

# 2次元 Random-Walk模型을 이용한 橫擴散 解析 Modeling Transverse Mixing Using 2-D Random-Walk Model

서 일 원 1)                      정 태 성 2)  
Seo, Il Won                      Jeong, Tae Seong

## 1. 서론

자연하천에서 오염물질 입자는 난류특성 및 유속분포, 지형조건 등 여러 요인에 의해 불규칙적이고 무작위하게 이동한다 (Prickett 등, 1981). 특히 불규칙한 단면을 갖는 하폭이 큰 자연하천에서 수심방향의 확산이 완료된 후의 초기 확산거동은 2차원 이송-확산방정식을 이용하여 모의한다. 이송-확산방정식은 주로 유한차분모형이나 유한요소모형을 사용하여 농도를 계산하나, 이 방법들은 하천의 지형이나 유속조건이 복잡한 경우 해석이 어려우며 이에 따른 많은 오차를 포함하게 된다. 또한 고정격자를 이용하는 Eulerian방법에서는 이송이 지배적인 경우 수치확산(Numerical Diffusion) 및 수치진동(Numerical Oscillation)이 증가하는 단점이 있다 (서일원과 김대근, 1994).

Random-Walk모형은 입자의 궤적을 추적하는 Lagrangian식 모형으로서 "Particle Tracking Method"라고도 한다. 본 모형은 연속성을 가진 오염물질의 이송-확산과정을 미소질량을 갖는 이산적인 입자의 운동으로 표현한다. 초기농도는 오염물질 전체질량을 모의하는 입자의 갯수로나누는 값을 사용하고, 오염물질 각 입자의 이동거리는 이송과 확산에 의한 것으로 분리하여 계산한다. 이송과정에 의한 이동거리는 확정론적인 것으로 가정하여 구하게 되므로 이송항의 처리에 따른 수치오차를 완전히 제거할 수 있으며, 확산에 의한 이동거리는 무작위 과정으로 가정하여 계산하게 되는데 입자의 수를 증가시킴으로써 자연현상을 보다 잘 모사하는 결과를 얻을 수 있다 (Prickett 등, 1981). 초기농도로서 주어진 각각의 입자는 계산시간동안 이송과 확산을 반복하면서 독립적으로 이동하게 되는데, 이동후의 입자들의 최종위치를 결정한 후 정해진 거리 증분내에 들어온 입자의 총수를 계산하므로써 시간 혹은 거리에 따른 농도분포를 구할 수 있다.

본 연구에서는 2차원 Random-Walk모형의 기본개념을 소개하고 보존성 및 비보존성 오염물질이 순간적으로 방류된 경우에 대해 해석해가 존재하는 단순영역에서 해석해와 모의결과를 비교 분석하였다. 또한, 수심적분된 종방향 유속의 횡분포 자료가 존재하는 Fox River, Illinois, U.S.A. (Seo, 1988)에 본 모형을 적용하여 자연하천에서의 횡확산 현상을 모의하였다.

## 2. 2차원 Random-Walk 모형의 개발

### 2.1 2차원 이송-확산 방정식

보존성 오염물질에 관한 2차원 이송-확산방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$-\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (1)$$

여기서  $C$ 는 오염물질 수심평균농도,  $U$ 는 종방향 수심평균유속,  $V$ 는 횡방향 수심평균유속,  $D_x$ 는 종방향 확산계수,  $D_y$ 는 횡방향 확산계수,  $t$ 는 시간,  $x$ 는 종방향 거리, 그리고  $y$ 는 횡방향거리이다.

초기조건은 다음과 같은 순간방류를 가정한다.

$$C(x,0) = M\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \quad 0 < x < \infty \quad (2)$$

1) 정회원, 서울대학교 공과대학 토목공학과 조교수  
2) 정회원, 서울대학교 대학원 토목공학과 석사과정

여기서  $M$ 은 오염물질의 총질량,  $\delta$ 는 Dirac Delta함수, 그리고  $x_0$ 는 방류지점의 종축좌표,  $y_0$ 는 방류지점의 횡축좌표이다 (Fig. 1 참조). 경계조건으로서 상·하류단 경계에는 Dirichlet 경계조건을 부여하고, 수로의 양안 경계에는 Neumann경계조건을 가정하면 다음과 같다.

$$C(x = \pm \infty, t) = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0, W} = 0 \quad (4)$$

여기서  $W$ 는 하폭이다. 이 경우 해석하는 중첩의 원리(Method of Superposition)를 이용하여 다음과 같이 유도된다 (Fischer et al., 1979).

$$C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-x_0-Ut)^2}{4D_x t}\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(y-2nW-y_0-Vt)^2}{4D_y t}\right) - \frac{(y-2nW+y_0-Vt)^2}{4D_y t} \right) \right] \quad (5)$$

여기서  $n$ 은  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 이다.

