

BEM을 이용한 축대칭 소음기의 성능해석

⁰임정빈* · 정갑철* · 권영필**

(Performance analysis of the axisymmetric mufflers

by BEM)

⁰J.B.Im* , G.C.Jeong* and Y.P.Kwon**

1. 서론

단순팽창관 소음기와 같이 직경이 서로 다른 원형관으로 구성되어 있는 축대칭형 소음기는 이론적인 접근이 용이한 형태이므로 대부분 성능특성에 대한 이론식이 정립되어 있다. 하지만 이러한 이론해석은 1차원 파동인 평면파이론에 근거한 것이므로 고차모드가 나타나기 시작하는 차단주파수에 가까워질수록 실제와는 상당한 차이가 나타날 수 있다. 따라서 1차원 해석을 보완하기 위한 방법으로서 경계요소법 및 유한요소법과 같은 수치해석적인 방법을 사용할 수 있다. 그 중 경계요소법은 유한요소법과는 달리 해석영역내부를 이산화할 필요가 없다는 장점으로 인하여 최근들어 음향문제에 있어서 널리 활용되고 있다.

경계요소법은 경계면만을 이산화한 후 얻은 물리량으로부터 영역내의 임의의 위치에서의 물리량을 얻게 되는 방법으로서 반복적인 적분을 수행해야 하므로 다른 방법들에 비해 연산속도가 빠르지는 않지만 모델링에 소요되는 시간과 노력에 있어서 많은 장점을 가지고 있다.

특히 축대칭형태의 대상에 있어서는 2차원 형태의 경계면에 대한 적분이 generator상의 선적분과 원주방향에 따른 적분으로 적분의 차수가 한 단계 낮아짐으로서 경계요소법의 수식화 및 계산능률에 있어서 많은 잇점을 갖고 있다[1][2][3].

본 연구에서는 축대칭 형태의 음향문제를 해석할

수 있는 경계요소 프로그램을 개발하여 소음기의 투과손실(transmission loss)의 계산에 적용하였다. 우선 단순팽창관 소음기에 대해서는 경계요소법에 의해 투과손실을 구한 후 평면파이론 및 실험으로 구한 값과 비교 평가하였다. 또한, 평면파이론을 적용할 수 없는 경우로서 흡음재를 부착한 팽창관 소음기에 대해서는 경계요소법으로 구한 투과손실을 실험결과와 비교 고찰하였다.

2. 관계이론

음원을 갖지 않는 해석공간의 음장을 구하기 위한 경계적분방정식은 다음과 같다.

$$C^0(P)\phi(P) = \int_S \left[\psi(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) - \phi(Q) \frac{\partial \psi}{\partial n}(P, Q) \right] dS(Q) \quad (1)$$

윗 식에서 ϕ 는 해석영역에서 Helmholtz 방정식을 만족하는 음향속도포텐셜이고, n 은 해석공간 V 로부터 외부로 향하는 경계면 S 에 수직인 방향을 뜻한다. 또한 ψ 는 자유음장 Green 함수로서 3차원 공간에 대해서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi(P, Q) = \frac{e^{-jKR(P, Q)}}{R(P, Q)} \quad (2)$$

식에서 k 는 각진동수와 음속의 비 ω/c 인 파수를 나

* 숭실대학교 기계공학과 대학원

** 숭실대학교 기계공학과

타내고 R 은 점 P 와 Q 사이의 거리를 나타낸다. 만 일 경계면 S 의 형태가 평평하다면 계수 $C^0(P)$ 는 P 점이 V 내부에 위치하는 경우에는 4π , S 상에 위치하는 경우에는 2π , 그리고 해석영역의 외부에 위치한 경우는 0의 값을 갖는다. 하지만, S 가 평평하지 않은 경우 즉, P 가 경계면상의 모서리 또는 꼭지점에 위치하는 경우에 경계면에서의 $C^0(P)$ 는 다음과 같은 일반적인 형태를 취하게 된다.

