

# 전달행렬법에 의한 다공질 흡음재료의 음향특성 연구

\*염창훈\*, 박철회\*\*, 주재만\*\*\*

(Study on the Acoustic Properties of Porous Materials by Using Acoustical Transfer Matrix)

(Chang-Hun Yom, Chul-Hui Pak, Jae-Man Joo)

## 1. 서론

최근의 승용차 설계시 심각하게 대두되고 있는 것 중의 하나가 소음문제로서, 엔진에서 발생하는 소음이나 외부소음이 차실 내의 운전자에게 불쾌감을 초래하지 않도록 하기 위한 방법들 중의 하나로서 소음지감용 목적으로한 다공질 흡음재료(Porous Sound Absorbing Material)가 널리 이용되고 있다. 다공질 흡음재료에 대한 연구는 그 구조의 복잡함 때문에 국내에서는 연구활동이 미진하였다. 다공질 흡음재료에서 발생하는 흡음현상의 해석은 흡음재료 세공내 공기와 흡음재료 frame의 운동이 어떻게 연계되는가를 잘 이해하고, 흡음재료의 물성치 변화와 음(sound)의 전파과정을 잘 파악함으로써 가능한 것이다.

Biot 이론[1],[2]에 의하면 하면 다공질 흡음재료 내부를 진행하는 wave는 속도가 서로 다른 2개의 P파(compressional wave)와 하나의 S파(shear wave)가 있음을 알 수 있다. 즉 흡음재료 frame과 흡음재료 세공내 공기 사이에 상호작용이 없으면 흡음재료 세공내 공기 중에는 하나의 P파만이 진행할 것이고, 흡음재료 frame에는 다른 P파와 S파가 진행할 것이다. 그러나 실제로는 흡음재료 frame과 흡음재료 세공내 공기 사이에 상호작용에 의해서 3개의 wave가 흡음재료 frame과 흡음재료 세공내 공기 중에 진행한다. 다공질 흡음재료 내부로 입사되는 3개 wave의 진폭과 다공질 흡음재료 내부에서 반사되어지는 3개 wave의 진폭을 알면 다공질 흡음재료의 음향거동을 알 수 있다. Allard 이론[3]에 의하면 이들 6개의 진폭 대신에 6개의 다른 독립변수들(흡음재료 앞면과 뒷면에서의 음의 속도와 압력)을 이용하여 전달행렬(Acoustic Transfer Matrix)기법을 이용하면 다공질 흡음재료의 음향거동을 알 수 있다.

본 연구에서는 다공질 흡음재료 중 closed cell 구조를 갖는 발포수지재료(Foamed Material)에 음(sound)이 입사할 때 발생하는 흡음현상을 보다 정확히 예측하기 위해서 다공질 흡음재료에 대한 Biot 이론에 근거한 Allard의 모델링기법[4]을 이용하여 해석 프로그램을 개발하였고, 이를 이용하여 다공질 흡음재료가 단층(single layer)일 때 이 재료의 Surface Impedance와 흡음률(Absorption Coefficient)을 예측하고, 물성치(parameters)변화에 따른 다공질 흡음재료의 흡음특성을 분석하였으며, 이 재료가 자동차 제조시 사용되는 압연강판(rolled steel plate)에 부착되었을 때의 투과손실(Transmission Loss)을 예측하였고, 또한 다공질 흡음재료는 중고주파 대역의 음에 대한 흡음특성은 좋지만 저주파 대역

의 음에 대한 흡음특성은 좋지 않으므로 흡음재료의 저주파 대역의 흡음특성을 향상시키기 위해서 2층(two layers)으로 하였을 때의 흡음특성을 분석하였다. 본 논문의 연구결과는 자동차 제조시 사용되어지는 다공질 흡음재료는 물론 산업용기계나 건축용등 여러 분야에서 사용되어지는 다공질 흡음재료의 흡음특성 분석에 응용될 수 있으리라 기대된다.

## 2. 다공질 흡음재료의 운동방정식

Biot 이론을 이용하여 다공질 흡음재료를 모델링하고, 이로부터 용력-변형률 관계식, Potential Energy, Kinetic Energy, Dissipation Energy를 구하고 이를 Lagrange's Equation에 적용하여 운동 방정식을 유도한다. 모델링에 이용된 다공질 흡음재료는 closed cell 구조를 갖는 발포수지재료(Foamed Material)이다. 다공질 흡음재료 내의 공기는 압축성 유체이며, 다공질 흡음재료 frame과 마찰을 일으키면서 상대적으로 유동한다. 재료의 성질은 isotropic, symmetric하며, 다공질 흡음재료를 구성하는 세공의 크기는 단위 크기의 다공질 흡음재료 입방체보다 작다고 가정하였다.

### 2-1 용력-변형률 관계식

다공질 흡음재료의 용력-변형률 관계식[1]은 식(1)과 같다

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= [(P - 2N)e + Q\epsilon] \delta_{ij} + 2Ne_{ij} \quad (1) \\ s &= (-\beta P) = Qe + R\epsilon, \quad i, j = x, y, z \end{aligned}$$

식(1)의  $P_f$ 는 다공질 흡음재료 내 공기의 압력,  $\beta$ 는 공극률,  $P, Q, R$ 은 Biot의 탄성 상수들,  $N$ 은 다공질 흡음재료의 전단탄성계수이며,  $\tau_{ij}$ 와  $e_{ij}$ 는 다공질 흡음재료의 용력과 변형률 성분이다.

$$e = \nabla \cdot u, \quad \epsilon = \nabla \cdot U \quad (2)$$

여기서  $u$ 와  $U$ 는 다공질 흡음재료 frame과 다공질 흡음재료 내부 공기의 변위이다. 다공질 흡음재료에 대한  $P, Q, R$ 은 식(3-1),(3-2)와 같이 나타내어질 수 있다

$$\begin{aligned} P &= K_0 + \frac{4}{3}N + \frac{(1-\beta)^2}{\beta}K_f \\ Q &= (1-\beta)K_f \\ R &= \beta K_f \end{aligned} \quad (3-1)$$

(3-1),(3-2)식의  $K_0$ 는 다공질 흡음재료 frame의 체적탄성계수,  $K_f$ 는 다공질 흡음재료 내 공기의 체적 탄성계수,  $\mu$ 는 흡

\* 인하대학교 기계공학과 대학원  
\*\* 인하대학교 기계공학과  
\*\*\* 인하대학교 기계공학과 대학원

$$K_b = 1.4 \times 10^5 \left[ 1 + \frac{0.8J_1(0.86\mu\sqrt{-j})}{0.86\mu\sqrt{-j} J_0(0.86\mu\sqrt{-j})} \right]^{-1}$$

$$K_f = \frac{2N(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (3-2)$$

$$\mu = c \left[ \frac{8\omega\rho_2}{\sigma\beta^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

음재료 내 공기와 흡음재료 frame의 변위비,  $\nu$ 는 다공질 흡음재료 frame의 프와송수이며,  $\sigma$ 는 유동저항(flow resistivity)이다.

