유사 모델 및 계수에 관한 연구(이론적 배경을 중심으로)

추태호*

1. 기존의 유사확산모델

현재 이용되고 있는 유사농도(C)를 유도하기 위한 3차원 확산이송 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{j=1}^{3} \left[\epsilon_j \frac{\partial^2 C}{\partial X_j^2} + \left(\frac{\partial \epsilon_j}{\partial X_j} - U_j \right) \frac{\partial C}{\partial X_j} \right] \quad \text{—— (1)}$$

여기서는 해를 구하기 쉬운 1차원으로 가정 단순화하여 정리하면, (2)식과 같다.

$$\epsilon_s \frac{dC}{dY} + V_s C - VC = 0 \quad \text{-------------------- (2)}$$

여기서 (2)식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$-\epsilon_s \frac{dC}{dY} - V_s C \pm VC = 0 \quad \text{---------------- (3)}$$

단면의 중앙부근에서는 V (Y방향의 2차 유체유속) = 0 이므로 (3)식은 다음과 같다.

$$\epsilon_s \frac{dC}{dY} = -V_s C \quad \text{------------------------------ (4)}$$

여기서 ϵ_s 는 Y에 대해 독립하는 것으로 가정하기 때문에

$$\epsilon_s \int \frac{1}{C} dC = -V_s \int dY \quad \text{--------------------------- (5)}$$

경계조건 : Y = 0 일때 $C = C_a$ 이므로 (5)식은 다음과 같이 된다.

$$\ln \frac{C}{C_a} = -\frac{V_s}{\epsilon_s} Y$$

즉, $$\frac{C}{C_a} = \exp\left[-\frac{V_s}{\epsilon_s} Y \right] \quad \text{----------------------- (6)}$$

(6)식이 <u>통상 1차원 유사농도 model식 이다.</u>

(6)식에서 가장 결정하기 어려운 변수인 ϵ_s는 직접적으로 계산할 수 없으므로, 운동량이송에 관한 확산계수로 부터 유도할 수 있다.

즉, $\epsilon_s \propto \bar{\epsilon}_y$ ----> $\epsilon_s = \beta \bar{\epsilon}_y$ ----------------------- (7)

여기서, ϵ_s = 유사이송에 관한 확산계수 (깊이 평균에 대한)

$\bar{\epsilon}_y$ = 운동량이송에 관한 확산계수 (깊이평균에 대한)

β = 비례상수(순수물의 흐름에서의 β 운동량계수와 매우 흡사함) 통상 β > 1 이다.

---

* 정회원, 한국수자원공사, 수자원연구소, 선임연구원

$$\tau = -e\,\overline{U'V'} = \rho\,\epsilon_y \frac{dV}{dY} = \tau_o\left(1 - \frac{Y}{D}\right) \quad \text{-----} \quad (8)$$

참고로, 층류흐름에 대한 뉴우튼의 전단법칙은 다음과 같다.

$$\tau = \mu \frac{dV}{dY} = \rho\nu \frac{dV}{dY} \quad \text{--------------------------} \quad (9)$$

(8)식으로부터 $\tau_o = \rho gRS_e$ 이며, 폭이 넓은 자연하천에 등류흐름일 경우에는 $\tau_o = \rho gDS$ 가 된다. 따라서, (8)식은 다음과 같이 된다.

$$\tau = \rho gDS\left(1 - \frac{Y}{D}\right) = \rho\epsilon_y \frac{dV}{dY}$$

$$\epsilon_y = \frac{\tau_o}{\rho}\left(1 - \frac{Y}{D}\right)\left(\frac{dV}{dY}\right)^{-1}$$

$$= U^2_*\left(1 - \frac{Y}{D}\right)\left(\frac{dV}{dY}\right)^{-1} \quad \text{----------------------} \quad (10)$$

ϵ_y을 계산하기 위해서는 유속분포를 알아야 하므로,(참고.4) 통상 쓰는 본칼만의 유속공식인, (11)식을 대입하여 풀면 (12)식과 같다.

$$V = \frac{U_*}{K}\,\ln \frac{Y}{Y_o} \quad \text{---------------------------------} \quad (11)$$