$$C^0(P) = - \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R(P, Q)} \right) dS(Q) \quad (3)$$

축대칭형태의 경우에는 면적분이 다음과 같은 generator상에 따른 선적분과 원주방향적분으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} C^0(P)\phi(P) &= \int_L \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR(P, Q)}}{R(P, Q)} d\theta(Q) \right\} \rho(Q) dL(Q) \\ &\quad - \int_L \phi(Q) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR(P, Q)}}{R(P, Q)} \right) d\theta(Q) \right\} \rho(Q) dL(Q) \end{aligned} \quad (4)$$

$$C^0(P) = \int_L \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R(P, Q)} \right) d\theta(Q) \right\} \rho(Q) dL(Q) \quad (5)$$

여기서 $\rho(Q)$ 는 generator L 상에서 움직이는 점 Q 의 반경거리, θ 는 회전각, dL 은 generator의 미소길이를 뜻한다.

축대칭형상인 경우의 수치적분은 generator L 만을 이산화하면 된다. 따라서 L 상의 점 Q 에서의 좌표 ρ 와 z , 요소 m 상의 경계값 ϕ 와 $\phi' = \partial\phi/\partial n$ 는 generator상에서의 각 요소를 local 좌표 ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$)의 직선으로 mapping함으로서 다음과 같이 근사화될 수 있다.

$$\rho(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha(\xi) \rho_\alpha, \quad z(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha(\xi) z_\alpha \quad (6)$$

$$\phi_m(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha(\xi) \phi_{m\alpha}, \quad \phi'_m(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha(\xi) \phi'_{m\alpha}$$

여기서 α 는 국소절점번호(1, 2, or 3)이고 $N_\alpha(\xi)$ 는 다음과 같은 2차의 형상함수이다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2, & N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2 \end{aligned} \quad (7)$$

따라서 식(4)와 (5)의 이산화형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C^0(P)\phi(P) &= \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \phi'_{m\alpha} \int_{-1}^1 K^A(P, \xi) N_\alpha(\xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{m\alpha} \int_{-1}^1 K^B(P, \xi) N_\alpha(\xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$C^0(P) = \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 K_2^B(P, \xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \quad (9)$$

$$K^A(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR(P, Q)}}{R(P, Q)} d\theta(Q) \quad (10a)$$

$$K^B(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR(P, Q)}}{R(P, Q)} \right) d\theta(Q) \quad (10b)$$

$$K_2^B(P, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R(P, Q)} \right) d\theta(Q) \quad (10c)$$

여기서 N 은 generator를 이산화하기 위해 사용된 요소의 총 갯수이고 $J_m(\xi)$ 는 다음과 같은 isometric 변환의 Jacobian이다.

$$J_m(\xi) = \left[\left(\frac{d\rho}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

점 P_j 가 global number j 상에 위치한 경우 ($P = P_j$), $\phi(P) = \phi(P_j) = \phi_j$, $\phi'(P) = \phi'(P_j) = \phi'_j$ 라고 하면 각각의 node j 에 대해서 식(8)과 (9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{m=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \phi_{m\alpha} a_{mj}^{\alpha} + \phi_j \sum_{m=1}^N C_{mj} = \sum_{m=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \phi'_{m\alpha} b_{mj}^{\alpha} \quad (12)$$

여기서,

$$a_{mj}^{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K^B(P_j, \xi) N_\alpha(\xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \quad (13a)$$

$$b_{mj}^{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K^A(P_j, \xi) N_\alpha(\xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \quad (13b)$$

$$C_{mj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_2^B(P_j, \xi) \rho(\xi) J_m(\xi) d\xi \quad (13c)$$

따라서 전체 node의 갯수가 M 일때 미지수 $\phi_{m\sigma}$ 또는 $\phi'_{m\sigma}$ 를 포함하고 있는 M 개의 연립방정식이 얻어진다. 따라서 식(12)는 다음과 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{\phi\} = [B]\{\phi'\} \quad (14)$$