### 2-2 계의 Potential Energy

계의 Potential Energy와 Kinetic Energy를 구할 때, 계의 모든 감쇠력을 무시하여 계를 보존계(Conservative system)로 가정하였다. 다공질 흡음재료의 단위 체적당 Total Potential Energy는 식(4)와 같다.

$$W = \frac{1}{2} [ \sigma_{xx}e_{xx} + \sigma_{yy}e_{yy} + \sigma_{zz}e_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz} ] \quad (4)$$

### 2-3 계의 Kinetic Energy

다공질 흡음재료의 단위 체적당 Kinetic Energy는 식(5)와 같다.

$$T = \frac{1}{2} [ \rho_{11} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 + 2\rho_{12} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) + \rho_{22} \left( \left( \frac{\partial U_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 ] \quad (5)$$

$$\rho_{11} = \rho_1 + \rho_a, \quad \rho_{12} = -\rho_a, \quad (6)$$

$$\rho_{22} = \beta\rho_f + \rho_a, \quad \rho_a = \beta\rho_f(k_s - 1)$$

여기서  $\rho_1$ 는 다공질 흡음재료 frame의 밀도,  $\rho_f$ 는 다공질 흡음재료 내 공기의 밀도,  $\rho_a$ 는 Biot 이론에 의한 inertial coupling term이며,  $k_s$ 는 tortuosity 이다.

### 2-4 계의 Dissipation Energy

감쇠는 다공질 흡음재료 frame과 흡음재료 내 공기의 상대적인 운동에 의해 발생한다. 따라서, 다공질 흡음재료 frame과 흡음재료 내 공기사이의 상대적인 운동이 있을 때, 계의 Dissipation Energy는 식(7)과 같다.

$$D = \frac{1}{2} b [ (\dot{u}_x - \dot{U}_x)^2 + (\dot{u}_y - \dot{U}_y)^2 + (\dot{u}_z - \dot{U}_z)^2 ] \quad (7)$$

$$b = -\frac{\sigma\beta^2}{4} \mu\sqrt{-j} \frac{J_1(\mu\sqrt{-j})}{J_0(\mu\sqrt{-j})} \times \left( 1 - \frac{2J_1(\mu\sqrt{-j})}{\mu\sqrt{-j}J_0(\mu\sqrt{-j})} \right)^{-1}$$

여기서  $b$ 는 Biot 이론에 의한 viscous coupling term이다.

### 2-5 다공질 흡음재료의 운동방정식

앞에서 구한식 (4),(5),(7)을 Lagrange's Equation에 대입하여 다공질 흡음재료의 운동방정식[1]을 유도하면 다음과 같다.

$$N\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla [ (P-N)e + Q\epsilon ] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} U) + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - U)$$

$$\nabla [ Qe + R\epsilon ] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \mathbf{u} + \rho_{22} U) - b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - U) \quad (8)$$

## 3. 음향전달행렬(Acoustic Transfer Matrix)

### 3-1 변위 벡터

Fig.1에서와 같이 공기 중에서 평면파(plane wave)가 음을 투과시키지 않고 반사시키는 단단한 벽에 부착되어있는 다공질 흡음재료 표면에 입사각  $\theta$ 로 입사하는 경우를 보자. A 점은 다공질 흡음재료에 아주 근접한 공기 중에 위치한 점이고, B점은 공기에 아주 근접한 다공질 흡음재료 내에 위치한 점이며, C점은 벽과 아주 근접한 다공질 흡음재료 내에 위치한 점이다. 공기 중에서  $\theta$ 각으로 입사하는 평면파는 다공질 흡음재료 내에 2개의 P파와 하나의 S파를 발생시킨다. 입사하는 평면파(음파)는  $y$ 축과  $90^\circ$ 로 입사한다고 하자. 공기 중에서 입사하는 평면파의 변위 potential로부터 다공질 흡음재료 내부를 진행하는 wave의 변위 potential로 전환하기 위해 Fig.1에서와 같이 경계면 Z에서 공기 중에서 입사하는 평면파와 다공질 흡음재료 내에서 굴절되는 wave의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$k \sin \theta = k_i \sin \phi_i, \quad i=1,2,3 \quad (9)$$

$$k_i \sin \phi_i = k_i S_{\beta i} = \gamma, \quad (10)$$

$$S_{\beta} = (1 - S_{\beta i}^2)^{\frac{1}{2}} = \cos \phi_i, \quad (11)$$

$$k_i S_{\beta} = a_i, \quad i=1,2,3 \quad (12)$$

여기서  $k$ 는 공기의 wave number,  $k_i$ 는 다공질 흡음재료 내부를 진행하는 wave의 wave number이고,  $\phi_i$ 는 굴절각이다. Fig.1에서 다공질 흡음재료 내 양의  $z$ 방향으로 진행하는 wave의 변위 potential은 식(13)과 같다.

$$\phi_i = A_i e^{i(\lambda\omega t - \gamma x - a_i z)} \quad i=1,2,3 \quad (13)$$

다공질 흡음재료 내 음의  $z$ 방향으로 진행하는 wave의 변위 potential은 식(14)와 같다

$$\phi'_i = A'_i e^{i(\lambda\omega t - \gamma x + a_i z)} \quad i=1,2,3 \quad (14)$$

입사하는 wave와 반사되는 wave를 합쳐서 나타내면 식(15)와 같다.