여기서 K = 본칼만 상수 U* = 전단유속 = $\sqrt{gRS}$
Y_o = 특성길이

유속기울기는 $\frac{dV}{dY} = \frac{U_*}{KY}$ 와 같으므로

$$\therefore\ \epsilon Y = U^2_*\left(1 - \frac{Y}{D}\right)\left(\frac{KY}{U_*}\right)$$

$$= KU_*Y\left(1 - \frac{Y}{D}\right) \quad \text{--------------------------} \quad (12)$$

여기서, 깊이 평균에 대한 운동량 이송에 관한 확산계수($\bar{\epsilon}Y$) 는 아래와 같다.

$$\bar{\epsilon}Y = \frac{1}{D}\int_0^D \epsilon Y\,dY = \frac{KU_*D}{6} \quad \text{-----------} \quad (13)$$

따라서, (13)을 (7)에 대입하여 깊이평균에 대한 유사이송에 관한 확산계수 (ϵ_s)을 얻는다.

$$\epsilon_s = \beta\,\frac{1}{6}\,KU_*D \quad \text{------------------------------} \quad (14)$$

위식을 (6)식에 대입하면, <u>**1차원 유사농도 모델식을 다음과 같이 유도할 수 있다.**</u>

$$\frac{C}{C_a} = \exp\left(-\,\frac{6V_s\,Y}{\beta KU_*D}\right) \quad \text{--------------------} \quad (15)$$

위식은 매우 유용한 식으로써, 하천에서 D, Y, ρ_s, d(유사입자직경), μ, C_D(항력계수), K (칼만 상수)와 (6) 식으로 부터 V_s 을 계산하여 대입하면 1 차원 농도곡선을 계산할 수 있다. 그러나, (15)식 대신에 실제로 현재까지 매우 많이 쓰이는 또다른 식은 다음과 같이 유도 된다.

(4)식과 (12)식으로 부터, 즉

$\epsilon_S = \beta KU_* Y \left(1 - \frac{Y}{D}\right)$ 로 부터, 즉 $\epsilon_s = \beta \epsilon Y$ 라 가정하여

$$\int \frac{dC}{C} = -\frac{V_s}{\epsilon_s} dY = \int \frac{V_s}{\beta KU_* Y\left(1 - \frac{Y}{D}\right)} dY \quad \text{-----------} \quad (16)$$

양변을 적분하면

$$\ell n C = \frac{V_s}{\beta KU_*} \int \frac{1}{Y\left(1 - \frac{Y}{D}\right)} dY$$

$$= -\frac{V_s D}{\beta KU_*} \int \frac{1}{Y(D-Y)} dY$$

$$= -\frac{V_s}{\beta KU_*} \ell n \frac{Y}{D-Y} + \text{const}$$

경계조건 : $Y = a$ 일때 $C = Ca$ 이므로 (16)식은

$$\ell n \frac{C}{Ca} = \frac{V_s}{\beta KU_*} \ell n \frac{a(D-Y)}{Y(D-a)}$$

$$= \ell n \left(\frac{a(D-Y)}{Y(D-a)}\right)^{\frac{V_s}{\beta KU_*}}$$

$$\therefore \frac{C}{Ca} = \left(\frac{D-Y}{Y} \quad \frac{a}{D-a}\right)^{\frac{V_s}{\beta KU_*}} \quad \text{---------------------} \quad (17)$$

또다른 형태의 1차원 유사농도모델을 유도할 수 있으며, 다시 정리하면 (18)식과같다.

$$\frac{C}{Ca} = H^{Z} \quad \text{------------------------} \quad (18)$$

실제로 현재까지 거의 대부분경우 유사농도를 계산할때 (17)식이나 (18)식을 매우 많이 쓰고 있는 실정이다 (통상 Rouse's Equation라 부른다).

2. 기존의 유사농도 모델의 비교

위의 두가지 유사농도모델을 비교하면 (15) 식에 비해 (17) 식 다음과 같은 문제점을 갖고 있음을 알 수 있다.

다　　　음

1) (17)식에서 언급된 a (reference 높이)를 구하는것은 유사확산 모델이용시 가장 근본적인 문제점중의 하나로, 부유사량 (suspended Load) 과 소류사량 (bedLoad)과의 특징(차이)를 나타내는 것으로 Einstein(1955), Brooks(1965), Engelund와 Fredse(1976), Willis (1979), Karim 과 Kennedy(1983), Van Rijn(1984) 등과 같은 많은 학자들에 의해 제안되었으나, 이값은 매우 임의적인 값으로 현재까지도 규명되지 않은 불확실한 변수이다.