여기서 계수행렬 $[A]$, $[B]$ 의 요소는 식(13)로부터 구할 수 있고, vector행렬 $\{\phi\}$, $\{\phi'\}$ 의 요소는 각 node 점에서의 ϕ 와 ϕ' 의 값이다. 만일 ϕ 또는 ϕ' 가 주어져 있거나 ϕ 와 ϕ' 간의 선형관계로서 임피던스가 주어져 있을때, 식(13)은 다음과 같은 형태로 변환할 수 있다.

$$[C]\{X\} = \{Y\} \quad (15)$$

여기서 $\{X\}$ 는 구하고자 하는 미지의 벡터이고 $\{Y\}$ 는 경계조건으로서 주어진 벡터이다.

이와같은 연립방정식을 이용하여 일단 경계면에서의 ϕ 와 ϕ' 이 구해지면 내부영역 V 에 존재하는 점 P 에 대한 ϕ 값은 다음 식으로 구할 수 있게 된다.

$$\phi_i(P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{\sigma=1}^3 (\phi_{m\sigma} b_{m\sigma}^a - \phi'_{m\sigma} a_{m\sigma}^a) \quad (16)$$

한편, 입자속도와 음압은 포텐셜로부터 다음 식으로 구할 수 있다.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (17)$$

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -i\omega\rho_0\phi \quad (18)$$

여기서 ρ_0 는 유체의 평균밀도이다.

투과손실(transmission loss)은 소음기의 미관(tail pipe)이 무반사단을 가질 때 소음기로 입사한 음향파 위와 투과하는 음향파위의 비에 의하여 정의되므로 입출구관의 지름이 같은 경우 다음식으로 나타낼 수 있다[6].

$$TL = 10 \log \left| \frac{p_i^+}{p_i} \right|^2 \quad (19)$$

식에서 p_i^+ 는 입구에서 입사파의 음압으로서 입구

단면의 절점평균음압 p_i 와 입자속도 u_i 로부터 다음 식에 의하여 간단히 구할 수 있다.

$$p_i^+ = \frac{1}{2}(p_i + \rho_0 c u_i) \quad (20)$$

또한 p_i 는 투과음압으로서 출구단면의 절점평균음으로 구할 수 있다.

3. 수치해석 및 실험

본 연구에서 대상으로 한 소음기는 Fig.1과 같은 단순팽창관 소음기와 Fig.2와 같은 흡음재를 부착한 팽창관 소음기로서 치수는 Fig.1에 도시한 바와 같다

먼저, 전술한 경계요소법 이론에 따라 전산프로그램을 개발한 후 대상소음기의 투과손실에 대한 주파수 특성을 수치계산하였고 직접 실험을 통해 얻은 결과와 비교 고찰하였다[4][5].

Fig.3은 Fig.1과 같은 단순팽창관 소음기에 대한 수치해석결과와 1차원 해석결과 및 실험결과를 비교 도시한 것이다. 그림에서 보면 수치계산결과와 실험 결과가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 1차원 평면파이론에 의한 해석결과와 비교해보면 주파수가 높을수록 편차가 증가하며, 축대칭모드의 차단주파수인 3500Hz 가까이에서는 상당한 차이가 남을 알 수 있다. 이러한 결과는 실제 음장이 평면파와 차이가 나기 때문이라고 할 수 있다.

Fig.4는 단순팽창관 소음기의 내부음장을 계산하여 등압선으로 도시한 결과로서 Fig.4(a)에서 보면 관의 확대부에서 파면이 곡면을 이루는 것을 알 수 있다. 즉, 1차원 평면파와는 상당한 편차가 있으며 Fig.4(b)와 같이 주파수가 증가할수록 이러한 편차가 커짐을 확인할 수 있다. 또한 Fig.4(c)에서 보면 차단주파수 이상에서 고차모드가 나타남을 확인할 수 있다.