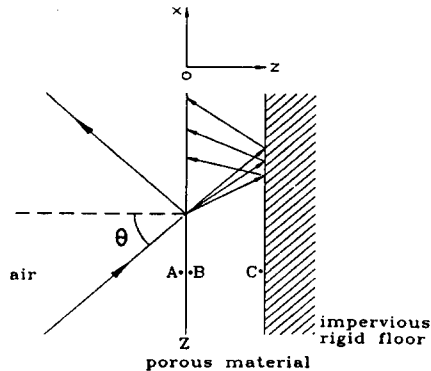


Fig.1 A layer of porous sound absorbing material set on an impervious rigid floor

$$\Phi_i = \phi_i + \phi'_i, \quad i=1,2,3 \quad (15)$$

$$\Phi_i = e^{j\omega t} \cdot e^{-j\gamma z} \{ (A_i + A'_i) \cos \alpha_i z - j(A_i - A'_i) \sin \alpha_i z \} \quad (16)$$

다공질 흡음재료의 변위벡터 표현은 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{H} \quad (17)$$

$$\mathbf{U} = \nabla \Psi + \nabla \times \mathbf{G}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad H = \Phi_3 \quad (18)$$

$$\Psi = \mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2, \quad G = \mu_3 H$$

여기서  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ 는 각 wave에 대한 다공질 흡음재료 frame과 다공질 흡음재료 내 공기와와의 변위비이다.

### 3-2 음향전달행렬(Acoustic Transfer Matrix)

다공질 흡음재료 내부로 입사되는 3개의 wave의 진폭과 다공질 흡음재료 내부에서 반사되어지는 3개의 wave의 진폭을 알면 다공질 흡음재료의 음향거동을 알 수 있다. Allard의 이론[3],[4],[5]에 의하면 6개의 진폭 대신에 6개의 독립 변수들을 이용하여 다공질 흡음재료의 음향거동을 나타낼 수 있다. 선택된 6개의 독립변수들은  $V_x^s, V_z^s, V_x^i, \tau_{xz}^s, \tau_{xz}^i, \tau_{xz}^r$ 이며, 각각은 다공질 흡음재료 frame의 x방향 속도, 다공질 흡음재료 frame의 z방향 속도, 다공질 흡음재료 내 공기의 z방향 속도, 다공질 흡음재료 frame과 다공질 흡음재료 내 공기의 압력성분들이다. 즉, 다공질 흡음재료 앞면과 뒷면에서의 속도와 압력 성분을 알면 재료의 음향거동을 알 수 있다. 여기서 구하고자 하는 음향전달행렬은 다공질 흡음재료 앞면과 뒷면에서의 속도와 압력 관계를 행렬식으로 표현한 것이다. 앞서 구한 다공질 흡음재료의 용력-변형률 관계식과 변위벡터를 이용하여 속도와 압력성분을 구한다. Fig.1에서와 같이 입사되는 평면파는 y축에 수직하게 입사하고, x-y 평면에 대해서는 무한하다고 하자. 속도 성분을 나타내면 식(19)와 같다.

$$\begin{aligned} V_x^s &= \left( \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} \right) j\omega \\ V_z^s &= \left( \frac{\partial(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial x} \right) j\omega \\ V_x^i &= \left( \frac{\partial(\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu_3\Phi_3)}{\partial z} \right) j\omega \\ V_z^i &= \left( \frac{\partial(\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)}{\partial z} + \frac{\partial(\mu_3\Phi_3)}{\partial x} \right) j\omega \end{aligned} \quad (19)$$

압력성분을 나타내면 식(20)과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{xx}^s &= (P+Q\mu_1) \left( \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} \right) + (P+Q\mu_2) \left( \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - 2N \left( \frac{\partial^2(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial z} \right) \\ \tau_{xx}^i &= 2N \frac{\partial^2(\Phi_1 + \Phi_2)}{\partial x\partial z} + N \left( \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{xz}^s &= (Q+R\mu_1) \left( \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} \right) + (Q+R\mu_2) \left( \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

속도와 압력성분들을 행렬식으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\overline{\mathbf{V}}_B^s = (V_x^s, V_z^s, V_x^i, \tau_{xx}^s, \tau_{xx}^i, \tau_{xz}^s)^T \quad (21)$$

$$\overline{\mathbf{V}}_B = [ \Gamma(B) ] \overline{\mathbf{A}} \quad (22)$$

$$\overline{\mathbf{A}} = [ (A_1 + A'_1), (A_1 - A'_1), (A_2 + A'_2), (A_2 - A'_2), (A_3 + A'_3), (A_3 - A'_3) ]^T \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\gamma z} \quad (23)$$

[ $\Gamma(B)$ ]행렬의 요소들은 식(19),(20)에 의해 얻어지며 이들 요소들은 Table 1에 나타나어져 있다. 식(22)은 다공질 흡음재료 앞면(B점)에서의 속도와 압력을 행렬식으로 나타낸 것이다. 식(22)에서와 같은 방법을 적용하여 다공질 흡음재료 뒷면(C점)에서의 속도와 압력을 행렬식으로 나타내면 식(24)와 같다.

$$\overline{\mathbf{V}}_C = [ \Gamma(C) ] \overline{\mathbf{A}} \quad (24)$$

식(22),(24)로부터 음향전달행렬 [  $T$  ] 를 구하면 식(26)과 같다.

$$\overline{\mathbf{V}}_B = [ T ] \overline{\mathbf{V}}_C \quad (25)$$

$$[ T ] = [ \Gamma(B) ] [ \Gamma(C) ]^{-1} \quad (26)$$

Table 1 The elements of [  $\Gamma(B)$  ] matrix

$\gamma\omega \times$	$-j\gamma\omega \times$	$\gamma\omega \times$	$-j\gamma\omega \times$	$j\omega\alpha_3 \times$	$-\omega\alpha_3 \times$
$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\sin\alpha_2 z$	$\sin\alpha_3 z$	$\cos\alpha_3 z$
$-j\omega a_1 \times$	$\omega a_1 \times$	$-j\omega a_2 \times$	$\omega a_2 \times$	$\gamma\omega \times$	$-j\gamma\omega \times$
$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_2 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\cos\alpha_3 z$	$\sin\alpha_3 z$
$-j\omega\mu_1 a_1 \times$	$\omega\mu_1 a_1 \times$	$-j\omega\mu_2 a_2 \times$	$\omega\mu_2 a_2 \times$	$\omega\gamma\mu_3 \times$	$-j\omega\gamma\mu_3 \times$
$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_2 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\cos\alpha_3 z$	$\sin\alpha_3 z$
$-C_1 \times$	$jC_1 \times$	$-C_2 \times$	$jC_2 \times$	$2Nj\alpha_3 \gamma \times$	$-2N\gamma\alpha_3 \times$
$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\sin\alpha_2 z$	$\sin\alpha_3 z$	$\cos\alpha_3 z$
$2Nj\gamma a_1 \times$	$-2N\gamma a_1 \times$	$2Nj\gamma a_2 \times$	$-2N\gamma a_2 \times$	$N(\alpha_3^2 - \gamma^2) \times$	$-jN(\alpha_3^2 - \gamma^2) \times$
$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_2 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\times \sin\alpha_3 z$	$\times \sin\alpha_3 z$
$-D_1 \times$	$jD_1 \times$	$-D_2 \times$	$jD_2 \times$	0	0
$\cos\alpha_1 z$	$\sin\alpha_1 z$	$\cos\alpha_2 z$	$\sin\alpha_2 z$		

즉 식(25)에서와 같이 다공질 흡음재료 앞면(B점)과 뒷면(C점)에서의 속도와 압력관계는 (6×6)의 음향전달행렬[T] [3]에 의해 나타내어진다.