비보존성 오염물질에 관한 2차원 이송-확산방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - K_r C \quad (6)$$

여기서  $K_r$ 은 반응감소계수이며, 초기조건과 경계조건이 식(2) - (4)와 같다면 해석하는 다음식으로 주어진다.

$$C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-x_0-Ut)^2}{4D_x t} - K_r t\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(y-2nW-y_0-Vt)^2}{4D_y t} - \frac{(y-2nW+y_0-Vt)^2}{4D_y t}\right) \right) \right] \quad (7)$$

## 2.2 Random-Walk 모형

오염물질 각각의 입자가  $x, y$ 축을 따라 매 단계마다 각 방향으로 미소구간을 움직인다고 할 때 자연하천에서 오염물질이  $x, y$ 축을 따라 각 방향으로 움직일 확률은  $1/2$ 로 같다고 보고, Random분포  $x, y$ 를 정규분포로 가정하면 각각의 확률밀도함수(Probability Density Function, PDF)는 다음식으로 표시된다.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (8)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \quad -\infty \leq y \leq \infty \quad (9)$$

평균  $m_x, m_y$ 은 다음식으로 주어진다.

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (10a)$$

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \quad (10b)$$

그리고 분산  $\sigma_X^2$ ,  $\sigma_Y^2$ 은 다음 식으로 주어진다.

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \quad (11a)$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f_Y(y) dy \quad (11b)$$

여기서  $x$ ,  $y$ 방향의 Random분포가 서로 독립적이라면, 조합확률밀도함수(Joint Probability Density Function)는 다음과 같은식으로 표현할 수 있다.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \quad (12)$$

식(5)와 식(12)를 비교해 보면  $m_X$ 는  $Ut$ ,  $m_Y$ 는  $Vt$ ,  $2D_{xt}$ 는  $\sigma_X^2$ , 그리고  $2D_{yt}$ 는  $\sigma_Y^2$ 가 됨을 알 수 있고 이로서 식(5)와 식(12)는 동등하다고 할 수 있다. 즉, 이송-확산방정식으로 표현되는 물리적 과정은 정규분포를 갖는 무작위과정으로 표현할 수 있다.

오염물질의 이송-확산 방정식을 풀기 위하여 이송항과 확산항을 분리하여 계산하게 되는데  $x$ ,  $y$ 방향의 이송거리는 확정론적인 것으로 가정하여 다음 식으로 구한다.

$$x\text{방향 이송이동거리} = U\Delta t \quad (13)$$

$$y\text{방향 이송이동거리} = V\Delta t \quad (14)$$

여기서  $\Delta t$ 는 시간증분이다. 확산과정에 의한  $x$ ,  $y$ 방향의 이동거리는 무작위 과정으로 가정하여 다음식으로 계산한다.

$$x\text{방향 확산이동거리} = \sqrt{2D_x\Delta t}R \quad (15)$$

$$y\text{방향 확산이동거리} = \sqrt{2D_y\Delta t}R \quad (16)$$

여기서  $R$ 은 평균이 0이고 표준편차가 1인 정규분포를 갖는 난수(Random Number)이다. 본 모형에서는 Box-Muller Method를 이용하여 난수를 생성한다. 보존성 오염물질입자의  $x$ ,  $y$ 방향으로의 이송-확산후의 위치를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x\text{좌표 현위치} = x\text{좌표 전위치} + [U\Delta t + \sqrt{2D_x\Delta t}R] \quad (17)$$

$$y\text{좌표 현위치} = y\text{좌표 전위치} + [V\Delta t + \sqrt{2D_y\Delta t}R] \quad (18)$$

식(17)과 식(18)에 의해 각각의 입자는  $\Delta t$ 시간 동안 이송에 의해 이동하게 되고 무작위 과정에 의해 확산하게 되는데, 이런 과정을 반복하면 계산하고자 하는 시간에서의 각 입자의 위치를 계산할 수 있고, 이런 과정을 많은 수의 입자에 대해 반복한 후  $x$ ,  $y$ 방향의 계산격자 내에 포함된 미소질량을 갖는 입자의 갯수로서 공간-농도분포 혹은 시간-농도분포를 구할 수 있다 (서일원과 정태성, 1993).