2) (17)식에서 Y = 0 일때 C 값이 무한대가 되며, Y = a일때 C값 역시 무한대가 되는 모순이 있다.

3) (17)식을 유도하기 위하여 가정한 $\epsilon_s = \beta \epsilon Y$ 은 ϵ_s 가 깊이평균에 대한 유사 이송확산계수란 정의에 모순된다. 즉, $\epsilon_s = \beta \epsilon_Y$ 로 정의하였으나, (17)식에서는 $\epsilon_s = \beta \epsilon Y$ 로 가정하여

유도하였다. 따라서, 앞으로는 (15)식의 농도모델을 사용하여야 할 것으로 사료된다.

3. 기존의 유속공식 비교

기존에 사용되는 대표적인 유속공식인 one-seventh power Law 와 본칼만 공식에 대해우선 알아보고 최근에 개발된 Chiu의 유속공식을 소개하고 이들을 유사농도모델에 이용 하였을 때의 장단점을 검토하고저 한다.

1) one-seventh power Law

$$V = aY^{b} \qquad (19)$$

$$\frac{dV}{dY} = \frac{ab}{Y^{1-b}} \qquad (20)$$

$Y = 0$ 일때, $dV/dY = \infty$ 되며, τ_o 역시 무한대가 되는 모순이 있다.

2) 본칼만 유속공식

(11) 식으로 부터

$$\frac{dV}{dY} = \frac{U_*}{KY} \qquad (21)$$

$Y = 0$ 일때, $\frac{dV}{dY} = \infty$ 이며, τ_o 역시 무한대가 되는 모순이 있다.

3) Chiu 유속공식

$$V = \frac{V_{max}}{M} \ln \left[1 + (e^{M} - 1) \frac{Y}{D} \right] \qquad (22)$$

여기서, V_{max} = 최대유속, M = 계수 (엔타로피 계수)

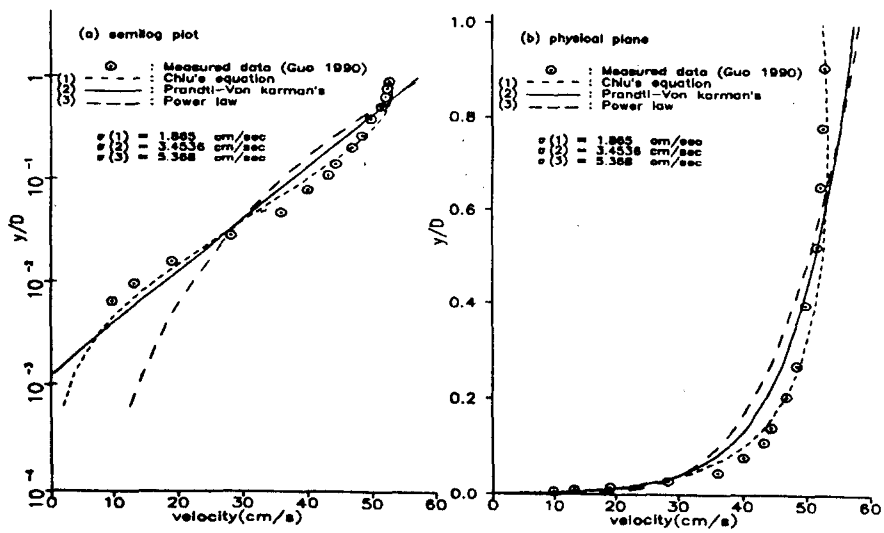

그림.1 3가지 유속공식에의한 유속분포의 비교

$$\frac{dV}{dY} = \frac{V_{max}}{D.M}(e^M - 1)\left[1 + (e^M - 1)\frac{Y}{D}\right]^{-1} \text{-------} \quad (23)$$

Y = 0 일때, $\frac{dV}{dY} = \frac{V_{max}}{D.M}(e^M - 1)$ 이며, τ_o 역시 일정한 값을 갖는다.

이미 Chiu 의 유속공식과 기존의 두가지 공식과의 비교검토한 논문(참고.5,6,7)들이 많이 있다. 그림 1.에서 알수 있듯이, Chiu 의 유속공식은 수표면에서부터 수로 바닥까지의 전영역을 거의 완벽하게 나타내 주고 있다.(참고.8,9) 따라서, 유사농도 모델에서 가장 중요한 인자인 유속을 고려할때는 Chiu의 유속공식을 적용하여 유사농도를 계산하는것이 바람직 할 것으로 사료된다.