### 4. Surface Impedance 와 흡음률 예측

Fig.1에서와 같이 다공질 흡음재료가 음을 투과시키지 않고 반사시키는 단단한 벽에 부착되어 있을 때 공기 중에서 음이  $\theta$ 의 각도로 입사할 때 Surface Impedance와 흡음률(Absorption Coefficient)을 구하고자 한다.

#### 4-1 경계조건

경계면 Z에서의 경계조건[6]은 다음과 같다.

$$\tau_{xz}^i(B) = -\beta P_i(A) \quad (27)$$

$$\tau_{xx}^i(B) = -(1-\beta) P_r(A) \quad (28)$$

$$V_z^i(A) = \beta V_z^i(B) + (1-\beta) V_z^s(B) \quad (29)$$

$$\tau_{xz}^s(B) = 0 \quad (30)$$

$$V_z^i(C) = V_z^s(C) = V_z^r(C) = 0 \quad (31)$$

#### 4-2 Surface Impedance

A점에서 Acoustic Impedance Z는 식(32)와 같다.

$$Z = \frac{P_1(A)}{V_1'(A)} \quad (32)$$

여기서  $P_1(A)$ 와  $V_1'(A)$ 는 A점에서 공기의 압력과 z방향 공기의 속도이다. 식(27)~(31)의 경계조건과 음향전달행렬 [T] 그리고 식(32)의 Acoustic Impedance를 이용하여 다공질 흡음재료의 Surface Impedance 를 구하면 다음과 같다.

$$Z = \frac{(\Delta_5 \Delta_8 - \Delta_6 \Delta_7)}{E} \quad (33)$$

$$E = (1 - \beta)^2 (\Delta_2 \Delta_7 - \Delta_1 \Delta_8) + \beta^2 (\Delta_3 \Delta_6 - \Delta_4 \Delta_5) + \beta(1 - \beta) (\Delta_4 \Delta_7 + \Delta_1 \Delta_6 - \Delta_3 \Delta_8 - \Delta_2 \Delta_5) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= T_{24} T_{55} - T_{25} T_{54} & \Delta_5 &= T_{44} T_{55} - T_{45} T_{54} \\ \Delta_2 &= T_{26} T_{55} - T_{25} T_{56} & \Delta_6 &= T_{46} T_{55} - T_{45} T_{56} \\ \Delta_3 &= T_{34} T_{55} - T_{35} T_{54} & \Delta_7 &= T_{64} T_{55} - T_{65} T_{54} \\ \Delta_4 &= T_{36} T_{55} - T_{35} T_{56} & \Delta_8 &= T_{66} T_{55} - T_{65} T_{56} \end{aligned} \quad (35)$$

Table 2의 물성치를 이용하여 식(33)의 Surface Impedance를 구한 것이 Fig.2에 나타나 있다.

Table 2 Parameters of a porous sound absorbing material

Thickness l (cm)	Tortuosity ks	Density of the frame $\rho_1$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Flow resistivity $\sigma$ (Ns/m <sup>4</sup> )	Porosity $\beta$	Shear Modulus N (N/m <sup>2</sup> )	Poisson Coefficient $\nu$	Form factor C
3.43	1.1	33	5000	0.98	50000+5000 j	0.3	1.2

#### 4-3 흡음률(Absorption Coefficient) 예측

앞서 구한 식(33)의 Surface Impedance Z 를 이용하여 흡음률[ $\alpha$ ]을 구하면 다음과 같다.

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z - \rho_0 c_0 / \cos \theta}{Z + \rho_0 c_0 / \cos \theta} \right|^2 \quad (36)$$

여기서  $\rho_0$ 는 공기의 밀도이고,  $c_0$ 는 공기의 위상속도이다.

Table 2의 물성치를 이용하여 식(36)의 흡음률을 구한 것이 Fig.3에 나타나 있다.

Fig.2, Fig.3의 결과에서 보는바와 같이 실험을 행하지 않고

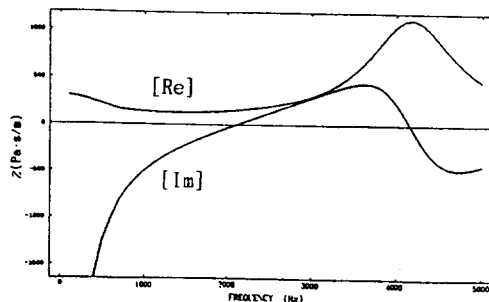


Fig.2 The surface impedance  $Z$  at normal incidence ( $\theta = 0^\circ$ )

도 다공질 흡음재료의 Surface Impedance와 흡음률을 예측할 수 있다.

#### 5. 물성치 변화에 따른 흡음특성 분석

Fig.1과 같이 다공질 흡음재료가 음을 투과시키지 않고 반사시키는 단단한 벽에 부착되어 있을 때 Table 2의 물성치를 갖는 다공질 흡음재료를 기준으로 하여 각각의 물성치를 변화시켰을 때 다공질 흡음재료의 흡음특성을 분석하였다.

##### 5-1 입사각 $\theta$ 의 변화

다공질 흡음재료에 입사하는 음의 입사각을 다음과 같이 ①  $\theta = 0^\circ$ , ②  $\theta = 30^\circ$ , ③  $\theta = 45^\circ$ , ④  $\theta = 60^\circ$  변화시켰을 때의 다공질 흡음재료의 흡음특성이 Fig.4에 나타나 있다. Fig.4의 결과를 보면 입사각에 따라 흡음률이 달라짐을 알 수 있다.

##### 5-2 두께 변화

다공질 흡음재료의 두께를 ① 1.715cm, ② 2.29cm, ③ 3.43cm, ④ 6.86cm 로 변화시켰을 때의 다공질 흡음재료의 흡음특성이 Fig.5에 나타나 있다. Fig.5의 결과를 보면 흡음재료의 두께가 두꺼워 질수록 저음(low frequency)의 흡수가 잘됨을 알 수 있으며, 흡음재료의 두께가 Target Frequency에서 입사음의 파장의 1/4에 해당할 때 가장 좋음을 알 수 있다.