비보존성 오염물질의 이송, 확산 후의 위치를 나타내는 식은 보존성 오염물질의 경우와 동일하게 식(17), 식(18)을 사용한다. 그러나 보존성 오염물질의 질량이 보존되는 것과는 달리

비보존성 오염물질의 질량은 시간의 경과에 따라 점차 감소하여  $t$ 시간후 비보존성 입자의 미소 질량은 다음 식으로 나타난다.

$$t\text{시간 후 각 입자의 미소질량} = [M \exp(-Kt)]/NP \quad (19)$$

여기서  $NP$ 는 입자의 갯수이다.

### 3. 모형의 적용 및 결과분석

#### 3.1 해석해와의 비교

보존성 및 비보존성 오염물질에 관한 2차원 Random-Walk모형을 해석해가 존재하는 단순영역에 적용하여 해석해와 비교하였다. 오염물질의 초기유입 조건은 사고에 의한 방출과 같이 순간 방류로 가정하였으며, 경계조건은 식(3) - (4)와 같다. 가상적인 하천수로의 형태와 좌표축은 Fig. 1에 도시한 바와 같다. 수치실험에 사용한 물리량 및 수치계산 자료는 Table 1과 같다.

Table 1 Hydraulic and Numerical Data used in the Simulations

평균유속 (m/min)		종확산계수 (m <sup>2</sup> /min)		총질량 (mg/l)	계산시간 (min)	입자갯수 (개)	시간중분 (sec)	거리중분 (m)	
U	V	D <sub>x</sub>	D <sub>y</sub>					Δx	Δy
1.5	0.0	0.5	0.3	420	10	1000 - 20000	1	1	1

Fig. 2a)는 하천 우안의 1점( $x_o' = 0, y_o' = 0$ )에서 순간적으로 유입된 보존성 오염물질의 확산거동을 해석해와 비교하여 나타낸 것이다. Fig. 2에서 종방향거리  $x$ 와 횡방향거리  $y$ 는 모두 무차원화하여  $x' = 4D_y/UW^2$ ,  $y' = y/W$ 로 표시하였다. Fig. 2b)는 비보존성 오염물질이 순간적으로 유입된 경우 농도의 횡방향 분포를 해석해와 비교하여 나타낸 것이다. Fig. 3a)는 우안의 2점( $x_o' = 0, y_o' = 0; x_o' = 0.02, y_o' = 0$ )에서 보존성 오염물질이 유입되었을 경우의 농도분포를 해석해와 비교하여 나타낸 것이고 Fig. 3b)는 비보존성 오염물질이 유입되었을 경우의 농도분포를 해석해와 비교하여 나타낸 것이다. Figs. 2 - 3의 경우 입자의 갯수는 20,000개로 모의하였다. 모든 경우 수치해는 해석해에 일치하고 있음을 알 수 있으며, 보존성 오염물질의 경우에 비보존성 오염물질의 경우보다 해석해에 더욱 근사하게 일치함을 알 수 있다. 모형의 모의결과를 좀 더 정량적으로 분석하기 위해서 보존성 오염물질이 우안의 1점에서 순간적으로 유입된 경우  $x' = 0.03$ 과  $x' = 0.04$ 에서의 횡방향 분포를 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 5는 우안의 2점에서 보존성 오염물질이 유입되었을 경우에 농도의 횡방향 분포를 입자의 갯수를 변화시켜 가면서 나타낸 것이다. Fig. 6은 하천 우안의 1점에서 순간적으로 유입된 비보존성 오염물질의 확산거동을 해석해와 비교한 것이다. 이 때 반응감소계수  $K$ ,은 0.006의 값을 사용하였다. Fig. 7은 우안의 2점에서 비보존성 오염물질이 유입되었을 경우에 농도의 횡방향 분포를 입자의 갯수를 변화시켜 가면서 나타낸 것이다. 이때 수치해는 농도가 높은부분에서는 해석해와 거의 차이가 없는 반면, 농도가 낮은 부분에서는 해석해보다 높은 값을 보이고 있음이 나타났다. 입자의 갯수를 1,000에서 20,000까지 변화시켜 모의한 결과 입자의 갯수가 10,000이상 이면 해석해와 거의 일치함을 알 수 있다.

