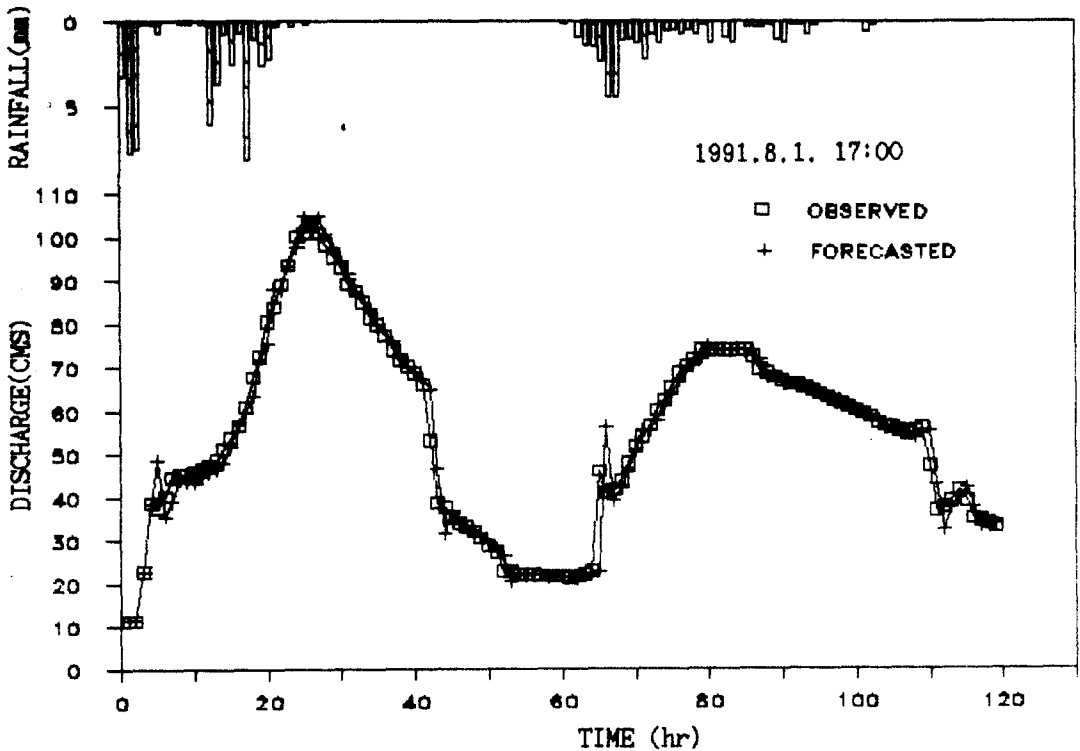


그림 2. 실시간 1단계전 유출예측결과 (호우사상 6)