4. 유사확산 모델 제안

위의 유속공식들을 확산모델에 적용하여 문제점을 제시하고 또다른 확산모델을 제안 코져한다. 먼저 확산계수에 대해서 알아보면, 1) Power Law 을 확산계수에 넣고 정리하면, 즉 (20)식을 (10)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\overline{\epsilon Y} = \frac{U_*^2 D^{1-b}}{ab\ (2-b)(3-b)} \text{------------------} \quad (24)$$

2) 본칼만 유속공식에 대해서는 이미 (13)식에서 확산계수에 대한 식을 계산하였기에 여기서는 생략한다.

3) Chiu 의 유속공식에 대해서도 정리하면, 즉 (23)식을 (10)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\overline{\epsilon_Y} = \frac{M\ U_*^2 D}{6\ V_{max}}\left[\frac{3}{e^M - 1} + 1\right] \text{-----------} \quad (25)$$

위의 확산계수들을 1차원 유사농도모델식인 (6)식에 대입하여 정리하면 각 유속공식별 유사농도모델이 제안된다. 이미 유속공식의 비교에서 power Law와 본 칼만에 대한 문제점을 제시하였기에, 여기서는 Chiu의 유속공식에서 유도된 유사농도모델을 제시하고 이를 본칼만 공식을 이용한 기존의 모델과 비교코져한다.

Chiu의 유속공식인 (23)식을 확산계수식인 (10)식에 대입하여 정리하면 또다른 확산모델식인 (G)식이 제안된다. 여기서,이에 대하여 다시한번 정리를 하면 다음과 같다.

1) 난류흐름시 전단응력식은 다음과 같다.

$$\tau_n = \rho\epsilon_Y \frac{dV}{dY} = \tau_o\left(1 - \frac{Y}{D}\right) \text{---------------} \quad (A)$$

2) 유사 확산계수는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_s = \beta\ \overline{\epsilon Y} \text{------------------------------} \quad (B)$$

3) (A)식을 고려하여 (B)식을 정리하면 다음과 같다.

$$\epsilon_Y = U_*^2\left(1 - \frac{Y}{D}\right)\left(\frac{dV}{dY}\right)^{-1} \text{---------------------} \quad (C)$$

4) 여기서, 필요한 유속 기울기를 위해서 Chiu 공식을 적용하면 다음과 같다.

$$V = \frac{V_{max}}{M}\ ln\left(1 + (e^M - 1)\frac{Y}{D}\right) \text{--------------} \quad (D)$$

$$\therefore \frac{dV}{dY} = \frac{V_{max}}{D.M}(e^M - 1)\left[1 + (e^M - 1)\frac{Y}{D}\right]^{-1} \quad \text{--------} (E)$$

5) (E)식을 (C)식에 대입 정리하면 (F)과 같다.

$$\overline{\epsilon_y} = \frac{M\,U_*^2 D}{6\,V_{max}}\left(\frac{3}{(e^M - 1)} + 1\right) \quad \text{-----------------} (F)$$

6) (F)식을 1차원 유사농도 모델식인 (6)식에 대입 정리하면,

$$\frac{C}{Ca} = \exp\left[-\frac{6V_{max}\,V_s\,Y}{\beta M U_*^2 D}\left(\frac{3}{(e^M - 1)} + 1\right)^{-1}\right] \quad \text{----------} (G)$$

$$(\because \epsilon_s = \beta\,\overline{\epsilon_y})$$

<u>또다른 유사 확산모델식인 (G)식이 유도된다.</u>

기존의 본칼만 공식으로부터 유도된 유사확산모델과 비교하여 제안된 유사확산모델이 갖는 장점을 요약하면 다음과 같다.

1) 가장 큰 영향을 갖고 있는 유속분포와 관련하여, 수표면에서 부터 하상바닥까지의 전 영역을 거의 나타낸다.

2) 확산계수와 관련하여 추가적인 매개변수(V_{max})를 갖고 있으나, 이것이 의미하는 것은 실제농도계산시 최대유속을 고려하여야 함을 의미한다.