##### 5-3 유동저항(flow resistivity) 변화

Target Frequency 를 ① 500Hz, ② 1500Hz, ③ 2500Hz, ④ 3500Hz 로 했을 때의 유동저항  $\sigma$  (N·s/m<sup>4</sup>)의 변화에 따른 다공질 흡음재료의 흡음특성이 Fig.6에 나타나 있다. Fig.6의 결과에 의하면 Target Frequency 마다 흡음률을 최대로 하는 유동저항값이 다름을 알 수 있다.

##### 5-4 공극률(porosity) 변화

다공질 흡음재료의 공극률  $\beta$ 를 ① 0.6, ② 0.7, ③ 0.8, ④ 0.9, ⑤ 0.99 로 변화시켰을 때의 흡음특성이 Fig.7에 나타나 있다. Fig.7의 결과에 의하면 공극률이 커질수록 흡음특성이 좋아지며, 특히 저음 역과 흡음재료의 두께를 입사음 파장의 1/4로 하는 주파수이상의 대역에서 흡음률이 좋아짐을 알 수 있다.

##### 5-5 밀도(frame density) 변화

다공질 흡음재료 frame의 밀도  $\rho_1$  (kg/m<sup>3</sup>)를 ① 35(kg/m<sup>3</sup>),

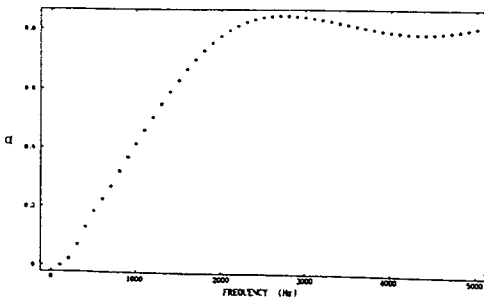


Fig.3 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

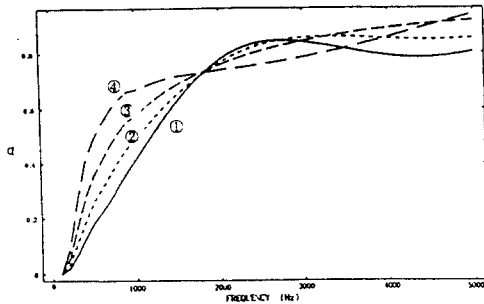


Fig. 4 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

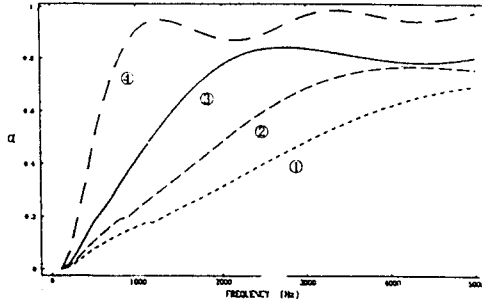


Fig. 5 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

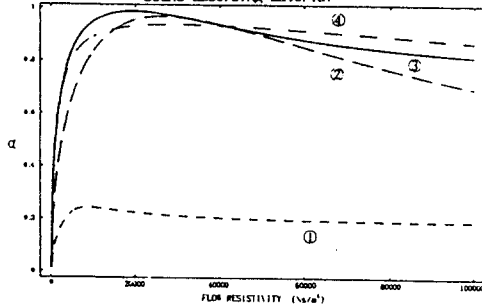


Fig. 6 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

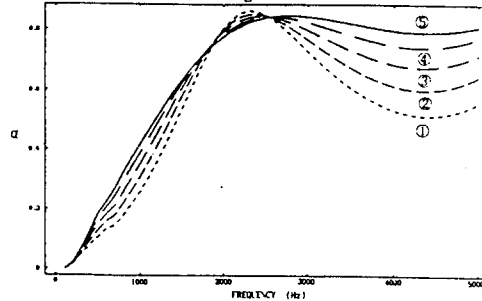


Fig. 7 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

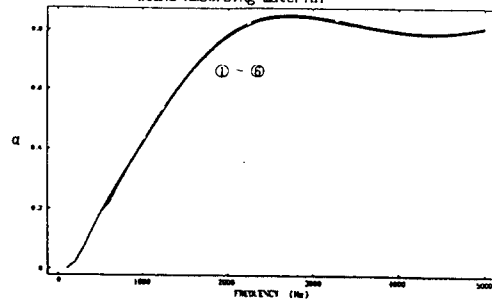


Fig. 8 The absorption coefficient  $\alpha$  of a porous sound absorbing material

②  $100(\text{kg}/\text{m}^3)$ , ③  $200(\text{kg}/\text{m}^3)$ , ④  $300(\text{kg}/\text{m}^3)$ , ⑤  $400(\text{kg}/\text{m}^3)$ , ⑥  $500(\text{kg}/\text{m}^3)$ 로 변화시켰을 때의 흡음특성이 Fig.8에 나타나 있다. Fig.8의 결과를 보면 밀도변화에 따라 흡음률이 변화되지 않음을 알 수 있다. 그러나 실제 다공질 흡음재료를 제조하는 과정에서 밀도를 변화시킬 때 흡음재료의 흡음률이 변화하는 것으로 알려져 있는데 이는 흡음재료 제조과정에서 밀도를 변화시켰을 때 흡음재료의 다른 물성치들이 함께 변화하기 때문이다. 본 논문에서는 다른 모든 물성치를 고정시키고 흡음재료 frame의 밀도만을 변화시켰을 때의 결과를 본 것이다.

## 6. 투과손실(Transmission Loss) 예측

Allard의 음향전달행렬을 이용하여 Fig.9에서와 같이 얇은 평판(안연강판)에 부착되어 있는 다공질 흡음재료에  $\theta$ 의 각도로 평면파(음파)가 입사할 때 음의 투과손실을 예측하고자 한다. x-y plane에 대해서는 무한하다고 하고 입사되는 평면파는 y축에 수직하게 입사한다고 가정하자.