#### 3.2 실제하천에의 적용

실제 자연하천에서의 적용성을 검토하기 위하여 횡방향 유속이 포물선 형태의 분포를 갖는 미국 일리노이주 Fox River에서 비보존성 오염물질의 확산거동현상을 살펴보았다. 물리량 자료 및 수치계산 자료는 Table 2와 같다. Fig. 8은 Fox River의 Ottawa지점에서의 유속의 횡방향 분포를 나타낸 것이다. Fig. 9는 하천의 우안 2점( $x_o' = 0, y_o' = 0; x_o' = 0.08, y_o' = 0$ )에서 비보존성 오염물질이 순간적으로 방류되었을 때 오염물질의 확산거동 현상을 나타낸 것이다. 횡방향으로 일정한 유속을 가정한 경우의 확산거동 (Fig. 3)에 비하여 복잡한 분포를

보이며 쌍봉형의 침투농도가 아닌 다봉형의 침투농도를 갖는 분포가 되며, 또한 침투농도가 우안에 밀착하지 않고 수로중심으로 이동하고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Hydraulic and Numerical Data used in the Simulation of Fox-River

평균유속 (m/s)		종확산계수 (m <sup>2</sup> /s)		총질량 (mg/l)	계산시간 (min)	입자갯수 (개)	시간중분 (1 sec)	거리중분 (m)	
U	V	D <sub>x</sub>	D <sub>y</sub>					Δx	Δy
포물 선형	0.0	55.3	2.528	420	120	10000	1	10	2

#### 4. 결론

2차원 보존성 및 비보존성 오염물질의 확산과정을 Random-Walk모형을 이용하여 모의한 결과 입자의 갯수가 10,000개 이상인 경우 해석해와 거의 일치함을 알 수 있다. 수치해의 침투농도는 농도가 높은부분에서는 해석해와 거의 차이가 없는 반면, 농도가 낮은 부분에서는 해석해보다 높은 값을 보인다. 횡방향으로 포물선 형태의 유속분포를 입력한 경우 일정한 유속을 가정한 경우보다 복잡한 농도분포를 보이며, 쌍봉형의 침투농도가 아닌 다봉형의 침투농도를 갖는 분포가 되며, 침투농도가 우안에 밀착하지 않고 수로중심으로 이동한다. Random-Walk모형의 장점은 이송에 의한 수치오차 발생이 없고, 입자의 갯수를 증가함으로써 자연하천에서의 확산현상을 보다 근접하게 모사할 수 있다는 것이다.

#### 5. 참고문헌

1. 서일원, 정태성, Random-Walk모형을 이용한 오염물질의 확산거동 해석, 대한토목학회 학술발표회 개요집, 1993, pp.155-158.
2. 서일원, 김대근, Eulerian-Lagrangian방법을 이용한 1차원 종확산 방정식의 수치모형, 수문학회논문집, 1994 (출간예정).
3. Fischer, H. B. et al., Mixing in Inland and Coastal Waters, 1979.
4. Prickett, T. A., and C. G. Lonquist, A Random-walk Solute Transport Model for Selected Groundwater Quality, Authority of The State of Illinois, 1981.
5. Seo, I. W., Water Quality Study of Combined Sewer Outfalls of Ottawa, Illinois, 1988.