Fig.5는 Fig.2의 A형과 같이 단순팽창관 소음기의 입출구면에 20mm 두께의 흡음재를 부착한 경우에 대한 투과손실의 수치해석결과와 실험결과를 비교 도시한 것이다. 이러한 흡음형 소음기의 경우에는 임피던스관을 사용하여 수직입사음에 대한 흡음재의 임피던스를 측정 후 흡음재가 부착된 표면의 경계

조건으로 이용하였다. 그림에서 보면 수치계산결과와 실험결과가 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 흡음재가 없는 경우와 비교해 보면 투과손실의 골과 산이 나타나는 주파수대역은 유사하고 그 크기는 더 높음을 알 수 있다.

Fig.6은 동일한 Fig.2의 A형에 대하여 흡음재의 두께를 60mm로 한 경우이다. 역시 수치계산결과와 실험결과가 잘 일치함을 알 수 있으나 흡음재가 두꺼워짐에 따라 단순평창관과는 전혀 다른 특성을 보임을 알 수 있다.

Fig.7은 Fig.2의 B형과 같이 평창관의 내면에 흡음재를 부착한 경우에 대한 투과손실의 수치계산결과를 실험결과와 비교 도시한 것이다. Fig.5, 6과 비교해 보면 계산결과와 실험결과가 상당한 편차를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 편차는 원인은 흡음면에 대한 경계조건으로 수직입사에 대한 임피던스를 적용하였기 때문이라고 볼 수 있다.

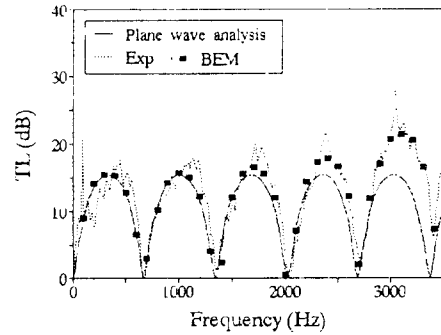


Fig.3 Comparison between the simulated and measured transmission loss for the simple chamber of Fig.1

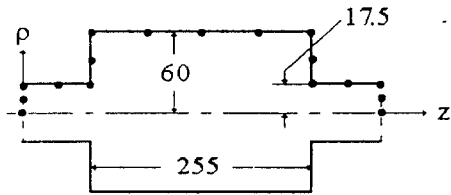
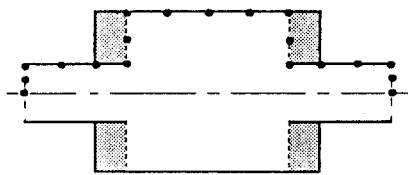


Fig.1 Simple chamber

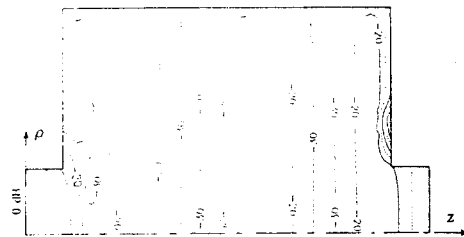


(a) Type A

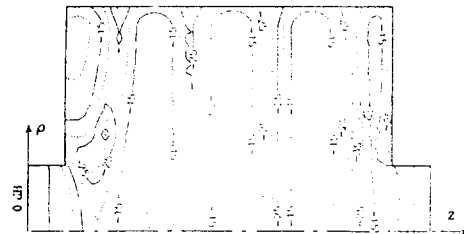


(b) Type B

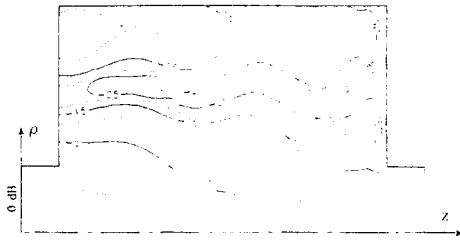
Fig.2 Simple chamber of Fig.1 with absorptive material