### 6-1 평판의 운동방정식

Fig.9의 평판의 두께는 입사되는 음의 파장보다 작으며 평판은 음이 투과될 때 flexural deformation[8] 한다고 하자. 평판의 운동방정식[9]은 다음과 같다.

$$D \frac{\partial^4 u_z(D)}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 u_z(D)}{\partial t^2} = \quad (37)$$

$$\tau'_{zz}(E) - \tau'_{zz}(C) - \tau'_{zz}(C) + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \tau'_{xz}(C)}{\partial x} \right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (38)$$

식(37)에서  $\rho$ 는 평판의 밀도,  $h$ 는 평판의 두께, 식(38)의  $D$ 는 평판의 굽힘강성,  $\nu$ 는 평판의 프와송수이다.  $u_z(D)$ 는 평판의 Z방향 변위,  $\tau'_{zz}(E), \tau'_{zz}(C)$ 은 E점에서의 C점에서의 흡음재료내 공기의 Z방향 응력,  $\tau'_{zz}(C), \tau'_{zz}(C)$ 는 C점에서 흡음재료 frame의 Z방향 응력이다.

### 6-2 투과 음의 압력 진폭

Fig.9에서 공기중의 다공질 흡음재료 앞쪽에서의 음압  $P_i$ 는 식(39)와 같다.

$$P_i = (e^{jk\cos\theta z} + R e^{-jk\cos\theta z}) \cdot e^{j(\omega t - k\sin\theta x)} \quad (39)$$

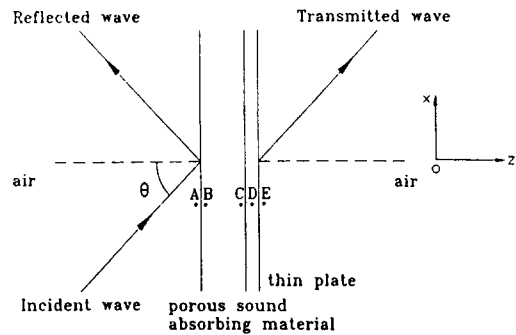


Fig. 9 A porous sound absorbing material bonded on to a thin plate

식(39)의  $R$ 은 다공질 흡음재료의 Reflection coefficient이다. 공기중의 다공질 흡음재료 앞쪽에서의 음(sound)의  $z$ 방향 속도  $V_{iz}$ 는 식(40)과 같다.

$$V_{iz} = \frac{\cos \theta}{\rho_0 c_0} [ e^{jk \cos \theta z} - R e^{-jk \cos \theta z} ] \cdot e^{j(\omega t - k \sin \theta x)} \quad (40)$$

평판의 오른쪽에서의 투과된 음압  $P_t$ 는 식(41)과 같다.

$$P_t = W e^{j(\omega t - k \cos \theta z - k \sin \theta x)} \quad (41)$$

식(41)의  $W$ 는 투과 음의 압력 진폭이다.

평판의 오른쪽에서 투과 음의  $z$ 방향 속도  $V_{tz}$ 는 식(42)와 같다.

$$V_{tz} = \frac{P_t}{\rho_0 c_0} \cos \theta \quad (42)$$

식(43)의 다공질 흡음재료의 음향전달행렬  $[T]$ 와 식(37)의 평판의 운동방정식 그리고 경계조건을 이용하여 투과 음의 압력진폭을 구할 수 있다.

$$\vec{V}_B = [T] \vec{V}_C \quad (43)$$

다공질 흡음재료 앞쪽(B점)의 경계조건[10]은 다음과 같다.

$$\beta V_1'(B) + (1-\beta) V_2'(B) = V_{iz} = (1-R) \frac{\cos \theta}{\rho_0 c_0} \quad (44)$$

$$r_{1z}'(B) = -(1-\beta) P_t = -(1-\beta)(1+R) \quad (45)$$

$$r_{2z}'(B) = -\beta P_t = -\beta(1+R) \quad (46)$$

$$r_{zz}'(B) = 0 \quad (47)$$

$$V_1(D) = V_1'(E) = V_2'(C) = V_2'(D) \quad (48)$$

식(48)의  $V_1(D)$ 는 평판의  $Z$ 방향 속도이고,  $V_2'(E)$ 는 E점에서 공기의  $Z$ 방향 속도이며,  $V_2'(C), V_2'(D)$ 는 C점에서 흡음재료 frame과 흡음재료 내부 공기의  $Z$ 방향 속도이다.

투과 음의 압력 진폭  $W$ 는 식(49)와 같다.

$$W = \begin{bmatrix} E_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ E_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ E_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & B_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

식(49)의  $A_1 \sim E_3$ 는 APPENDIX에 나와 있다.

### 6-3 투과손실 예측

식(49)의 투과 음의 압력진폭  $W$ 을 이용하여 잔향실 조건하에서의 투과손실  $TL$  [11],[12]을 구하면 식(50)과 같다.

$$TL = -10 \log_{10} \left[ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |W(\theta)|^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \right] \quad (50)$$

Table 2의 물성치를 갖는 다공질 흡음재료를 압연강판 Table 3에 부착하였을 때의 음의 투과손실을 예측한 것이 Fig.10에 나타나 있다.

Fig.10에서 보는 바와 같이 실험을 행하지 않고도 다공질

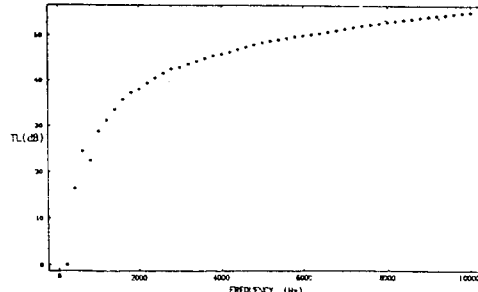


Fig.10 The transmission loss for a porous material bonded on to a thin plate, in diffuse field

흡음재료의 투과손실을 예측할 수 있다.