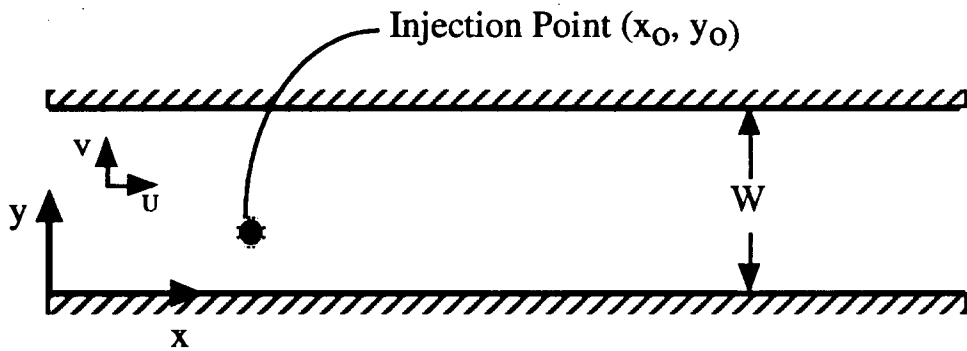


Fig. 1 Schematic Diagram of Hypothetical River

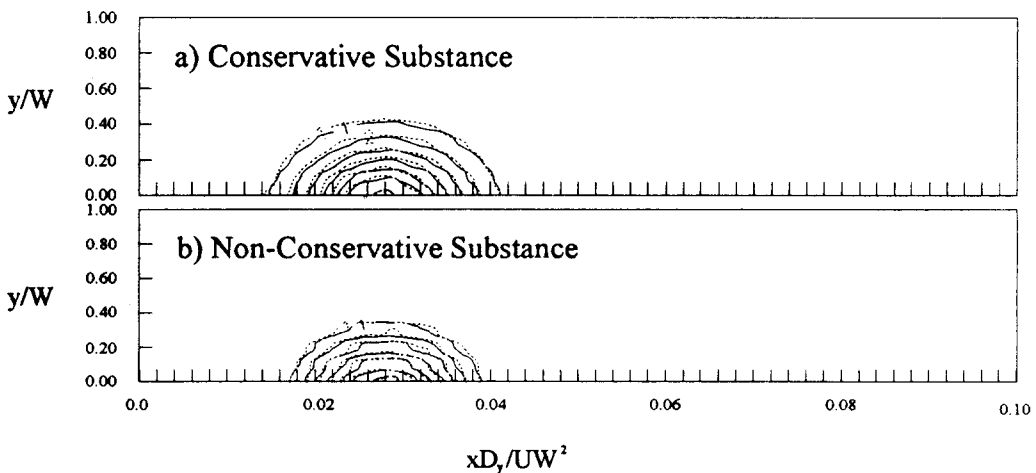


Fig. 2 Concentration Distribution of a) Conservative Substance and b) Non-Conservative Substances 10 Minutes After Injection (1-point Injection at  $x'_i = 0, y'_i = 0$ ); — : Analytic Solution; - - - : Random-Walk Model

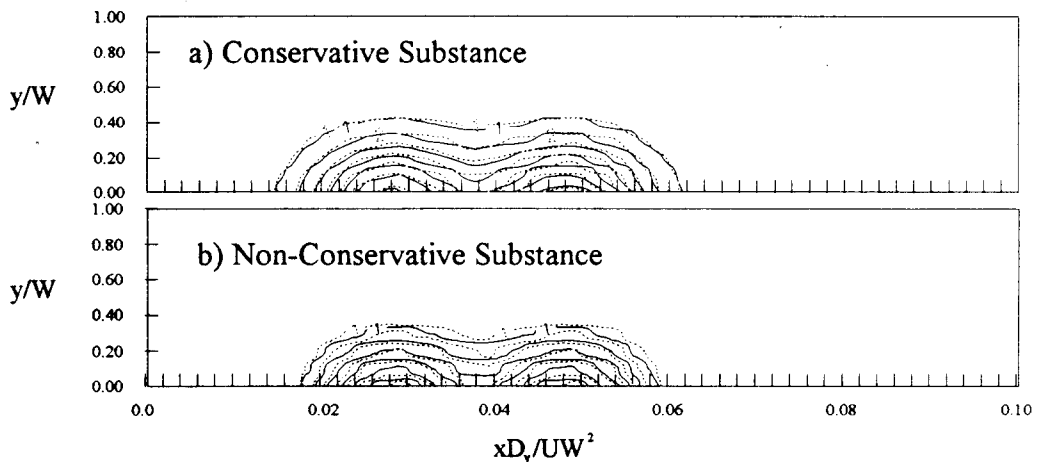


Fig. 3 Concentration Distribution of a) Conservative Substance and b) Non-Conservative Substances 10 Minutes After Injection (2-point Injection at  $x'_i = 0, y'_i = 0$  and  $x'_i = 0.02, y'_i = 0$ ); — : Analytic Solution; - - - : Random-Walk Model