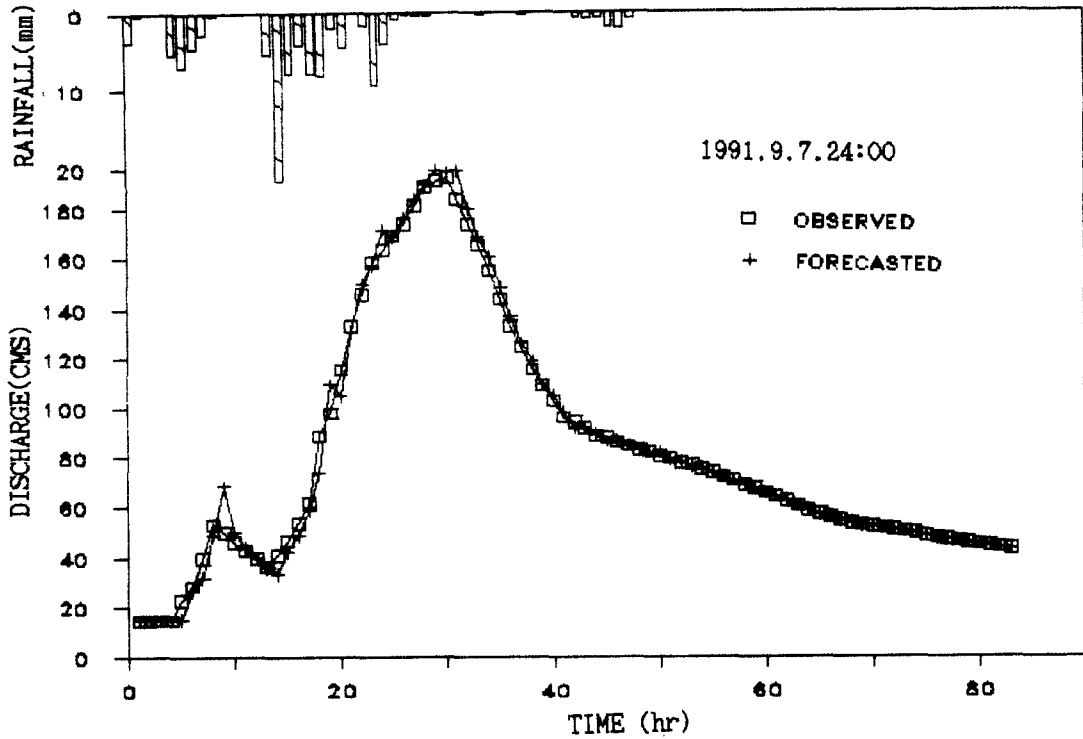


그림 3. 실시간 1단계전 유출예측결과 (호우사상 7)

표 2. 실시간 1단계전 유출예측결과의 통계분석

호우사상	\bar{E}	σ_E^2	RMSE	R^2
6	-0.009	13.91	3.73	0.971
7	-0.369	19.15	4.30	0.993

4. 결론

본 연구에서는 Kalman Filter를 이용한 실시간 유출예측에서 상태벡터 및 예측오차 등의 부정확한 초기치의 이용으로 인한 Filter의 발산을 막고 예측의 성취도를 향상시키기 위해서 다중회귀 분석으로 부터 강우-유출과정의 모형분석과 매개변수 등을 산정하고, 이를 이용하여 적용해본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 추계학적 강우-유출모형을 비교적 낮은 차수의 TF모형으로 구성할 수 있었으며, Kalman Filter 알고리즘의 적용이 용이하였다.
- 2) 다중회귀분석에 의한 매개변수 등의 산정은 매우 타당성이 있으며 정확한 결과를 주었다.
- 3) 이러한 결과를 상태벡터 및 예측오차의 초기치로 이용하는 경우, Filter의 안정성을 유지시킬 수 있었고, 만족할만한 실시간 유출예측을 수행할 수 있었다.

* 감사의 글 : 본 연구는 한국과학재단의 새만금유역 실시간 물관리를 위한 수자원 관리시스템 연구(과제번호 92-29-00-03)에 적용키 위하여 수행되었으며 재단측에 감사드립니다.

참고문헌

1. Box G.E.P. and G.M. Jenkins (1970) Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-day, San Francisco.
2. Hastings-James, R. et al. (1969) Recursive Generalized-Least-Squares Procedure for On-Line Identification of Process Parameters, Proc. IEE, Vol.116, No.12, pp.2057-2062.
3. Haykin, S. (1991) Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall, pp.477-503
4. Hipel, K.W. et al. (1985) Casual and Dynamic Relationship between Natural Phenomena, in Time Series Analysis, Elsevier Science Pub.,
5. Jazwinski, A.H. (1970) Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press.
6. Kalman, R.E. (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, Series D, Jr. of Basic Eng., Vol.82, pp.35-45.
7. Moore, R.J. and P.E. O'Connell (1978) Real-Time Forecasting of Flood Events Using TFN Models, Institute of Hydrology, UK.
8. Shumway, R.H. (1988) Applied Statistical Time Series Analysis, Prentice Hall.
9. Wood, E.F. and A. Szollosi-Nagy (1978) An Adaptive Algorithm for Analyzing Short-Term Structural and Parameter Changes in Hydrologic Prediction Models, W.R.R., Vol.14, No.4, pp.577-581.
10. Wood, E.F. and P.E. O'Connell (1985) Real-Time Forecasting in Hydrology Forecasting, John Wiley & Sons, pp.129-180
11. Young, P.C. and P.G. Whitehead (1977) A Recursive Approach to Time Series Analysis for Multivariable Systems, International Journal of Control, Vol.25, No.3, pp.457-482.