Table 3 Parameters of a rolled steel plate

Thickness h(mm)	Young's Modulus E(Pa)	Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Poisson Coefficient $\nu$
0.8	$2.068 \times 10^{11}$	7820	0.29

## 7. 지주파 흡음특성 향상을 위한 2층구조 다공질 흡음재료 분석

### 7-1 2층 구조 다공질 흡음재료 모델링

다중구조 다공질 흡음재료의 경우 음향전달행렬(Acoustic Transfer Matrix)을 이용하여 모델링되어질 수 있다는 Allard의 이론[13]을 이용하여 2층구조 다공질 흡음재료를 모델링 하였다. Fig.11의 서로 부착되어 있는 2층구조 다공질 흡음재료가 음을 투과시키지 않고 반사시키는 단단한 벽에 부착되어있을 때 음이  $\theta$ 의 각도로 입사하는 경우를 보자. 앞서 분석한 단층구조 다공질 흡음재료의 음향전달행렬을 구한 것과 같은 방법으로 다공질 흡음재료 ㉠과 ㉡의 음향전달행렬  $[T_a], [T_b]$ 를 구하고, 다공질 흡음재료 ㉠과 ㉡를 연결시켜주는  $6 \times 6$ 의  $[T_{ab}]$ 행렬을 두 다공질 흡음재료가 접하고 있는 경계면 ㉢의 경계조건을 이용하여 구한다. 구한  $[T_a], [T_b], [T_{ab}]$ 로부터 통합된 음향전달행렬  $[T_{ab}]$ 를 구한다.

$$\vec{V}_B = [T_a] \vec{V}_C \quad (51)$$

$$\vec{V}_D = [T_b] \vec{V}_E \quad (52)$$

Fig.11에서의 두 다공질 흡음재료가 접하고있는 경계면 ㉢에서의 경계조건[13]은 다음과 같다.

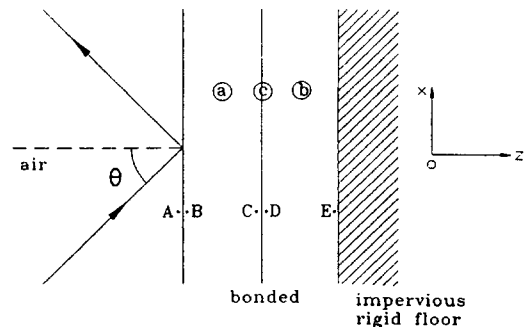


Fig.11 Two layered porous sound absorbing material bonded on an impervious rigid floor

$$V_z'(C) = V_z'(D) \quad (53)$$

$$V_x'(C) = V_x'(D) \quad (54)$$

$$\beta_a(V_z'(C) - V_z'(D)) = \beta_b(V_z'(D) - V_z'(D)) \quad (55)$$

$$\frac{\tau_{zz}'(C)}{\beta_a} = \frac{\tau_{zz}'(D)}{\beta_b} \quad (56)$$

$$\tau_{xz}'(C) = \tau_{xz}'(D) \quad (57)$$

$$\tau_{zz}'(C) + \tau_{xz}'(C) = \tau_{zz}'(D) + \tau_{xz}'(D) \quad (58)$$

식(53)~(58)의 경계조건을 이용하여 두 다공질 흡음재료가 접하는 경계면 ㉞에 아주 근접한 흡음재료 ㉞의 C점에서의 속도와 압력 그리고 ㉞면에 아주 근접한 흡음재료 ㉞의 D점에서 속도와 압력관계를 행렬식으로 표현하면 식(59)와 같다.

$$\vec{V}_C = [T_{ab}] \vec{V}_D \quad (59)$$

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

여기서

$$N_1 = (1 - \frac{\beta_b}{\beta_a}), N_2 = \frac{\beta_b}{\beta_a}, N_3 = (1 - \frac{\beta_a}{\beta_b}), N_4 = \frac{\beta_a}{\beta_b} \text{ 이고,}$$

$\beta_a$ 는 ㉞다공질 흡음재료의 공극률이고,  $\beta_b$ 는 ㉞다공질 흡음재료의 공극률이나, 통합된 음향전달행렬  $[T_a]$ 는 식(61)과 같다.

$$[T_a] = [T_a] [T_{ab}] [T_b] \quad (61)$$

### 7-2 흡음률 예측

앞서 단층구조 다공질 흡음재료의 흡음률을 구할 때와 같은 방법으로 식(61)의  $[T_a]$ 를 이용하여, ㉞ closed cell구조 발포수지재료 + ㉞ closed cell구조 발포수지재료로 이루어진 2층구조 다공질 흡음재료 Table 4의 흡음률을 예측하고, 단층구조일때와 흡음률을 비교한 것이 Fig.12에 나타나 있다. 그리고 ㉞ 유리섬유 시트 + ㉞ closed cell구조 발포수

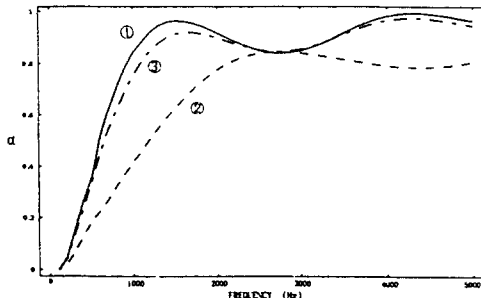


Fig.12 The absorption coefficient of ① two layered foamed material(㉞+㉞) and ② one layer foamed material (㉞ 3.43cm) and ③ one layered foamed material(㉞ 5.43cm)

Table 4 A two layered porous material (㉞ closed cell foamed material + ㉞ closed cell foamed material )

	Thick-ness l (cm)	Tortuo-sity (ks)	Density of the frame $\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	Flow resist-ivity $\sigma$ (Ns/m <sup>4</sup> )	Porosity $\beta$	Shear Modulus $\lambda$ (pa)	Poisson Coeffi-cent $\nu$	Form factor C
㉞	2	1	25	8000	0.97	40000 +j2000	0.3	1.5
㉞	3.43	1.1	33	5000	0.98	50000 +j5000	0.3	1.2

Table 5 A two layered porous material(㉞ glass wool screen + ㉞ closed cell foamed material)

	Thick-ness l (cm)	Tortuo-sity (ks)	Density of the frame $\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	Flow resist-ivity $\sigma$ (Ns/m <sup>4</sup> )	Porosity $\beta$	Shear Modulus $\lambda$ (pa)	Poisson Coeffi-cent $\nu$	Form factor C
㉞	0.05	1	500	$1.1 \times 10^6$	0.8	$(1+0.2j) \times 10^6$	0.3	1.3
㉞	3.43	1.1	33	5000	0.98	50000 +j5000	0.3	1.2

지재료)로 이루어진 2층구조 다공질 흡음재료의 경우, ㉞의 두께가 얇은 (1mm 이하) anisotropic한 유리섬유 시트경우 음이 수직 입사할 때 등가의 isotropic 한 발포수지 재료와 같은 방법으로 모델링되어질 수 있다는 Allard 이론[13]을 이용하여 통합된 음향전달행렬  $[T_a]$ 를 구한다. 이를 이용하여 Table 5의 물성치를 갖는 2층구조 다공질 흡음재료의 흡음률을 예측하고, 유리섬유 시트가 없는 경우와 흡음률을 비교한것이 Fig.13에 나타나 있다.