(a) 1675 Hz



(b) 2775 Hz



(c) 3485 Hz

Fig.4 Distribution of acoustic pressure for inner domain of simple chamber

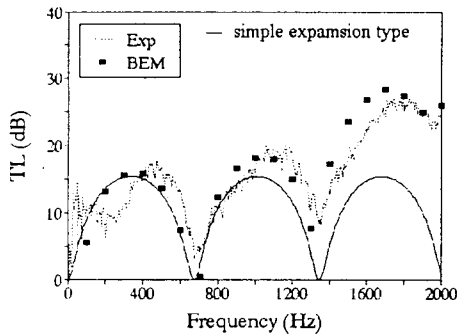


Fig.5. Comparison between the simulated and measured transmission loss of the absorptive muffler type A of Fig.2 with 20-mm-thick porous material

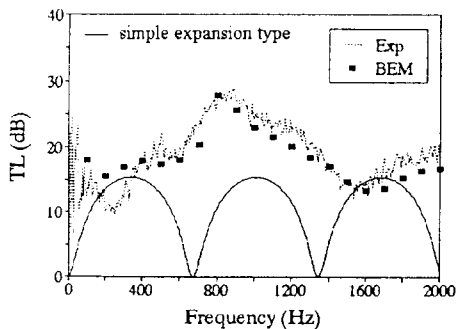


Fig.6 Comparison between the simulated and measured transmission loss of the absorptive muffler type A of Fig.2 with 60-mm-thick porous material

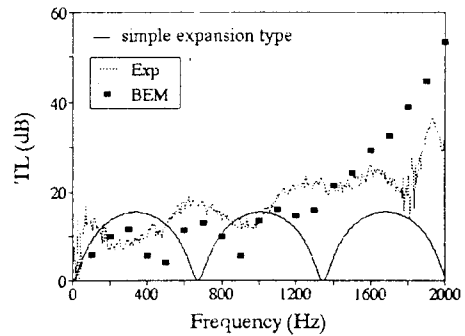


Fig.7 Comparison between the simulated and measured transmission loss of the absorptive muffler type B of Fig.2 with 20-mm-thick porous material

4. 결론

축대칭 소음기의 성능을 구하기 위한 경계요소 프로그램을 개발하였으며, 흡음재가 없는 공명형 소음기의 경우 수치계산결과와 실험결과는 매우 잘 일치하는 것을 확인하였다. 흡음재가 부착된 경우, 파동의 진행방향이 흡음재의 표면에 대해서 수직일 때는 본 연구에서 개발한 프로그램으로 소음성능의 정확한 예측이 가능하나 평행일 때는 본 프로그램의 적용이 어려운 것을 알 수 있었다.

참고문헌

1. A.F.Seybert, B.Soenarko, F.J.Rizzo, and D.J.Shippy, "A special integral equation formulation for acoustic radiation and scattering for axisymmetric bodies and boundary conditions," J. Acoust. Soc. Am. 80, 1241-1247 (1986)
2. A.F.Seybert and C.Y.R.Cheng, "Application of the boundary element method to acoustic

- cavity response and muffler analysis," ASME Journal of Vibration,Acoustics,Stress,and Reliability in Design, Vol. 109, 15-21 (1987)
3. T.Tanaka, T.Fujikawa, T.Abe, and H.Utsuno, "A Method for the analytical prediction of insertion loss of a two-dimensional muffler model based on the transfer matrix derived from the boundary element method," ASTM Journal of Vibration,Acoustics,Stress,and Reliability in Design, Vol.107, 86-91 (1985)
 4. J.Y.Chung and D.A.Blaser, "Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory, II. Experiment," J. Acoust. Soc. Am. 68, 907-921 (1980)
 5. W.T.Chu, "Transfer function technique for impedance and absorption measurements in an impedance tube using a single microphone," J. Acoust. Soc. Am. 80, 555-560 (1986)
 6. M.L.Munjaj, "Acoustics of ducts and mufflers," John Wiley & Sons, 1987.