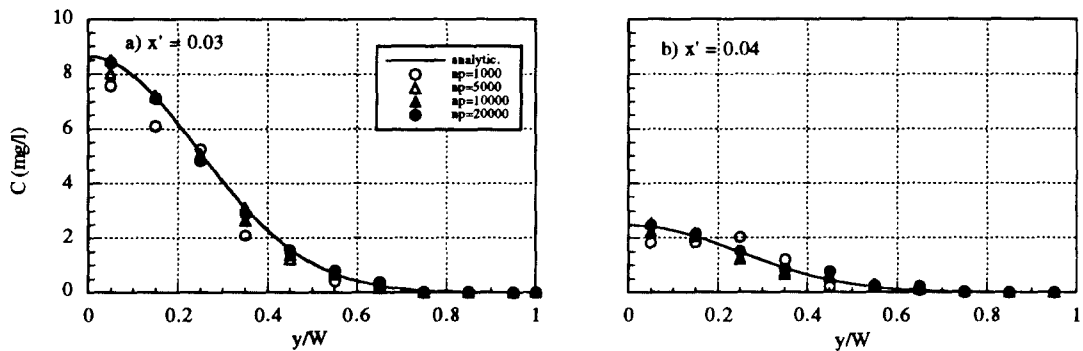


Fig. 4 Comparison of Lateral Concentration Distributions of Conservative Substances 10 Minutes After Injection (1-Point Injection at  $x'_0 = 0$ ,  $y'_0 = 0$ )

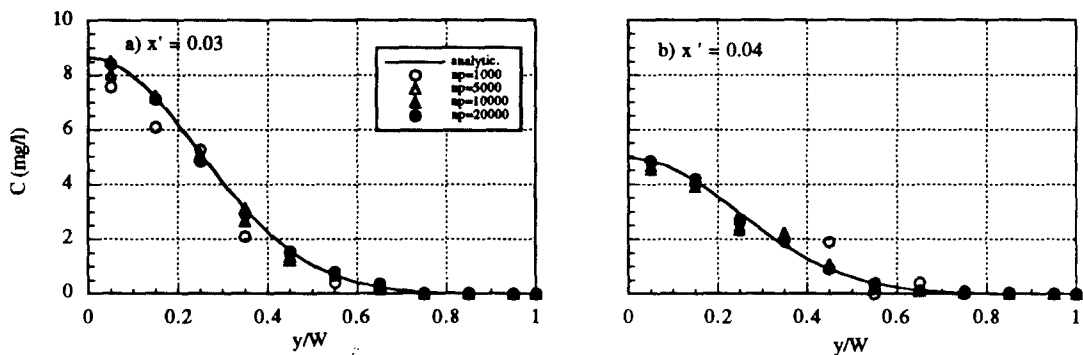


Fig. 5 Comparison of Lateral Concentration Distributions of Conservative Substances 10 Minutes After Injection (2-Point Injection at  $x'_0 = 0$ ,  $y'_0 = 0$  and  $x'_0 = 0.02$ ,  $y'_0 = 0$ )

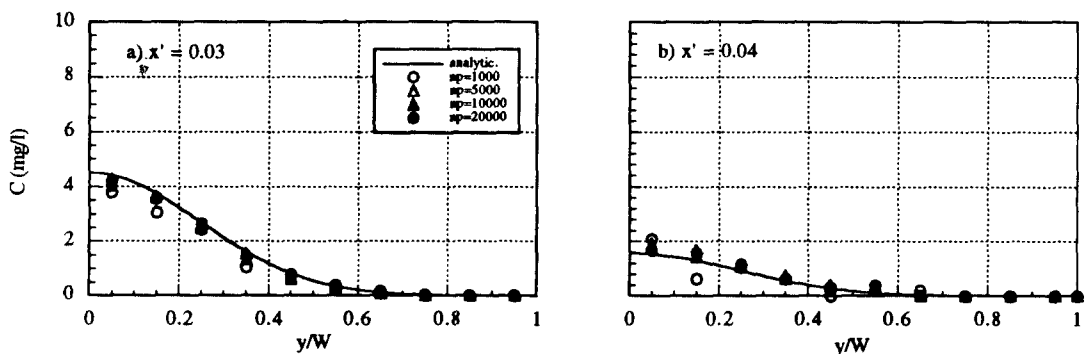


Fig. 6 Comparison of Lateral Concentration Distributions of Non-Conservative Substances 10 Minutes After Injection (1-Point Injection at  $x'_0 = 0$ ,  $y'_0 = 0$ )