### 7-3 분석

Fig.12의 결과를 보면 ㉞ closed cell구조 발포수지재료 + ㉞ closed cell구조 발포수지재료)로 이루어진 2층구조 다공질 흡음재료는 단층구조 다공질 흡음재료의 두께를 증가시켰을 때와 흡음률 향상이 거의 비슷하였다. 그러므로 ㉞ closed cell구조 발포수지재료 + ㉞ closed cell구조 발포수지재료)로 이루어진 2층구조 다공질 흡음재료는 흡음률 향상에 별다른 효과가 없음을 알 수 있다. 그러나 ㉞ 유리섬유 시트 + ㉞ closed cell구조 발포수지재료)로 이루어진 2층 구조 다공질 흡음재료는 Fig.13에서 알 수 있듯이 단층구조 다공질 흡음재료보다 저주파에서 흡음특성이 현저히 향상됨을 알 수 있다. 즉 유리섬유 시트가 저주파 흡음특성 향상에 기여함을 알 수 있다.

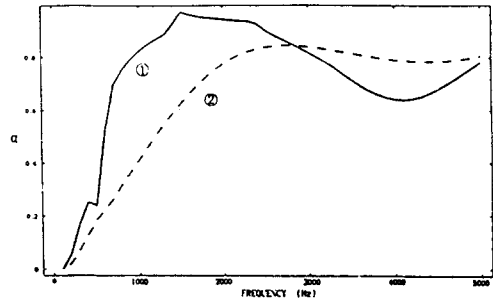


Fig.13 The absorption coefficient of the foamed material ① with and ② without glass wool screen

8. 결 론

- (1) 다공질 흡음재료에 관한 Allard 이론을 이용한 해석 프로그램을 사용하여 다공질 흡음재료의 Surface Impedance와 흡음률 그리고 물성치 변화에 따른 흡음특성 및 평판과 연계된 다공질 흡음재료의 투과손실을 예측할 수 있음을 보여주었다.
- (2) Closed cell구조 발포수지재료의 저주파 흡음특성을 향상시키기 위해서는 single layer closed cell구조 발포수지재료의 두께를 증가하거나 같은 성질의 closed cell구조 발포수지 재료를 2장 겹치는 것 보다 유리섬유 시트를 붙이는 것이 효과적인 방법임을 보여주었다.
- (3) 본 연구에 사용된 해석이론을 사용하면 chamber 크기의 제약으로 실험에서는 신뢰할 수 없는 저주파 영역에 대한 흡음특성을 분석하는데 도움이 될 것으로 생각된다.
- (4) 다공질 흡음재료의 음향특성을 보다 심도 있게 분석하기 위해서는 다공질 흡음재료의 물성치에 대한 연구와 물성치 상호간의 연관관계에 대한 향후 연구가 필요하다고 생각된다

참 고 문 헌

- (1) Biot, M. A., 1956, "Theory of Propagation of Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid," *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol.28, No.2, pp. 168-178.
- (2) Biot, M. A., 1955, "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, No. 2, pp. 182-185.
- (3) Allard, J. F. and Depollier, C. and Rebillard, P., 1989, "Inhomogeneous Biot Waves in Layered Media," *Journal of Applied Physics*, Vol. 66, No. 6, pp. 2278-2284.
- (4) Allard, J. F. and Champoux, Y. and Depollier, C., 1987, "Modelization of Layered Sound Absorbing Materials with Transfer Matrices," *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 82, No. 5, pp. 1792-1796.
- (5) Allard, J. F. and Bourdier, R. and Depollier, C., 1986, "Biot Waves in Layered Media," *Journal of Applied Physics*, Vol. 60, No. 6, pp. 1926-1929.
- (6) Sabatier, J. M. and Bass, H. E. and Bolen, L. E., 1986, "The Interaction of Airborne Sound with the Porous Ground: The Theoretical Formulation," *Journal of the*

- Acoustic Society of America*, Vol.79, No.5, pp. 1345-1352.
- (7) Dowling, A. P. and Ffowcs Williams, J. E., 1983, *Sound and Sources of Sound*, Ellis Horwood Limited.
- (8) Fahy, F., 1985, *Sound and Structural Vibration*, Academic Press Inc..
- (9) Szilard, R., 1974, *Theory and Analysis of Plates*, Prentice-Hall Inc.
- (10) Allard, J. F., 1993, *Propagation of Sound in Porous Media*, Elsevier Applied Science Publishers.
- (11) Lauriks, W. and Mees, P. and Allard, J. F., 1992, "The Acoustic Transmission through layered systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, No. 1, pp. 125-132.
- (12) Pierce, A. D., 1981, *Acoustics*, McGraw-Hill Book Company.
- (13) Rebillard, P. and Allard, J. F. and Depollier, C., 1992, "The Effect of a Porous Facing on the Impedance and the Absorption Coefficient of a layer of Porous Material," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 156, No. 3, pp. 541-555.

APPENDIX [ 식(49)에 사용된 상수들 ]

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -[(1-\beta)T_{21} + \beta T_{31}] \frac{h}{2} jk \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho_o c_o} + [(1-\beta)(T_{22} + T_{23}) + \beta(T_{32} + T_{33})] \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} - M[(1-\beta)T_{26} + \beta T_{36}] \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} \\
 A_2 &= -T_{41} \frac{h}{2} jk \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho_o c_o} + \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} (T_{42} + T_{43}) - M T_{46} \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} \\
 A_3 &= -T_{61} \frac{h}{2} jk \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho_o c_o} + \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} (T_{62} + T_{63}) - M T_{66} \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} \\
 A_4 &= -T_{51} \frac{h}{2} jk \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho_o c_o} + \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} (T_{52} + T_{53}) - M T_{56} \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} \\
 B_1 &= (1-\beta)(T_{24} - T_{25}) & C_1 &= (1-\beta)(T_{25} - NT_{26}) \\
 &+ \beta(T_{34} - T_{35}) & &+ \beta(T_{35} - NT_{36}) & E_1 &= \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} & D_1 &= \frac{\cos \theta}{\rho_o c_o} \\
 B_2 &= T_{44} - T_{45} & C_2 &= T_{45} - NT_{46} & E_2 &= -(1-\beta) & D_2 &= (1-\beta) \\
 B_3 &= T_{64} - T_{65} & C_3 &= T_{65} - NT_{66} & E_3 &= -\beta & D_3 &= \beta \\
 B_4 &= T_{54} - T_{55} & C_4 &= T_{55} - NT_{56}
 \end{aligned}$$