3) (7)식에 있는 β(비례상수)에 관련하여, Carstens(1952), Singarnetti(1966), Jabson과 Sayre (1970), Coleman(1970) Van Rijn(1984) 등의 많은 학자들이 이에대한 연구를 추진하였으나, 이에대한 체계인 이론이 적립 되지 않는 실정이며, 통상 β = 1 를 쓰고 있다. 그러나, (8)식은 뉴우튼의 전단법칙(제2법칙)과 유사하며, 이에준하여 확산계수를 유도하여 β (비계상수) 값을 결정하였기 때문에, 운동량 원리에 의해서 유도된 아래식의 β (운동량계수)와 같아야 할 것으로 사료된다.

$$\beta = \frac{\int v^2 dA}{V^2\,A} \quad \text{---------------} (H)$$

그 이유는 뉴우튼의 제2법칙을 유체에 적용하여 운동량 방정식을 유도하였고, 이를 적용하여 (H)식을 유도하였기 때문에 결과적으로 같은 뉴우튼의 제2법칙이 각각에 적용되었으므로 같은 결과를 도출할 것으로 사료된다(이에 관한 상세한 연구가 요구되며, 추가적제안에서 관련된 제안을 하고져 한다). 만약 위와 같은 사실이 증명된다면 난류흐름시 실용적으로 사용될 수 있게, Chiu의 유속공식으로 유도된 유속계수공식(1990. Choo와 Chiu 유도, 참조.8,9)을 이용하면 쉽게 β 값을 계산하여 유용하게 적용할 수 있다(기존의 방법은 실제 적용시 β 값을 통상 1로 보고 계산하거나 점유속을 계산하여 운동량 원리로 부터 계산된 값을 사용하나 학술적 연구외에는 거의 사용하지 않는 실정임)

5. 결론

위의 검토 결과, 난류 흐름시 제안된 유사 확산 모델 및 계수를 이용할 경우 보다나은 유사농도에 접근할 수 있고 특히, 임의값이며 불확실한 변수인 a (reference 높이)을 고려하지 않고, 유사농도 계산시 가장 중요한 변수인 유속분포을 수표면에서 하상바닥까지 거의전구간을 나타낼 수 있는 장점이있으며, 더욱이 기존의 유사농도 식에서는 고려치 않은 중요한 변수인 최대유속을 고려할수 있는 특징을 갖고있어, 난류흐름시 저농도 유사량을 계산할 때 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

추가적으로 제안된 확산계수율(β)에 관한 접근을 통해서 지금까지 실용적인 측면에서 이론적인 체계가 적립되지 않은 확산계수율(β)에 관한 접근을 시도 할 수 있을것으로 사료된다. 끝으로, 본 연구는 이론적 측면에서만 고려한 것으로 실제측정 자료와의검증은 추후 연구과제로 남기고자 한다.

6. 참 고

(1) Karim, f., and Kennedy, J.F., "Missouri River Computer-Based Predictors for Sediment Kischarges and Friction Factors of Alluvial Streams," MRD Sediment Series, No. 29, U. S. Army Corps of Engineers, Missouri River Division, July, 1983.

(2) Willis, J. C., "Suspended Load From Error-Function Models," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 105, No. HY7, July, 1979.

(3) peter J. Murphy and Eduardo J. Aguirre, "Bed Load or Suspended Load." Journal of hydranlic Engineering, ASCE, Vol. 11, No.1, Jan., 1985, pp.93-107

(4) Jobson, J.E., and Sayre, W. W., "Predicting Concentration Profiles in Open Channels," Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96, No. HYIO, Oct., 1970b.

(5) Chiu, C.-L "Entropy and prodability concepts in hydraulics." J. Hydr.Eng., ASCE, 113(5), 1987, pp.583-600

(6) Chiu, C.-L. "Entropy and 2-D velocity distrivution inopen channels." J.Hydr. Eng., ASCE, 144(7), 1988, pp.738-756

(7) Chiu, C.-L. "Velocity distribution in ipen channel flow." J. Hydr.Eng., ASCE, 115(5), 1989, pp.576-594

(8) Choo. T. H. "Estimation of energy and momentum coefficients in open channel flow by Chiu's velocity distribution eqation." thesis presented to university of pittsburgh at pittsburgh.PA.,in 1990,in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of science.

(9) Chiu, C.-L. and Tai Ho Choo, et. "Spatially varying velocty distribution in Non-uniform open chamel flow" Hydraulic Engineering, Proceedings of the 1991 National Conference at Nashiville, Tennessee, Jul. 29 - Aug. 2. 1991, pp. 662-667