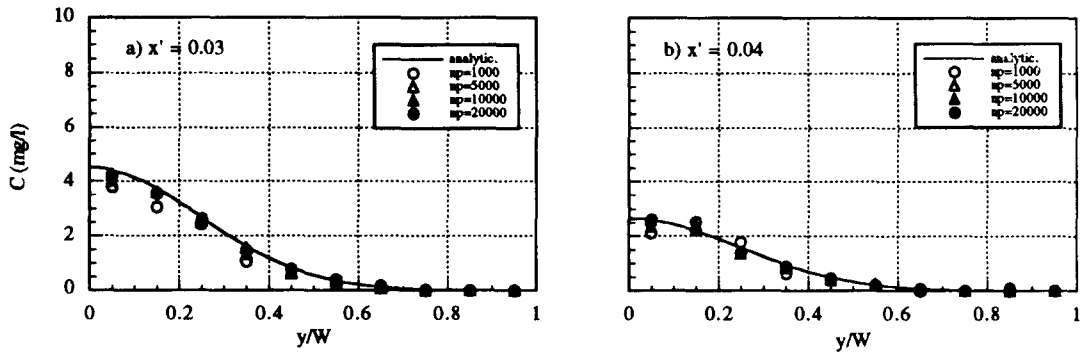


Fig. 7 Comparison of Lateral Concentration Distributions of Non-Conservative Substances 10 Minutes After Injection (2-Point Injection at  $x_o' = 0, y_o' = 0$  and  $x_o' = 0.02, y_o' = 0$ )

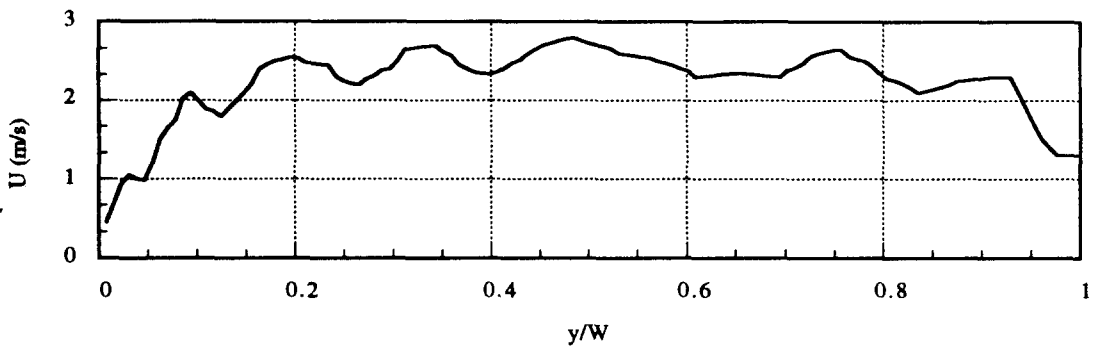


Fig. 8 Velocity Distribution of Fox River at Ottawa, Illinois [After Seo (1988)]

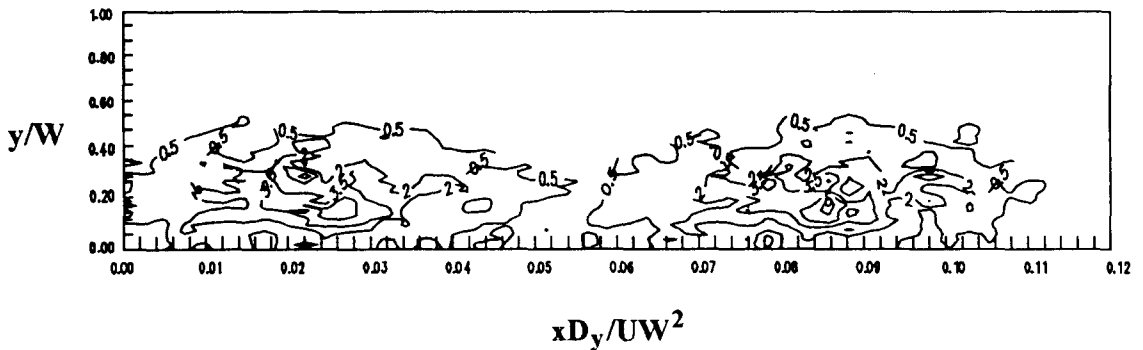


Fig. 9 Concentration Distribution of Non-Conservative Substance 120 Minutes After Injection (2-Point Injection at  $x_o' = 0, y_o' = 0, x_o' = 0.08, y_o' = 0$ ) at Fox River, Ottawa, Illinois